$$\int_{AB} f(x;y;z)dl .$$

Для вычисления криволинейного интеграла 1-го рода от функции $f(x;y;z)$ по пространственной кривой AB, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, справедлива формула:

$$\int_{AB} f(x;y;z)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t);y(t);z(t)) \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt .$$

1.4 Приложения криволинейного интеграла 1-го рода

Криволинейный интеграл 1-го рода используется для вычисления:

– *длины кривой*: $L = \int_{AB} dl$;

– *площади цилиндрической поверхности,* направляющей которой служит кривая AB, лежащая в плоскости Oxy, и образующая параллельна оси Oz

$$S = \int_{AB} f(x;y)dl ;$$

– *массы материальной кривой* AB с плотностью $\rho(x;y)$:

$$m = \int_{AB} \rho(x;y)dl ;$$

– *статических моментов* и *координат центра тяжести* материальной кривой AB с плотностью $\rho(x;y)$ относительно осей Ox и Oy:

$$M_x = \int_{AB} y\rho(x;y)dl , \qquad M_y = \int_{AB} x\rho(x;y)dl ,$$

$$x_0 = \frac{M_y}{m} , \qquad y_0 = \frac{M_x}{m}$$

– *моментов инерции* материальной кривой AB с плотностью $\rho(x;y)$ относительно осей Ox и Oy, а также начала координат $O(0;0)$ соответственно:

$$I_x = \int_{AB} y^2 \rho(x;y)dl , \; I_y = \int_{AB} x^2 \rho(x;y)dl , I_0 = I_x + I_y .$$

Теорема 3 (непрерывность сложной функции) *Пусть функции* $x_1(t)$, $x_2(t)$, …, $x_n(t)$, $t = (t_1, t_2, ..., t_m)$, *определены в некоторой окрестности точки* $t_0 = (t_1^0; t_2^0; ...; t_m^0) \in \mathbb{R}^m$ *и непрерывны в точке* t_0. *Функция* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *определена в окрестности точки* $x_0 = (x_1(t_0); x_2(t_0); ...; x_n(t_0)) \in \mathbb{R}^n$ *и непрерывна в точке* x_0. *Тогда в некоторой окрестности точки* t_0 *определена сложная функция* $\Phi(t) = f(x_1(t); x_2(t); ...; x_n(t))$, *причем функция* $\Phi(t)$ *непрерывна в точке* t_0.

Тема 4 Частные производные

4.1 Частные и полные приращения функции многих переменных
4.2 Частные производные
4.3 Геометрический и механический смысл частных производных функции многих переменных
4.4 Дифференцируемость функции многих переменных

4.1 Частные и полные приращения функции многих переменных

Пусть функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ определена в окрестности точки $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$. Дадим переменной x_1^0 приращение Δx_1, а значения x_2^0, x_3^0, …, x_n^0 оставим без изменения.

Частным приращением функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по переменной x_1 в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ называется приращение

$$\Delta_{x_1} f(x_0) = f(x_1^0 + \Delta x_1; x_2^0; ...; x_n^0) - f(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0).$$

Аналогично определяются частные приращения $\Delta_{x_2} f(x_0)$, $\Delta_{x_3} f(x_0)$, …, $\Delta_{x_n} f(x_0)$ по переменным x_2, …, x_n в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Полным приращением в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется разность

$$\Delta f(x_0) = f(x_1^0 + \Delta x_1; x_2^0 + \Delta x_2; ...; x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0).$$

<u>Геометрически</u> для функции $f(x,y)$ в точке $(x_0;y_0)$ частные и полное приращения

$$\Delta_x z=\Delta_x f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$$
$$\Delta_y z=\Delta_y f(x_0,y_0)=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$
$$\Delta z=\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

можно изобразить отрезками A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 (рисунок 2. 1).

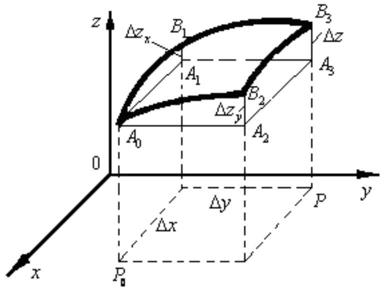

Рисунок 2. 1 – Геометрический смысл частных и полного приращений функции $f(x,y)$

4.2 Частные производные

Частной производной функции $f(x_1,x_2,...,x_n)$ по переменной x_1 в точке $x_0=(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$ называется предел отношения частного приращения функции $\Delta_{x1}f\ (x_0)$ к соответствующему приращению аргумента Δx_1, когда Δx_1 произвольным образом стремится к нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{f(x_1^0+\Delta x_1;x_2^0;...;x_n^0)-f(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)}{\Delta x_1}.$$

Для записи частной производной функции $f(x_1,x_2,...,x_n)$ по переменной x_1 в точке $x_0=(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$ используется также обозначение $f'_{x_1}\big|_{x=x_0}$.

Аналогично определяются частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$, ..., $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ по переменным x_2, ..., x_n в точке $x_0=(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$.

– криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от направления обхода кривой AB:

$$\int_{AB} f(x;y)dl=\int_{BA} f(x;y)dl.$$

1.3 Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода

Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода сводится к вычислению определенного интеграла.

Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцированные функции параметра t, причём точке A соответствует $t=\alpha$, точке B – значение $t=\beta$, $x'^2(t)+y'^2(t)\neq 0$.

Тогда дифференциал длины дуги равен

$$dl=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

и криволинейный интеграл 1-го рода вычисляется по формуле:

$$\int_{AB} f(x;y)dl=\int_\alpha^\beta f(x(t);y(t))\cdot\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt.$$

Пусть кривая AB задана в полярных координатах уравнением $r=r(\varphi)$, $\alpha\le\varphi\le\beta$, и $r(\varphi)$ имеет непрерывную производную $r'(\varphi)$ на $[\alpha;\beta]$. Тогда дифференциал дуги равен $dl=\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi$ и криволинейный интеграл 1-го рода вычисляется по формуле:

$$\int_{AB} f(x;y)dl=\int_\alpha^\beta f(r(\varphi)\cos\varphi;r(\varphi)\sin\varphi)\cdot\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi.$$

Пусть кривая AB задана уравнением $y=y(x)$, $a\le x\le b$, и $y(x)$ имеет непрерывную производную $y'(x)$ на отрезке $[a;b]$. Дифференциал дуги имеет вид $dl=\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$ и справедливо равенство

$$\int_{AB} f(x;y)dl=\int_a^b f(x;y(x))\cdot\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx.$$

Аналогично определяется криволинейный интеграл 1-го рода для функции 3-х переменных по пространственной кривой AB:

A и B – *начальной* и *конечной* точками интегрирования, dl – дифференциал дуги.

Теорема 1 (существование криволинейного интеграла 1-го рода) Если функция $f(x;y)$ непрерывна в каждой точке гладкой кривой AB, то криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} f(x;y)dl$ существует, и его величина не зависит от способа разбиения кривой на части и выбора точек на них.

Криволинейный интеграл 1-го рода обладает следующими свойствами:

– $\int\limits_{AB} dl = L$, где L – длина кривой AB;

– *(линейность)* если α и β — произвольные постоянные числа, функции $f(x;y)$ и $g(x;y)$ интегрируемы на кривой AB, то функция $\alpha \cdot f(x;y) + \beta \cdot g(x;y)$ тоже интегрируема на кривой AB и справедливо равенство:

$$\int\limits_{AB} (\alpha f(x;y) + \beta g(x;y))dl = \alpha \int\limits_{AB} f(x;y)dl + \beta \int\limits_{AB} g(x;y)dl;$$

– *(аддитивность)* если кривая AB состоит из двух частей AC и CB, $AB = AC \cup CB$, имеющих одну общую точку, на каждой из которых $f(x;y)$ интегрируема, то функция $f(x;y)$ также интегрируема на кривой AB и справедлива формула:

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{AC} f(x;y)dl + \int\limits_{CB} f(x;y)dl;$$

– *(оценка интеграла)* если на кривой AB имеет место неравенство $|f(x;y)| \le M$, то

$$\left| \int\limits_{AB} f(x;y)dl \right| \le M \cdot L,$$

где L – длина кривой AB;

– *(монотонность)* если для точек кривой AB выполнено неравенство $f(x;y) \ge g(x;y)$, то

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl \ge \int\limits_{AB} g(x;y)dl;$$

Частная производная функции нескольких переменных определяется как производная функции одной из этих переменных при условии, что все остальные переменные остаются постоянными. Вследствие этого, все правила и формулы дифференцирования, справедливые для производных функций одной переменной, имеют место и для частных производных. Однако во всех этих правилах и формулах при нахождении частной производной по какой-либо переменной все остальные переменные считаются постоянными.

4.3 Геометрический и механический смысл частных производных функции многих переменных

<u>Геометрический смысл частных производных.</u> Рассмотрим функцию $z = f(x,y)$, графиком которой является поверхность Ω. Точке $P_0(x_0;y_0) \in D(f)$ на поверхности Ω соответствует точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$. Пересечем график данной функции плоскостью $y = y_0$. В сечении получается кривая $z = f(x;y_0)$ (на рисунке 2. 2 это кривая AM_0B), которую можно рассматривать как график функции одной переменной $z = f(x;y_0)$ в плоскости $y = y_0$. Тогда, по геометрическому смыслу производной функций одной переменной, значение частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ функции $z = f(x,y)$ в точке $P_0(x_0;y_0)$ есть тангенс угла α, образованного положительным направлением оси Ox и касательной, проведенной в точке $M_0(x_0;y_0)$ к линии пересечения поверхности $z = f(x,y)$ и плоскости $y = y_0$ (рисунок 2. 2).

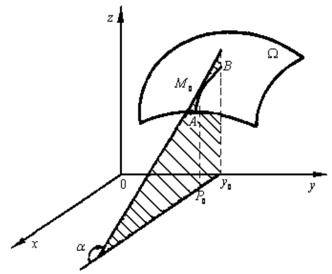

Рисунок 2. 2 – Геометрический смысл $\frac{\partial z(x;y)}{\partial x}$ в точке $P_0(x_0;y_0)$

Аналогично определяется геометрический смысл частной производной функции $z = f(x, y)$ по y.

<u>Касательная плоскость и нормаль к поверхности.</u> Графиком функции двух независимых переменных $z = f(x, y)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ является некоторая поверхность Ω (рисунок 2. 3). Выберем на ней точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

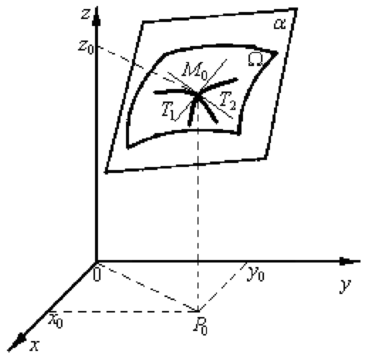

Рисунок 2. 3 – Касательная плоскость α к поверхности Ω

Касательной плоскостью к поверхности Ω в данной точке M_0 называется плоскость, которая содержит все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку.

Уравнение касательной плоскости α к поверхности, проходящей через касательные T_1 и T_2 имеет вид

$$f'_x(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)\cdot(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

или

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)\cdot(y - y_0).$$

Нормалью к поверхности Ω в данной точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ называется прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно к касательной плоскости, проведенной в данной точке поверхности. Используя условие перпендикулярности прямой и плоскости, канонические уравнения нормали запишутся в виде:

$$\frac{(x - x_0)}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{(y - y_0)}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{(z - z_0)}{-1}.$$

Точка, в которой $F'_x = F'_y = F'_z = 0$ или хотя бы одна из этих частных производных не существует, называется *особой точкой по-*

Обозначим $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta l_i$. Значение S тем точнее, чем меньше длина каждой части l_1, l_2, ..., l_n. Поэтому точным значением площади всей цилиндрической поверхности можно считать

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i; \eta_i)\cdot \Delta l_i.$$

1.2 Определение и свойства криволинейного интеграла 1-го рода

Пусть функция $f(x; y)$ определена и ограничена в точках $(x; y)$ гладкой или кусочно-гладкой кривой AB, лежащей в плоскости Oxy. Разобьем кривую AB точками $A = M_0 < M_1 < \ldots < M_n = B$ на n частичных дуг l_1, l_2, ..., l_n, длины которых равны Δl_1, Δl_2, ..., Δl_n. Выберем на каждой частичной дуге l_k, $k = 1, 2, ..., n$ точку $C_k(\xi_k; \eta_k)$ (рисунок 3. 3).

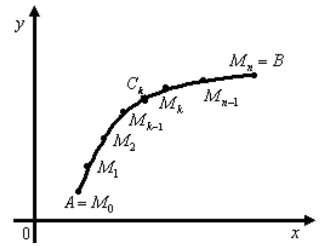

Рисунок 3. 3 – Разбиение кривой AB
для определения криволинейного интеграла 1-го рода

Сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k; \eta_k)\cdot \Delta l_k$ называется *интегральной суммой* для функции $f(x; y)$, определенной на кривой AB.

Обозначим $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta l_k$

Криволинейным интегралом первого рода называется предел (если он существует) интегральной суммы при $\lambda \to 0$:

$$\int\limits_{AB} f(x; y)dl = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k; \eta_k)\Delta l_k.$$

Подынтегральная функция $f(x; y)$ называется *интегрируемой* вдоль кривой AB, сама кривая AB – *контуром интегрирования*,

$$m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i;\eta_i)\cdot\Delta l_i .$$

Задача о площади цилиндрической поверхности. Пусть в плоскости Oxy задана некоторая гладкая кривая AB, которая является областью определения некоторой функции $z=f(x;y)$, причем $\forall\, M(x;y)\ \ f(M)\geq 0$. Тогда точки $(x;y;f(M))$ в совокупности представляют собой некоторую пространственную кривую. Требуется найти площадь цилиндрической поверхности, для которой AB – образующая, направляющие параллельны оси Oz, ограниченной сверху $z=f(x;y)$, снизу кривой AB, с боков прямыми (рисунок 3. 2).

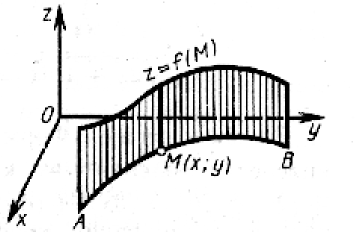

Рисунок 3.2 – Цилиндрическая поверхность

Разобьем дугу AB точками $A=M_0<M_1<\ldots<M_n=B$, на n частичных дуг l_1, l_2, …, l_n, длины которых равны Δl_1, Δl_2, …, Δl_n. Из каждой точки разбиения M_0, M_1, …, M_n проведем перпендикуляры к плоскости Oxy высотой $f(M_i)$, $i=1,2,\ldots,n$. В результате вся цилиндрическая поверхность разобьется на n полосок. На каждой частичной дуге l_i возьмем точку $C_i(\xi_i;\eta_i)$. Каждую полоску заменим прямоугольником, у которого Δl_i – основание, $f(\xi_i;\eta_i)$ – высота. Тогда площадь каждой полоски приблизительно будет равна $S_i\approx f(\xi_i;\eta_i)\cdot\Delta l_i$, а площадь всей цилиндрической поверхности

$$S\approx\sum_{i=1}^{n}S_i=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i;\eta_i)\cdot\Delta l_i .$$

верхности. В такой точке поверхность может не иметь касательной плоскости.

Механический смысл частных производных. Частные производные $f'_x(x_0,y_0)$ и $f'_y(x_0,y_0)$ характеризуют скорость изменения функции $z=f(x,y)$ в данной точке $P_0(x_0;y_0)$, причем $f'_x(x_0,y_0)$ задает скорость изменения функции в направлении прямой $y=y_0$ (или, что то же, относительно переменной x), $f'_y(x_0,y_0)$ – в направлении прямой $x=x_0$ (относительно переменной y).

4.4 Дифференцируемость функции многих переменных

Пусть функция $f(x,y)$ определена в окрестности $U(\delta;P_0)$ точки $P_0(x_0;y_0)$. Функция $f(x,y)$ называется *дифференцируемой* в точке $P_0(x_0;y_0)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta f\big|_{(x_0,y_0)}=A(x_0,y_0)\Delta x+B(x_0,y_0)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y .$$

Данное равенство называется *условием дифференцируемости* функции $f(x,y)$ в точке $P_0(x_0;y_0)$. Здесь A и B – некоторые постоянные, зависящие от x_0 и y_0; $\alpha=\alpha(\Delta x,\Delta y)$ и $\beta=\beta(\Delta x,\Delta y)$ – бесконечно малые функции от Δx и Δy:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha(\Delta x,\Delta y)=0,\ \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\beta(\Delta x,\Delta y)=0 .$$

Условие дифференцируемости записывается также в виде:

$$\Delta f=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

где $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ – расстояние между точками $P_0(x_0;y_0)$ и $P(x;y)$, $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{o(\rho)}{\rho}=0$.

Функция $f(x,y)$, дифференцируемая в каждой точке множества G, называется *дифференцируемой на* G.

Слагаемое $A\Delta x+B\Delta y$, линейное относительно Δx и Δy, называется *главной частью приращения функции*.

Теорема 1 (связь дифференцируемости и непрерывности) Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в *точке $P_0(x_0;y_0)$, то она и непрерывна в этой точке.*

Теорема 2 (необходимое условие дифференцируемости функции) Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$, то она имеет в этой точке частные производные $f'_x(x_0,y_0)$ и $f'_y(x_0,y_0)$, причем $f'_x(x_0,y_0)=A$, $f'_y(x_0,y_0)=B$.

Утверждения, обратные утверждениям теорем 1 и 2 неверны: из непрерывности функции, а также существования ее частных производных, еще не следует дифференцируемость функции.

Теорема 3 (достаточное условие дифференцируемости функции) Если функция $f(x;y)$ имеет частные производные в некоторой окрестности точки $P_0(x_0;y_0)$, непрерывные в самой этой точке, то она дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$.

Функции с непрерывными частными производными называются *непрерывно дифференцируемыми.*

Тема 5 Дифференцирование сложной функции

3.1 Полный дифференциал функции многих переменных
3.2 Геометрический смысл полного дифференциала
3.3 Дифференцирование сложной функции
3.4 Инвариантность формы первого дифференциала функции многих переменных

3.1 Полный дифференциал функции многих переменных

Если функция $f(x;y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$, то ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta f\Big|_{(x_0,y_0)} = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y .$$

Сумма первых двух слагаемых есть главная линейная (относительно Δx и Δy) часть приращения функции и называется *полным дифференциалом* функции:

$$df(x_0;y_0) = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y .$$

Приращения независимых переменных Δx и Δy называются *дифференциалами независимых переменных* x и y и обозначаются

Раздел 3 **Интегральное исчисление функции многих переменных**

Тема 1 Криволинейные интегралы 1-го

1.1 Задачи, приводящие к понятию криволинейного интеграла 1-го рода
1.2 Определение и свойства криволинейного интеграла 1-го рода
1.3 Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода
1.4 Приложения криволинейного интеграла 1-го рода

1.1 Задачи, приводящие к понятию криволинейного интеграла 1-го рода

Задача о массе материальной линии. Пусть вдоль некоторой гладкой кривой AB распределена масса с переменной плотностью $\rho=\rho(x;y)$. Требуется определить массу m дуги AB.

Разобьем дугу AB точками $A=M_0<M_1<\ldots<M_n=B$, на n частичных дуг l_1, l_2, ..., l_n, длины которых равны Δl_1, Δl_2, ..., Δl_n (рисунок 3.1).

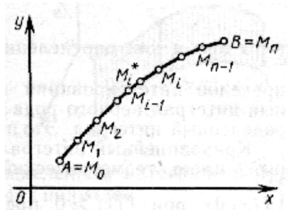

Рисунок 3.1 – Разбиение материальной кривой

Будем считать, что на каждой частичной дуге плотность постоянна и равна $\rho(\xi_i;\eta_i)$, где $C_i(\xi_i;\eta_i)$ – произвольная точка частичной области. Тогда масса части l_i приблизительно равна $m_i \approx \rho(\xi_i;\eta_i)\cdot\Delta l_i$, а масса всей дуги AB

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i;\eta_i)\cdot\Delta l_i .$$

Обозначим $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\Delta l_i$. Значение m тем точнее, чем меньше длина каждой части l_1, l_2, ..., l_n. Поэтому точным значением массы всей дуги AB можно считать соответственно dx и dy.

Тогда полный дифференциал функции запишется в виде:

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} dy .$$

Выражения $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} dx$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} dy$ называются *частными дифференциалами* функции $f(x; y)$ и обозначаются $d_x f$ и $d_y f$.

Таким образом, $df = d_x f + d_y f$.

Для приближенных вычислений функции $f(x, y)$ в точке $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ при малых Δx и Δy используется формула

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \approx f(x_0; y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y .$$

3.2 Геометрический смысл полного дифференциала

Учитывая, что $\Delta x = x - x_0 = dx$, $\Delta y = y - y_0 = dy$, уравнение касательной плоскости можно записать в виде

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} dy .$$

Правая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал функции $f(x, y)$ в точке $P_0(x_0; y_0)$, а левая его часть $z - z_0$ – приращение аппликаты касательной плоскости в точке касания: $z - z_0 = df(x_0, y_0)$.

Определение дифференцируемости функции и ее дифференциала обобщаются на случай функции многих переменных $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Условие дифференцируемости запишется в виде

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + ... + (\Delta x_n)^2}$.

Дифференциал функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет вид

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n .$$

соответственно dx и dy.

Тогда полный дифференциал функции запишется в виде:

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} dy .$$

Выражения $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} dx$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} dy$ называются *частными дифференциалами* функции $f(x; y)$ и обозначаются $d_x f$ и $d_y f$.

Таким образом, $df = d_x f + d_y f$.

Для приближенных вычислений функции $f(x, y)$ в точке $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ при малых Δx и Δy используется формула

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \approx f(x_0; y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y .$$

3.2 Геометрический смысл полного дифференциала

Учитывая, что $\Delta x = x - x_0 = dx$, $\Delta y = y - y_0 = dy$, уравнение касательной плоскости можно записать в виде

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} dy .$$

Правая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал функции $f(x, y)$ в точке $P_0(x_0; y_0)$, а левая его часть $z - z_0$ – приращение аппликаты касательной плоскости в точке касания: $z - z_0 = df(x_0, y_0)$.

Определение дифференцируемости функции и ее дифференциала обобщаются на случай функции многих переменных $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Условие дифференцируемости запишется в виде

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + ... + (\Delta x_n)^2}$.

Дифференциал функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет вид

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n .$$

29

3.3 Дифференцирование сложной функции

Пусть $f(x,y)$ – функция двух переменных x и y, каждая из которых, в свою очередь, является функцией независимых переменных u и v:

$$x = x(u,v),\; y = y(u,v).$$

Тогда функция $f(x(u,v),y(u,v))$ является *сложной* функцией двух независимых переменных u и v. Переменные x и y называются *промежуточными переменными*.

Теорема 1 Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x,y), а функции $x(u,v)$, $y(u,v)$ дифференцируемы в точке (u,v), то сложная функция $f(x(u,v),y(u,v))$ дифференцируема в точке (u,v) и ее частные производные вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}; \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Для функции $f(x,y,z)$ трех переменных, каждая из которых, в свою очередь, является функцией независимых переменных u, v, w:

$$x = x(u,v,w),\; y = y(u,v,w),\; z = z(u,v,w)$$

частные производные сложной функции $f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))$ вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial f}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial w}.$$

Аналогично для функции n переменных, $n > 3$.

Для функции $f(x,y,z)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ функции независимой переменной t, сложная функция $f(x(t),y(t),z(t))$ является функцией одной переменной t. Производная

20 Какие функции называются а) зависимыми, б) независимыми?

21 Дайте определение локального экстремума функции многих переменных.

22 Какие точки называются стационарными и критическими?

23 Какая функция называется квадратичной формой? Что такое матрица квадратичной формы и ее главные миноры?

24 Какая квадратичная форма называется: а) положительно определенной; б) отрицательно определенной; в) знакоопределенной;

25 г) квазизнакоопределенной; д) знакопеременной? Что называется условным экстремумом функции? Какая функция называется функцией Лагранжа?

Формулировки теорем и формулы

1 Какими свойствами обладают непрерывные функции?

2 В чем суть теоремы Кантора?

3 Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции многих переменных

4 Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности.

5 Сформулируйте правило дифференцирования сложной функции.

6 Сформулируйте теорему о существовании, единственности и непрерывности неявной функции $F(x;y;z) = 0$.

7 Сформулируйте теорему о дифференцировании функции $F(x;y;z) = 0$.

8 Сформулируйте теорему о существовании, единственности и дифференцируемости совокупности неявных функций, определяемых системой уравнений.

9 Сформулируйте теорему о достаточном условии независимости функций.

10 Как находятся частные производные высших порядков?

11 Какой вид имеет формула Маклорена?

12 Сформулируйте критерий Сильвестра.

13 В чем состоит метод исключения части переменных?

14 В чем состоит метод Лагранжа?

15 Как найти глобальные экстремумы функции?

Доказательства теорем

1 Сформулируйте и докажите теорему о существовании повторных пределов.

2 Сформулируйте и докажите необходимое условие дифференцируемости функции в точке.

3 Сформулируйте и докажите достаточное условие дифференцируемости функции в точке.

4 Сформулируйте и докажите теорему о равенстве смешанных производных.

Вопросы для самоконтроля

О п р е д е л е н и я

1 Дайте определения: а) n-мерного арифметического точечного пространства; б) расстояния в пространстве $\mathbb{R}^n$, в) n-мерного евклидова пространства.

2 Дайте определения окрестности и проколотой окрестности точки в пространстве $\mathbb{R}^n$.

3 Какая точка множества называется: а) внутренней; б) граничной; в) предельной; г) изолированной?

4 Какое множество называется а) открытым; б) замкнутым; в) компактом; г) связным; д) областью?

5 Что называется функцией в пространстве $\mathbb{R}^n$?

6 Что называется множеством уровня?

7 Сформулируйте определения предела функции $f(x,y)$ в точке по Гейне и по Коши.

8 Дайте для функции многих переменных определения бесконечных пределов:

а) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

9 Сформулируйте определение повторного предела функции двух переменных.

10 Какая функция называется непрерывной в точке? Сформулируйте определение непрерывности функции на компактах.

11 Сформулируйте определение равномерной непрерывности функции.

12 Какое число называется колебанием функции $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$?

13 Как определяются частные и полные приращения функции многих переменных?

14 Дайте определение частных производных.

15 Дайте определение дифференцируемости функции нескольких переменных в точке.

16 Что называется полным дифференциалом функции многих переменных?

17 Какая функция называется неявной?

18 Что называется совокупностью неявных функций, определяемых системой уравнений?

19 Что называется якобианом?

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

сложной функции $f(x(t),y(t),z(t))$ называется *полной производной*.

3.4 Инвариантность формы первого дифференциала функции многих переменных

Найдем полный дифференциал сложной функции $f(u(x,y),v(x,y))$ в точке $P_0(x_0;y_0)$. Подставим выражения $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$, определяемые равенствами

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

в формулу полного дифференциала сложной функции двух переменных $df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$.

Получим

$$df=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy$$

или

$$df=\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right).$$

Так как $\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=du$, $\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=dv$, то

$$df=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv.$$

Видно, что форма записи полного дифференциала функции двух переменных не зависит от того, являются ли u и v независимыми переменными, или функциями других независимых переменных. Аналогичное утверждение имеет место и для функции $f(x_1,x_2,...,x_n)$. В этом и заключается *инвариантность формы первого дифференциала функции многих переменных*.

Темы 6 Частные производные, дифференциалы высших порядков

6.1 Частные производные высших порядков
6.2 Теорема о равенстве смешанных производных
6.3 Дифференциалы высших порядков функции двух переменных

6.1 Частные производные высших порядков

Пусть функция $f(x,y)$ двух переменных имеет непрерывные частные производные $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ в точке $(x;y)\in D(f)$. Эти производные, в свою очередь, являются функциями двух переменных x и y. Функции $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ называются *частными производными первого порядка*. Частные производные по x и по y от частных производных первого порядка, если они существуют, называются *частными производными второго порядка* от функции $f(x,y)$ в точке $(x;y)$ и обозначаются:

$f''_{xx}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$ – функция f дифференцируется последовательно два раза по x;

$f''_{xy}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$ – функция f дифференцируется сначала по x, а затем по y;

$f''_{yx}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}$ – функция f дифференцируется сначала по y, а затем по x;

$f''_{yy}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$ – функция f дифференцируется последовательно два раза по переменной y.

Если производные второго порядка являются непрерывными функциями, то их можно дифференцировать по переменным x и y. Получим частные производные третьего порядка и т. д. Частная производная от производной $(n-1)$-го порядка называется *част-*

P_0 *условиям теоремы 2 практического занятия 3.*

Тогда существует такое число λ*, что выполняются условия Лагранжа:*

$$\left.\frac{\partial L}{\partial x}\right|_{P_0(x_0;y_0)}=0,\quad \left.\frac{\partial L}{\partial y}\right|_{P_0(x_0;y_0)}=0,\quad \left.\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right|_{P_0(x_0;y_0)}=0.$$

Согласно этой теореме для нахождения условного экстремума функции $f(x,y)$ с уравнением связи $\varphi(x,y)=0$ необходимо:

– составить функцию Лагранжа $L(x,y,\lambda)$,

– найти точки $(x_k;y_k;\lambda_k)$ возможного экстремума функции Лагранжа;

– при фиксированном λ_k для дифференциала $d^2L(x_k;y_k;\lambda_k)=\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}d^2x+2\dfrac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}dxdy+\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2}d^2y$ проверить условие $d^2L(x_k;y_k;\lambda_k)>0$. Если оно выполняется, то точка $(x_k;y_k;\lambda_k)$ является точкой условного экстремума функции $f(x,y)$.

Метод множителей Лагранжа имеет место и для функции многих переменных $f(x_1;x_2;...;x_n)$.

10.4 Глобальный экстремум функции многих переменных

Пусть функция $f(x,y)$ определена на компакте D. Тогда на нем она достигает своих наименьшего и наибольшего значений либо внутри D, либо на границе.

Точки, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения на компакте называются *точками глобального экстремума*. Если точка глобального экстремума функции является внутренней точкой области, то она является точкой локального экстремума, а если граничной, то – точкой условного экстремума. Следовательно, чтобы найти глобальные экстремумы функции $f(x;y)$ на компакте D, необходимо найти локальные и условные экстремумы функции, сравнить найденные значения и выбрать наибольшее и наименьшее.

Пусть требуется найти локальный экстремум функции $f(x,y)$ при условии, что переменные x и y удовлетворяют уравнению связи $\varphi(x,y)=0$.

Если уравнение связи можно однозначно разрешить относительно переменной y, т. е. выразить y как функцию x: $y=y(x)$, то, подставив в аналитическое выражение функции $f(x,y)$ вместо y функцию $y(x)$, получается функция одной переменной $f(x,y(x))$. Для этой функции проводится исследование на локальный экстремум известными методами. Найденные экстремумы являются точками условного экстремума для функции $f(x,y)$. Аналогично поступают, если уравнение $\varphi(x,y)=0$ можно однозначно разрешить относительно переменной x, т. е. x выразить как функцию y.

Если условие связи задается параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in T$, то, подставляя x и y в аналитическое выражение функции $f(x,y)$, приходим к задаче отыскания экстремума функции одной переменной.

Если уравнение связи нельзя разрешить относительно какой-либо одной из переменных или представить параметрическими уравнениями, данная задача значительно усложняется.

10.3 Метод множителей Лагранжа

Рассмотрим задачу нахождения условного экстремума функции $f(x,y)$, не разрешая уравнение связи $\varphi(x,y)=0$ относительно переменной x или y.

Введем вспомогательную функцию, называемую *функцией Лагранжа*:

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),$$

где λ – некоторое действительное число, которое называется *множителем Лагранжа*.

Теорема 1 (Лагранжа) Пусть 1) функция $f(x,y)$ определена и дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$ и имеет в этой точке условный экстремум при условиях связи $\varphi(x,y)=0$; 2) уравнение $\varphi(x,y)=0$ удовлетворяет в δ-окрестности точки

ной производной n-го порядка и обозначается $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$, $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}$, $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^{n-2}\partial y^2}$ и т.д.

Частные производные высших порядков функции z, взятые по различным переменным, например $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}$, … называются *смешанными производными.*

6.2 Теорема о равенстве смешанных производных

Теорема 1 Если функция $f(x,y)$ и ее частные производные f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} определены и непрерывны в точке $(x_0;y_0)$ и в некоторой ее окрестности, то $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$.

Теорема 1 имеет место и для функции любого числа переменных.

Пусть $f(x,y)$ – функция двух независимых переменных x и y, дифференцируемая в области $D(f)$. Выражение вида:

$$df=f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy,$$

называется *дифференциалом первого порядка* функции $f(x,y)$.

6.3 Дифференциалы высших порядков функции двух переменных

Дифференциал от дифференциала первого порядка в любой точке $(x;y)\in D(f)$, если он существует, называется *дифференциалом второго порядка* и обозначается:

$$d^2f=d(df).$$

Аналитическое выражение для d^2z имеет вид:

$$d^2f=f''_{xx}(x,y)dx^2+2f''_{xy}(x,y)dxdy+f''_{yy}(x,y)dy^2.$$

Аналогично для *дифференциала третьего порядка* d^3f:

$$d^3f=d\left(d^2f\right)=$$

$$=f'''_{xxx}(x,y)dx^3+3f'''_{xxy}(x,y)dx^2dy+3f'''_{xyy}(x,y)dxdy^2+3f'''_{yyy}(x,y)dy^3.$$

И так далее.

Функция f называется k *раз непрерывно дифференцируемой* в области G, если для нее существует k-ый дифференциал в этой области.

Аналитическое выражение для дифференциала n-го порядка кратко записывается в виде символической формулы:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z,$$

причем правая часть этого равенства раскрывается формально по биномиальному закону.

Если $f(x,y)$ дифференцируемая функция промежуточных аргументов x и y, которые, в свою очередь, являются дифференцируемыми функциями u и v, то $dx \neq \Delta x$, $dy \neq \Delta y$. Следовательно, приведенные выше формулы дифференциалов *не являются* инвариантными для сложных функций.

Темы 7 Формула Тейлора для функции многих переменных

7.1 Формула Тейлора для функции двух переменных
7.2 Формула Маклорена для функции двух переменных

7.1 Формула Тейлора для функции двух переменных

Теорема 2 (Тейлора) Пусть функция двух переменных $f(x,y)$ непрерывна со всеми частными производными до $(n+1)$ порядка включительно в некоторой δ-окрестности точки $(x_0;y_0) \in D(f)$. Тогда справедлива формула Тейлора::

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0,y_0) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0,y_0) + R_n,$$

$$\text{где } R_n = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(\xi,\eta), \; x_0 < \xi < x; \; y_0 < \eta < y.$$

Следствие. При условиях теоремы 2 имеет место формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0,y_0) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0,y_0) + o(\rho^n),$$

Тема 10 Условный экстремум

10.1 Понятие условного экстремума
10.2 Методы отыскания условного экстремума
10.3 Метод множителей Лагранжа
10.4 Глобальный экстремум функции многих переменных

10.1 Понятие условного экстремума

Рассмотрим функцию $f(P)$, $P(x_1;x_2;\ldots;x_n)$. Будем считать, что ее аргументы являются связанными между собой

$$\begin{cases} F_1(x_1;x_2;\ldots x_n) = 0, \\ F_2(x_1;x_2;\ldots x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_k(x_1;x_2;\ldots x_n) = 0. \end{cases}$$

Данные соотношения называются *условиями связи.* Пусть координаты точки $P_0(x_1^0;x_2^0;\ldots;x_n^0)$ удовлетворяют данной системе уравнений.

Говорят, что функция $f(P)$ имеет в точке $P_0(x_1^0;x_2^0;\ldots;x_n^0)$ *условный минимум (максимум)* при условиях связи, если существует такая δ-окрестность точки P_0, что для любой точки $P(x_1;x_2;\ldots;x_n) \in U(\delta;P_0)$, $P \neq P_0$, координаты которой удовлетворяют уравнениям (6.1), выполняется неравенство

$$f(P) > f(P_0) \qquad (f(P) < f(P_0)).$$

В отличие от обычной (безусловной) точки экстремума, значение функции в точке условного экстремума сравнивается с ее значениями не во всех точках некоторой δ-окрестности точки P_0, а только в тех ее точках, которые связаны между собой условиями связи.

10.2 Методы отыскания условного экстремума

Рассмотрим методы нахождения условного экстремума функции $f(x,y)$, переменные x и y которой удовлетворяют уравнению связи $\varphi(x,y) = 0$.

$\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial x_i}$, …, $\dfrac{\partial f_m}{\partial x_i}$, $i = 1,2,\dots,n$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}\cdot\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2}\cdot\dfrac{\partial f_2}{\partial x_i} + \dots + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}\cdot\dfrac{\partial f_m}{\partial x_i} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}\cdot\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_2}\cdot\dfrac{\partial f_2}{\partial x_i} + \dots + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}\cdot\dfrac{\partial f_m}{\partial x_i} = 0, \end{cases}$$

определителем, которой является якобиан (в силу теоремы 2, якобиан отличен от нуля).

9.4 Зависимость функций

Пусть функции $y_j = f_j(x_1;x_2;\dots;x_n)$, $j = 1,2,\dots,m$ определены и дифференцируемы в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^n$, $m \le n$. Функция $y_k = f_k(x_1;x_2;\dots;x_n)$ называется *зависимой* в области G от остальных функций, если ее можно представить в виде

$$y_k = \Phi(y_1;y_2;\dots y_{k-1};y_{k+1};\dots;y_m),$$

где Φ – дифференцируемая функция своих аргументов.

Если ни одна из функций $y_j = f_j(x_1;x_2;\dots;x_n)$, $j = 1,2,\dots,m$, не зависит от остальных, то система из этих функций называется *независимой* в G.

Теорема 3 (достаточное условие независимости) Пусть

1) функции $y_j = f_j(x_1;x_2;\dots;x_n)$, $j = 1,2,\dots,m$, дифференцируемы в некоторой окрестности точки $(x_1^0;x_2^0;\dots;x_n^0)$;

2) якобиан этих функций по каким-либо переменным не равен нулю в этой точке.

Тогда функции $y_j = f_j(x_1;x_2;\dots;x_n)$, $j = 1,2,\dots,m$, независимы в некоторой окрестности точки $(x_1^0;x_2^0;\dots;x_n^0)$.

Следствие Если функции $y_j = f_j(x_1;x_2;\dots;x_n)$, $j = 1,2,\dots,m$, зависимы в некоторой окрестности точки $(x_1^0;x_2^0;\dots;x_n^0)$, то все якобианы $\dfrac{D(y_1;y_2;\dots;y_m)}{D(x_{i_1};x_{i_2};\dots;x_{i_n})}$ равны нулю в этой окрестности.

где $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$.

7.2 Формула Маклорена для функции двух переменных

Если в формуле Тейлора положить $x_0 = y_0 = 0$, то имеет место *формула Маклорена*:

$$f(x,y) = f(0,0) + df(0,0) + \frac{1}{2!}d^2 f(0,0) + \dots + \frac{1}{n!}d^n f(0,0) + R_n.$$

С помощью формулы Тейлора для функции двух независимых переменных можно находить приближенные значения функции в точке, а также исследовать функции двух переменных на экстремум.

Тема 8 Экстремум функции многих переменных

8.1 Понятие экстремума функции многих переменных
8.2 Необходимое условие локального экстремума
8.3 Некоторые сведения о квадратичных формах
8.4 Достаточные условия локального экстремума функции многих переменных

8.1 Понятие экстремума функции многих переменных

Пусть дана функция $f(x_1;x_2;\dots;x_n) = f(P)$, определенная в некоторой δ-окрестности точки $P_0(x_1^0;x_2^0;\dots;x_n^0)$.

Точка $P_0(x_1^0;x_2^0;\dots;x_n^0)$ называется точкой *локального максимума (минимума)* функции $f(P)$, если существует такая δ-окрестность этой точки, что для всех $P(x_1;x_2;\dots;x_n) \in \mathring{U}(\delta;P_0)$ выполняется неравенство

$$f(P_0) > f(P) \qquad (f(P_0) < f(P)),$$

значение $f(P_0)$ называют *локальным максимумом (минимумом)* функции и обозначается:

$$\max_{P\in\mathring{U}(\delta;P_0)} f(P) = f(P_0) \qquad (\min_{P\in\mathring{U}(\delta;P_0)} f(P) = f(P_0)).$$

Точки максимума или минимума функции называют *точками экстремума* функции, а максимумы и минимумы функции – *экс-*

тремумами функции.

Очевидно, что если функция $f(P)$ имеет в точке $P_0(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$ локальный экстремум, то в случае локального максимума

$$\Delta f = f(P) - f(P_0) < 0 \quad \forall \quad P(x_1;x_2;...;x_n) \in \overset{\circ}{U}(\delta;P_0),$$

а в случае локального минимума –

$$\Delta f = f(P) - f(P_0) > 0 \quad \forall \quad P(x_1;x_2;...;x_n) \in \overset{\circ}{U}(\delta;P_0).$$

8.2 Необходимое условие локального экстремума

Теорема 1 (необходимые условия существования локального экстремума) Если в точке P_0 дифференцируемая функция $f(P)$ имеет локальный экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю:

$$\frac{\partial u(P_0)}{\partial x_1} = \frac{\partial u(P_0)}{\partial x_2} = ... = \frac{\partial u(P_0)}{\partial x_n} = 0,$$

или, по крайней мере, одна из них не существует.

Следствие. Если функция $f(P)$ имеет в точке P_0 локальный экстремум, то ее дифференциал в этой точке $du(P_0)$ равен нулю или не существует.

Точки, в которых выполняется необходимое условие, называются *стационарными.* Точки, в которых дифференциал функции равен нулю или не существует, называются *точками возможного экстремума* или *критическими*.

Равенство нулю частных производных первого порядка не является достаточным условием существования экстремума функции $u = f(x_1;x_2;...;x_n)$ в точке $P_0(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$.

8.3 Некоторые сведения о квадратичных формах

Функция вида

$$Q(x_1;x_2;...;x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + ... + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 +$$
$$+ a_{22}x_2^2 + ... + a_{2n}x_2x_n + ... + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1;x_2;...;x_n), \\ y_2 = f_2(x_1;x_2;...;x_n), \\ ...., \\ y_m = f_m(x_1;x_2;...;x_n), \end{cases}$$

и называется *совокупностью неявных функций.*

9.3 Якобиан системы функций

Определитель

$$J = \frac{D(F_1;F_2;...;F_m)}{D(y_1;y_2;...;y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & ... & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & ... & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & ... & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix},$$

составленный из частных производных, называется *якобианом (определителем Якоби)* функций F_1, F_2, …, F_m по переменным y_1, y_2, …, y_m.

Теорема 2 Пусть

1) функции F_1, F_2, …, F_m дифференцируемы в некоторой δ-окрестности точки $P_0(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0;y_1^0;y_2^0;...;y_m^0)$,

2) частные производные $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$, $i, j = 1,2,...,m$ непрерывны в P_0,

3) $F_1(P_0) = 0$, $F_2(P_0) = 0$, …, $F_m(P_0) = 0$, $\left.\frac{D(F_1;F_2;...;F_m)}{D(y_1;y_2;...;y_m)}\right|_{P_0} \neq 0$.

Тогда в некоторой окрестности точки система уравнений $F_j(x_1;x_2;...x_n;y_1;y_2;...;y_m) = 0$, $j = 1,2,...,m$, определяет единственную совокупность дифференцируемых неявных функций вида $y_j = f_j(x_1;x_2;...;x_n)$, $j = 1,2,...,m$.

Для того чтобы найти частные производные неявных функций, необходимо решить n систем линейных уравнений относительно

2) $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$;

3) $F'_x(x, y, z)$, $F'_y(x, y, z)$ и $F'_z(x, y, z)$ непрерывны в некоторой окрестности точки $(x_0; y_0; z_0)$.

Тогда в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) существует единственная непрерывная функция $z = f(x, y)$, удовлетворяющая уравнению $F(x, y, z) = 0$ и такая, что $f(x_0, y_0) = z_0$.

Если функция $F(x, y, z)$ в условиях теоремы 1 дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0, z_0), то функция $z = f(x, y)$ также дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0) и справедливы формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}$$

Если уравнение поверхности Ω задано неявной функцией $F(x, y, z) = 0$, то уравнение *касательной* плоскости α к поверхности имеет вид

$$F'_x\Big|_{(x_0, y_0, z_0)}(x - x_0) + F'_y\Big|_{(x_0, y_0, z_0)}(y - y_0) + F'_z\Big|_{(x_0, y_0, z_0)}(z - z_0) = 0$$

и каноническое уравнение *нормали*:

$$\frac{(x - x_0)}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{(y - y_0)}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{(z - z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

9.2 Неявные функции, задаваемые системой уравнений

Рассмотрим систему из m уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1; x_2; \ldots x_n; y_1; y_2; \ldots; y_m) = 0, \\ F_2(x_1; x_2; \ldots x_n; y_1; y_2; \ldots; y_m) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_m(x_1; x_2; \ldots x_n; y_1; y_2; \ldots; y_m) = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы относительно y_1, y_2, …, y_m есть

называется *квадратичной формой* от переменных x_1, x_2, …, x_n, числа a_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, называются *коэффициентами квадратичной формы*, матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей квадратичной формы*.

Если $a_{ij} = a_{ji}$ для $\forall i; j \quad i \neq j$, то квадратичная форма называется *симметричной*.

Главными минорами матрицы A называются определители:

$$\Delta_1 = a_{11}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Квадратичная форма $Q(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ называется:

– *положительно определенной* (*отрицательно определенной*), если для любых значений переменных x_1, x_2, …, x_n, одновременно не равных нулю, она принимает положительные (отрицательные) значения;

– *знакоопределенной*, если она является положительно определенной или отрицательно определенной;

– *квазизнакоопределенной*, если она принимает либо только неотрицательные, либо только неположительные значения, при этом обращается в нуль не только при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$;

– *знакопеременной*, если она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Теорема 2 (критерий Сильвестра) Для того, чтобы квадратичная форма $Q(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все ее главные миноры были положительны:

$$\Delta_1 = a_{11} > 0\,,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0\,,\ldots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0\,.$$

Для того чтобы квадратичная форма $Q(x_1;x_2;...;x_n)$ была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноров ее матрицы чередовались следующим образом:

$$\Delta_1 < 0\,,\ \Delta_2 > 0\,,\ \Delta_3 < 0\,,\ \Delta_4 > 0\,,\ \ldots.$$

Для функции $f(x_1;x_2;...;x_n)$ второй дифференциал представляет собой квадратичную форму

$$d^2 f = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_m}dx_k dx_m$$

от переменных dx_1, dx_2, …, dx_n.

8.4 Достаточные условия локального экстремума функции многих переменных

Теорема 3 (достаточные условия существования локального экстремума) Пусть функция $f(x_1;x_2;...;x_n) = f(P)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $P_0(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$ и дважды дифференцируема в самой точке P_0, причем P_0 – стационарная точка. Тогда

1) если второй дифференциал $d^2f\big|_{P_0}$ является положительно определенной (отрицательно определенной) формой от переменных dx_1, dx_2, …, dx_n, то функция $f(P)$ имеет в точке P_0 локальный минимум (максимум);

2) если $d^2f\big|_{P_0}$ является знакопеременной квадратичной формой, то функция $f(P)$ в точке P_0 экстремума не имеет.

В случае $df\big|_{P_0}$ =0, а $d^2f\big|_{P_0}$ является квазизнакоопределенной квадратичной формой, то функция $f(P)$ может иметь в точке P_0

локальный экстремум, а может и не иметь.

В частности, для функции двух переменных $f(x;y)$ имеем теорему 4.

Теорема 4 (достаточные условия существования локального экстремума функции двух переменных) Пусть $P_0(x_0;y_0)$ стационарная точка, дважды дифференцируемой в окрестности $U(\delta;P_0)$ функции $f(x;y)$. И пусть

$$\Delta(P_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(P_0) & f''_{xy}(P_0) \\ f''_{xy}(P_0) & f''_{yy}(P_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Тогда точка $P_0(x_0;y_0)$ является:

1) точкой локального максимума, если $\Delta(P_0) > 0$ и $f''_{xx}(x_0,y_0) < 0$;

2) точкой локального минимума, если $\Delta(P_0) > 0$ и $f''_{xx}(x_0,y_0) > 0$;

3) если $\Delta(P_0) < 0$, то в стационарной точке P_0 локального экстремума нет,

4) $\Delta(P_0) = 0$, то локальный экстремум в стационарной точке P_0 может быть, а может и не быть.

В случае $\Delta(P_0) = 0$ необходимо провести дополнительные исследования знака функции $f(x,y)$ в $U(\delta;P_0)$.

Тема 9 Дифференцирование неявной функции

9.1 Неявные функции, задаваемые одним уравнением
9.2 Неявные функции, задаваемые системой уравнений
9.3 Якобиан системы функций
9.4 Зависимость функций

9.1 Неявные функции, задаваемые одним уравнением

Рассмотрим уравнение $F(x,y,z) = 0$.

Теорема 1 Пусть функция $F(x,y,z)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\exists\ (x_0;y_0;z_0) : F(x_0,y_0,z_0) = 0$;