а) $f(x)=\begin{cases}\sin x \text{ при } |x|<\pi,\\ 0 \text{ при } |x|\ge\pi,\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}1+x \text{ при } -1<x\le 0,\\ 1-x \text{ при } 0<x\le 1,\\ 0 \text{ при } |x|\ge 1.\end{cases}$

Примеры оформления решения

1 Используя интегралы Эйлера, вычислить $\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$.

Решение. Имеем

$$\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\left[\begin{array}{l} x=2\sqrt{t},\, t>0,\\ dx=\dfrac{dt}{\sqrt{t}},\\ x=0\Rightarrow t=0,\\ x=2\Rightarrow t=1\end{array}\right]=\int\limits_0^1 4t\cdot\frac{\sqrt{4-4t}}{\sqrt{t}}\,dt=$$

$$=8\int\limits_0^1 t^{\frac12}\cdot(1-t)^{\frac12}\,dt=8\cdot\mathrm{B}\left(\frac32;\frac32\right)=8\cdot\frac{\Gamma(3/2)\cdot\Gamma(3/2)}{\Gamma(3)}=$$

$$=8\cdot\frac{\Gamma\left(1+\frac12\right)\cdot\Gamma\left(1+\frac12\right)}{\Gamma(3)}=8\cdot\frac{\frac{1\cdot\sqrt{\pi}}{2^1}\cdot\frac{1\cdot\sqrt{\pi}}{2^1}}{2!}=\pi.$$

2 Найти косинус- и синус- преобразования Фурье функции $f(x)=e^{-x}$, $x\ge 0$, и обратные к ним.

Решение. Функция $f(x)=e^{-x}$, $x\ge 0$, – гладкая и абсолютно интегрируемая на интервале $[0;\infty)$. Следовательно, для нее существуют косинус- и синус- преобразования Фурье:

$$F_c(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-t}\cos yt\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{B\to\infty}\left(e^{-t}\cos yt\Big|_0^B-u\int\limits_0^B e^{-t}\sin yt\,dt\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{B\to\infty}\left(e^{-B}\cos yB+1-u\left(-e^{-t}\sin yt\Big|_0^B+u\int\limits_0^B e^{-t}\cos yt\,dt\right)\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1-y^2\int\limits_0^\infty e^{-t}\cos yt\,dt\right).$$

Отсюда $F_c(y)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{1+y^2}$.

Аналогично получим

$$F_s(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-t}\sin yt dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{y^2+1}.$$

Обратные косинус- и синус -преобразования Фурье равны:

$$e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos yx}{y^2+1}dy, \qquad e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{y\sin yx}{y^2+1}dy.$$

Литература

Основная

1 Демидович, В. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / В. П. Демидович. – М. : Наука, 1977.

2 Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа : учебник для вузов / Л. Д. Кудрявцев.– М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.

3 Кудрявцев, Л. Д. Сборник задач по математическому анализу : учебное пособие для вузов: в 3 ч. Ч. 3. Функции нескольких переменных/ Л. Д. Кудрявцев, [и др.]. – Санкт-Петербург, 1994.

4 Математический анализ в вопросах и задачах. Функции нескольких переменнных : учебное пособие для вузов / под ред. В. Ф. Бутузова. – М. : Высш. шк., 1988.

5 Тер-Крикоров, А. М. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин – М. : Наука Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1988.

Дополнительная

1 Богданов, Ю. С. Лекции по математическому анализу: учебное пособие для вузов. В 2-х ч. / Ю. С. Богданов. – Мн., 1974.

2 Богданов, Ю. С. Математический анализ: учебное пособие для вузов / Ю. С. Богданов, О. А. Кастрица, Ю. Б. Сыроид. – М., 2003.

3 Ильин, В. А. Математический анализ: учебное пособие для вузов: в 2 ч. / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. – М., 1985.

4 Никольский, С. М. Курс математического анализа: учебник для вузов: в 2 т. Т. 2. / С. М. Никольский. – М. : Наука, 1983.

5 Виноградова, И. А. Математический анализ в задачах и упражнениях / И. А. Виноградова, [и др.]. – М. : Из-во Московскго университета, 1991.

Тестовые задания для рубежного контроля

Тест 1 Предел и непрерывность функции многих переменных

Вариант 1

1 Расстояние между точками в пространстве $\mathbb{R}^n$ определяется равенством: ________________________.

2 Окрестностью точки $(1;1)$ является множество:

а) $(1;2)\times(1;1)$; б) $[0;2]\times[0;2]$; в) $(0;2)\times(0;2)$.

3 Всякая ли непрерывная функция на $[a;b]$ является ограниченной на нем? _______________.

4 Является ли непрерывной в точке $(0;0)$ функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{при } x^2+y^2\neq 0,\\ 0 & \text{при } x^2+y^2=0?\end{cases}$$ _______________.

5 Является ли ограниченной функция $f(x;y)=\dfrac{x^2}{x^2+y}$ в области определения? ____________________.

6 Предел последовательности $\left(\dfrac{\sin n}{n};\dfrac{n}{2^n};\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ равен:

а) $(1;1;0)$, б) $(0;0;0)$, в) $(1;0;0)$.

7 Предел $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$ равен:

а) 0, б) ∞, в) 1.

8 Повторный предел $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\pi x+y^2}$ равен:

а) 1, б) π, в) $\dfrac{2}{\pi}$.

9 Областью определения функции $f(x;y)=\dfrac{1}{\sin xy}$ является:

а) $\mathbb{R}^2\setminus\{(0;0)\}$, б) $\mathbb{R}^2\setminus\{\ (x;y)\mid\ x=\pi n,\ y=\pi n,\ n\in\mathbb{N}\ \}$,

в) $\mathbb{R}^2\setminus\{\ (x;y)\mid\ xy=\pi n,\ n\in\mathbb{N}\ \}$.

10 Является ли функция $f(x;y) = \sin xy$ равномерно непрерывной на отрезке [0.1]? _________________.

Вариант 2

1 Длина вектора в пространстве $\mathbb{R}^n$ определяется равенством: _________________________.

2 Окрестностью точки $(-1;1)$ является множество:

а) $(-1;2)\times(-1;1)$; б) $[-2;0]\times[-2;0]$; в) $(-2;0)\times(-2;0)$.

3 Всякая ли ограниченная функция является непрерывной? _______________.

4 Является ли непрерывной в точке $(0;0)$ функция $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2} & \text{при } x^2+y^2<1, \\ 0 & \text{при } x^2+y^2 \geq 1? \end{cases}$ ________________.

5 Является ли ограниченной функция $f(x;y) = \arccos xy$ в области определения? ____________________.

6 Предел последовательности $\left(\dfrac{(-1)^n - n}{n^2}; \dfrac{n}{3^n}; \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ равен:

а) $(0;0;0)$, б) $(1;1;0)$, в) $(1;0;0)$.

7 Предел $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \dfrac{x^2+y^2}{x^4-x^3y+y^2}$ равен:

а) ∞, б) 0, в) 1.

8 Повторный предел $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin \pi x}{2x+y^2}$ равен:

а) 1, б) $\dfrac{\pi}{2}$, в) $\dfrac{2}{\pi}$.

9 Областью определения функции $f(x;y) = \dfrac{1}{\sin(x+y)}$ является:

а) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$, б) $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x;y) \mid x+y = \dfrac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbb{N}\right\}$,

в) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x;y) \mid x+y = \pi n,\ n\in\mathbb{N}\}$.

– в результате игры каждый студент получает оценку, состоящую из баллов, полученных за составленное задание, за работу в паре, четверке, восьмерке.

Деловая игра «Карусель» по теме «Интеграл Фурье»

Цель:

– сочетать работу в парах;

– усвоить теоретический материал.

Количество участников: до 30 человек.

Время проведения: 45 минут

Проведение:

Шаг 1 Преподаватель предлагает студентам самостоятельно изучить тему «Интеграл Фурье», подробно разобрать доказательства свойств интеграла Фурье, воспользовавшись литературой, приведенной в списке литературы данного пособия.

Шаг 2 По просьбе педагога студенты случайным образом разбиваются на 2 группы. Студенты садятся друг напротив друга, образуя 2 круга – внешний и внутренний. Таким образом у каждого студента есть партнер для общения.

Шаг 3 Преподаватель формулирует одно из свойств интеграла Фурье, предлагает студентам в течение нескольких минут доказать его друг другу.

Шаг 4 Студенты внешнего круга перемещаются на один стул по ходу часовой стрелки и образуют новые пары, в которых снова проводится доказательство того же свойства.

Шаг 5 Студенты внутреннего круга перемечаются на один стул против часовой стрелки. Вновь образуются новые пары. Итак далее несколько раз.

Шаг 6 Предлагается для доказательства следующее свойство интеграла Фурье с последующим выполнение шагов 3, 4, 5.

Шаг 7 После рассмотрения всех свойств интеграла Фурье, преподаватель делит студентов на несколько групп, предлагает каждой группе сформулировать и записать доказательство отдельных свойств (заранее выбранных преподавателем), проводит оценивание записанных доказательств.

Деловые игры

Деловая игра «$1\times2\times4\times8$» по теме «Приложения двойных интегралов»

Ц е л ь :

– совместить индивидуальную и групповую работу;

– развить умение принимать групповое решение;

– выработать навыки использования двойных интегралов при решении геометрических и физических задач.

К о л и ч е с т в о у ч а с т н и к о в : до 24 человек.

П р о в е д е н и е :

Шаг 1 Преподаватель заранее предлагает студентам подобрать и решить по 5 задач.

Шаг 2 По просьбе педагога студенты случайным образом разбиваются на 2 группы, в рамках каждой группы рассчитываются на первый-двенадцатый и объединяются в пары: «первый» номер из 1-ой группы с «первым» из 2-ой группы, «второй» номер из 1-ой группы со «вторым» из 2-ой группы и так далее. Студенты в парах обмениваются заданиями и решают. Затем они сверяют полученные решения с готовыми ответами и выставляют друг другу оценки.

Шаг 3 Из имеющихся заданий каждая пара составляет новое задание из 5 задач и обменивается ими с другой случайным образом выбранной парой. Сверяя полученные решения с правильными ответами, каждая пара оценивает соответствующую ей пару.

Шаг 4 Завершив работу по парам, студенты объединяются в «четверки», чтобы выработать новое задание и продолжить процесс дальше.

Шаг 5 На данном этапе «четверки» объединяются в «восьмерки» (всего три группы). Преподаватель предлагает каждой группе по одной новой задаче. В результате обсуждения студенты должны выработать решение. Затем педагог предоставляет слово каждой группе с целью презентации полученного результата.

П р и м е ч а н и е :

– преподавателю необходимо четко определить количество времени для проведения каждого этапа;

– желательно контролировать каждый этап;

– задания не должны быть сложными, чтобы студенты могли в течении отведенного времени их решить;

– работу можно остановить на этапе «четверок», если процесс решения задач занимает много времени;

10 Является ли функция $f(x;y)=\dfrac{x^3}{x^2+y}$ равномерно непрерывной на отрезке [0.1]? _________________.

Тест 2 Дифференцирование функции многих переменных

Вариант 1

1 Условие дифференцируемости функции $f(x_1;x_2;...;x_n)$ в точке $(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$ имеет вид ________________________.

2 Всякая ли дифференцируемая функция в точке непрерывна этой точке?

3 Частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ функции $f(x;y)$, где $x=x(u;v)$, $y=y(u;v)$, находятся по формулам: ______________?

4 Функция Лагранжа для существования условного экстремума функции $f(x;y)$ удовлетворяет условиям:

а) $\dfrac{\partial L}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial L}{\partial y}=0$, $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=1$;

б) $\dfrac{\partial L}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial L}{\partial y}=0$, $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=0$;

в) $\dfrac{\partial L}{\partial x}=1$, $\dfrac{\partial L}{\partial y}=1$, $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=1$.

5 Частные производные 1-го порядка функции $f(x;y)=x^y$ равны:

а) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=y\cdot x^{y-1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^y\ln x$;

б) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=x^y\ln y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=y\,x^{y-1}$;

в) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=y\cdot x^{y-1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^y$.

6 Дифференциал 1-го порядка функции $f(x;y)=\operatorname{arcctg}\dfrac{y}{x}$ равен:

а) $df=\dfrac{ydy-xdx}{x^2+y^2}$; б) $df=\dfrac{ydy+xdx}{x^2+y^2}$; в) $df=\dfrac{ydy-xdx}{x^2-y^2}$.

7 Дифференциал 2-го порядка функции $f(x;y)=x^2y^3$ равен ________________.

8 Уравнение касательной плоскости к графику функции $x^2+y^2-z^2=0$ в точке $A(3;4;5)$ имеет вид:

а) $-3x+4y-5z=0$; б) $3x+4y-5z=0$; в) $3x+4y+5z=0$.

9 Минимальное значение функции $f(x;y)=x^2+xy+y^2-13x-11y+7$ равно ________.

10 Значение выражения $(1{,}02)^3(0{,}97)^2$ приближенно равно ______________.

Вариант 2

1 По определению частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ функции $f(x_1;x_2;...;x_n)$ в точке $(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$ равна ______________________.

2 Всякая ли непрерывная функция в точке дифференцируема этой точке?

3 Частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ неявной функции $F(x;y;z)=0$ находятся по формулам: ______________?

4 Формула Тейлора для функция $f(x;y)$ имеет вид:

а) $f(x,y)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)+...+\frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(\xi,\eta)$;

б) $f(x,y)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)+...+\frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x,y)$;

в) $f(x,y)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)+...+\frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0)+\frac{1}{n!}d^nf(\xi,\eta)$.

5 Частные производные 1-го порядка функции $f(x;y)=\sin xy$ равны:

а) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-y\cdot\sin xy$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-x\sin xy$;

б) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=x\cdot\cos xy$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x\cos xy$;

в) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=y\cdot\cos xy$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x\cos xy$.

4.25 D: $x=1, y=0, y^2=4x(y\geq 0)$, $\rho=6x+3y^2$.

4.26 D: $x^2+y^2=4, x^2+y^2=16$, $x=0, y=0(x\geq 0, y\leq 0)$, $\rho=(3x-y)/(x^2+y^2)$.

4.27 D: $x=2, y=0, y^2=x/2$, $\rho=4x+6y^2$.

4.28 D: $x^2+y^2=4, x^2+y^2=9$, $x=0, y=0(x\leq 0, y\geq 0)$, $\rho=(y-4x)/(x^2+y^2)$.

4.29 D: $x=1/2, y=0, y^2=2x(y\geq 0)$, $\rho=4x+9y^2$.

4.30 D: $x^2+y^2=4, x^2+y^2=9$, $x=0, y=0(x\leq 0, y\geq 0)$, $\rho=-2x/(x^2+y^2)$.

$\rho = (x+y)/(x^2+y^2)$.

4.7 D: $x=2, y=0, y^2 = x/2 (y \ge 0)$, $\rho = 7x^2/2 + 6y$.

4.8 D: $x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 25$, $x=0, y=0, (x \ge 0, y \le 0)$,
$\rho = (2x-3y)/(x^2+y^2)$.

4.9 D: $x=1, y=0, y^2 = 4x (y \ge 0)$, $\rho = x + 3y$.

4.10 D: $x^2+y^2=1, x^2+y^2=9$, $x=0, y=0 (x \ge 0, y \le 0)$,
$\rho = (x-y)/(x^2+y^2)$.

4.11 D: $x=1, y=0, y^2 = x (y \ge 0)$, $\rho = 3x + 6y^2$.

4.12 D: $x^2+y^2=9, x^2+y^2=25$, $x=0, y=0 (x \le 0, y \ge 0)$,
$\rho = (2y-x)/(x^2+y^2)$.

4.13 D: $x=2$, $y=0$, $y^2 = x/2$, ($y \ge 0$), $\rho = 2x + 3y^2$.

4.14 D: $x^2+y^2=4, x^2+y^2=16$, $x=0, y=0 (x \le 0, y \ge 0)$,
$\rho = (2y-3x)/(x^2+y^2)$.

4.15 D: $x=1/2, y=0, y^2 = 8x (y \ge 0)$, $\rho = 7x + 3y^2$.

4.16 D: $x^2+y^2=9, x^2+y^2=16$, $x=0, y=0 (x \le 0, y \ge 0)$,
$\rho = (2y-5x)/(x^2+y^2)$.

4.17 D**:** $x=1, y=0, y^2=4x$, $\rho = 7x^2 + 2y$.

4.18 D: $x^2+y^2=1, x^2+y^2=16$, $x=0, y=0 (x \le 0, y \ge 0)$,
$\rho = (x+3y)/(x^2+y^2)$.

4.19 D: $x=2, y^2=2x, y=0 (y \ge 0)$, $\rho = 7x^2/4 + y/2$.

4.20 D: $x^2+y^2=1, x^2+y^2=4$, $x=0, y=0 (x \ge 0, y \ge 0)$,
$\rho = (x+2y)/(x^2+y^2)$.

4.21 D: $x=2, y=0, y^2=2x (y \ge 0)$, $\rho = 7x^2/4 + y$.

4.22 D: $x^2+y^2=1, x^2+y^2=9$, $x=0, y=0 (x \ge 0, y \le 0)$,
$\rho = (2x-y)/(x^2+y^2)$.

4.23 D: $x=2, y=0, y^2 = x/2 (y \ge 0)$, $\rho = 7x^2/2 + 8y$.

4.24 D: $x^2+y^2=1, x^2+y^2=25$, $x=0, y=0 (x \ge 0, y \le 0)$,
$\rho = (x-4y)/(x^2+y^2)$.

6 Дифференциал 1-го порядка функции $f(x;y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ равен:

а) $df = \dfrac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$; б) $df = \dfrac{ydy + xdx}{x^2+y^2}$; в) $df = \dfrac{ydy - xdx}{x^2-y^2}$.

7 Дифференциал 2-го порядка функции $f(x;y) = x^3y^2$ равен ___________________.

8 Уравнение касательной плоскости к графику функции $2x^2+3y^2+4z^2=9$ в точке $A(1;-1;1)$ имеет вид:

а) $2x-3y+4z+9=0$; б) $2x-3y+4z-9=0$; в) $2x-3y+4z=0$.

9 Минимальное значение функции $f(x;y) = x^2+y^2-2x+4y+1$ равно ________.

10 Значение выражения $(1,02)^{3,01}$ приближенно равно ______________.

Тест 3 Криволинейные интегралы

Вариант 1

1 По определению криволинейный интеграл 2-го рода равен:

а) $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim\limits_{\lambda\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k$,

б) $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k$,

в) $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k$.

2 Укажите верное равенство:

а) $\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(r(\varphi)\cos\varphi; r(\varphi)\sin\varphi)\cdot\sqrt{r(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi$,

б) $\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(r(\varphi)\cos\varphi; r(\varphi)\sin\varphi)\cdot\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi$,

в) $\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(r(\varphi)\cos\varphi; r(\varphi)\sin\varphi)\cdot\sqrt{1+r'^2(\varphi)}\,d\varphi$.

3 Если кривая AB лежит в плоскости, перпендикулярной оси Ox, то $\int\limits_{AB} P(x;y)dx$ равен ______________________.

4 Интеграл $\int\limits_{AB} y^2 dl$, где $AB=\left\{(x,y)\ \middle|\ x=2\cos t, y=2\sin t, 0\le t\le\frac{\pi}{2}\right\}$ равен:

а) 2π, б) π, в) 3π.

5 Интеграл $\int\limits_{AB} ydl$, где $AB=\{(x,y)\ |\ y^2=2x, 0\le x\le 2\}$, равен:

а) $\frac{1}{3}(5\sqrt{5}+1)$, б) $\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-1)$, в) $\frac{1}{2}(5\sqrt{2}-1)$.

6 Интеграл $\int\limits_{AB}(x^2+y)dx+xydy$, где $AB=\{(x,y)\ |\ y=x, 0\le x\le 1\}$ равен:

а) $\frac{7}{6}$, б) $\frac{7}{5}$, в) $\frac{7}{3}$.

7 Интеграл $\int\limits_{AB} xdx+xydy$, где $AB=\{(x,y)\ |\ x^2+y^2=1, x\ge 0, y\ge 0\}$ равен:

а) 1, б) $-\frac{1}{6}$, в) $\frac{1}{6}$.

8 Длина дуги $AB=\left\{(x,y,z)\ \middle|\ x=t, y=\frac{\sqrt{2}}{2}t^2, z=\frac{1}{3}t^3, 0\le t\le 1\right\}$ равна _______________________.

9 Работа, произведенная силой $\vec{F}=4x^6\vec{i}+xy\vec{j}$ вдоль дуги $AB=\{(x,y)\ |\ y=x^3, 0\le x\le 1\}$ равна ____________________.

10 Масса материальной дуги кривой $y=x^2+1$ между точками $A(0;1)$ и $B(1;2)$, если линейная плотность в каждой точке дуги прямо пропорциональна абсциссе этой точки, равна ____________.

Вариант 2

1 По определению криволинейный интеграл 1-го рода равен:

а) $\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta l_k$,

б) $\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta l_k$,

в) $\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(\xi_k,\eta_k)\Delta l_k$.

2 Укажите верное равенство:

3.13 $x^2+y^2+z^2=9$, $z=-1$, $z=2$.

3.14 $z=3-x^2-y^2$, $z=0$.

3.15 $x^2+y^2=25$, $x^2+z^2=25$.

3.16 $x^2+y^2+z^2=4$, $x=-1$, $x=0$.

3.17 $z=1-x^2-9y^2$, $z=0$.

3.18 $x^2+y^2=4$, $y^2+z^2=4$.

3.19 $x^2+y^2+z^2=4$, $y=0$, $y=1$.

3.20 $z=1-9x^2-y^2$, $z=0$.

3.21 $x^2+y^2=9$, $y^2+z^2=9$.

3.22 $z=1-16x^2-y^2$, $z=0$.

3.23 $x^2+y^2=16$, $y^2+z^2=16$.

3.24 $x^2+y^2+z^2=9$, $z=-2$, $z=0$.

3.25 $z=1-x^2-16y^2$, $z=0$.

3.26 $x^2+y^2=1$, $y^2+z^2=1$.

3.27 $x^2+y^2+z^2=9$, $y=0$, $y=2$.

3.28 $z=4-x^2-y^2$, $z=0$.

3.29 $x^2+y^2=25$, $y^2+z^2=25$.

3.30 $x^2+y^2+z^2=16$, $z=0$, $z=1$.

4 Найти массу, статические моменты, координаты центра тяжести, моменты инерции пластинки D, ограниченной кривыми с поверхностной плотностью ρ:

4.1 D: $x=1, y=0, y^2=4x\ (y\ge 0)$, $\rho=7x^2+y$.

4.2 D: $x^2+y^2=1, x^2+y^2=4,\ x=0, y=0,\ x\ge 0, y\ge 0$,
$\rho=(x+y)/(x^2+y^2)$.

4.3 D: $x=1, y=0, y^2=4x(y\ge 0)$, $\rho=7x^2/2+5y$.

4.4 D: $x^2+y^2=9, x^2+y^2=16$, $x=0, y=0(x\ge 0, y\ge 0)$,
$\rho=(2x+5y)/(x^2+y^2)$.

4.5 D: $x=2, y=0, y^2=2x(y\ge 0)$, $\rho=7x^2/8+2y$.

4.6 D: $x^2+y^2=1, x^2+y^2=16$, $x=0, y=0, (x\ge 0, y\ge 0)$,

2.23 части сферы $x^2+y^2+z^2=25$, заключенной внутри цилиндра $x^2+z^2=5z$.

2.24 части конуса $y=\sqrt{x^2+z^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+z^2=4$.

2.25 части сферы $x^2+y^2+z^2=4$, заключенной внутри конуса $x^2+y^2=z^2$.

2.26 части сферы $x^2+y^2+z^2=9$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=3x$.

2.27 части конуса $2z=\sqrt{x^2+y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=4$.

2.28 части сферы $x^2+y^2+z^2=36$, заключенной внутри конуса $y^2+z^2=x^2$.

2.29 части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, заключенной внутри цилиндра $x^2+z^2=z$.

2.30 части конуса $3z=\sqrt{x^2+y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=9$.

3 Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

3.1 $x^2+y^2=4$, $x^2+z^2=4$.

3.2 $x^2+y^2+z^2=4$, $z=-1$, $z=1$.

3.3 $z=1-x^2-4y^2$, $z=0$.

3.4 $x^2+y^2=9$, $x^2+z^2=9$.

3.5 $x^2+y^2+z^2=4$, $z=0$, $z=1$.

3.6 $z=1-x^2-y^2$, $z=0$.

3.7 $x^2+y^2=16$, $x^2+z^2=16$.

3.8 $x^2+y^2+z^2=9$, $z=1$, $z=2$.

3.9 $z=2-x^2-y^2$, $z=0$.

3.10 $x^2+y^2=1$, $x^2+z^2=1$.

3.11 $x^2+y^2+z^2=16$, $z=-2$, $z=2$.

3.12 $z=1-4x^2-y^2$, $z=0$.

а) $\int\limits_{AB} f(x;y)\,dl=\int\limits_a^b f(x;y(x))\cdot\sqrt{y^2(x)+y'^2(x)}\,dx$,

б) $\int\limits_{AB} f(x;y)\,dl=\int\limits_a^b f(x;y(x))\cdot\sqrt{1+y'(x)}\,dx$,

в) $\int\limits_{AB} f(x;y)\,dl=\int\limits_a^b f(x;y(x))\cdot\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$.

3 Изменяется ли знак криволинейного интеграла 2-го рода при изменении направления пути интегрирования? ________________

4 Интеграл $\int\limits_{AB} xy^2dl$, где $AB=\left\{(x,y)\ \middle|\ x=3\cos t, y=3\sin t, 0\le t\le\frac{\pi}{2}\right\}$ равен:

а) $\frac{27}{4}$, б) 27, в) 28.

5 Интеграл $\int\limits_{AB}\sqrt{1+x^2}\,dl$, где $AB=\{(x,y)\ |\ 2y-x^2=0,\ 0\le x\le 3\}$, равен:

а) $\frac{32}{5}$, б) $\frac{32}{3}$, в) 32.

6 Интеграл $\int\limits_{AB} x^3dx+x^2dy$, где $AB=\{(x,y)\ |\ y=x^2, 1\le x\le 3\}$ равен:

а) 50, б) 60, в) 55.

7 Интеграл $\int\limits_{AB} y^2dx+x^2dy$ по дуге AB, где $AB=\{(x,y)\ |\ x=t-\sin t, y-1-\cos t, 0\le t\le 2\pi\}$ равен:

а) $\pi(5-2\pi)$, б) $\pi(5+2\pi)$, в) $5-2\pi$.

8 Длина дуги $AB=\{(x,y,z)\ |\ x=\cos^3 t, y=\sin^3 t, z=\cos 2t,\ 0\le t\le 2\pi\}$ равна ______________________.

9 Работа, произведенная силой $\vec{F}=(x^2+y)\vec{i}+(x+y^2)\vec{j}$ вдоль дуги $AB=\{(x,y)\ |\ y=x, -1\le x\le 0\}$ равна ___________________.

10 Масса материальной дуги кривой $3y=x^3$ между точками $A(0;0)$ и $B\left(1;\frac{1}{3}\right)$, если линейная плотность в каждой точке дуги прямо пропорциональна кубу абсциссы этой точки, равна _________________.

Тест 4 Двойной интеграл

Вариант 1

1 Укажите верную формулу

а) $\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$;

б) $\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dy \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dx$;

в) $\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b f(x,y)dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy$.

2 Полярные координаты имеют вид:

а) $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $-\infty < r < +\infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$;

б) $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$;

в) $x = r\sin\varphi$, $y = r\cos\varphi$, $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

3 Укажите верное равенство

a) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{4}^{x^2} f(x,y)dy = \int\limits_0^4 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{y} f(x.y)dx$;

b) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} f(x,y)dy = \int\limits_0^4 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x.y)dx$;

c) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{4}^{x^2} f(x,y)dy = \int\limits_0^4 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x.y)dx$.

4 Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_1^6 dx \int\limits_{6/x}^{7-x} f(x,y)dy$:

а) $\int\limits_1^6 dy \int\limits_{6/y}^{7-y} f(x,y)dx$; б) $\int\limits_{y/6}^{7-x} dy \int\limits_1^6 f(x,y)dx$; в) $\int\limits_{6/y}^{7-x} dy \int\limits_1^6 f(x,y)dx$.

5 Двойной интеграл $\iint\limits_D \frac{x}{y^2}dxdy$ по прямоугольнику $D = \{(x,y) \mid 1 \le x \le 2,\ 4 \le y \le 6\}$ равен:

а) 0,125; б) 0,115; в) 0,135.

2.9 части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, заключенной внутри конуса $x^2 + y^2 = z^2$.

2.10 части конуса $x = \sqrt{y^2 + z^2}$, заключенной внутри цилиндра $y^2 + z^2 = 1$.

2.11 части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = y$.

2.12 части конуса $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + z^2 = 4$.

2.13 части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, заключенной внутри конуса $x^2 + z^2 = y^2$.

2.14 части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$.

2.15 части конуса $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + z^2 = 9$.

2.16 части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, заключенной внутри конуса $x^2 + y^2 = z^2$.

2.17 части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 4x$.

2.18 части конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 16$.

2.19 части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, заключенной внутри конуса $y^2 + z^2 = x^2$.

2.20 части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + z^2 = 2z$.

2.21 части конуса $x = \sqrt{y^2 + z^2}$, заключенной внутри цилиндра $y^2 + z^2 = 1$.

2.22 части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, заключенной внутри конуса $x^2 + z^2 = y^2$.

1.26 а) $y=\frac{3}{2}\sqrt{x}, y=\frac{3}{2x}, x=4$;

б) $x^2-4x+y^2=0, x^2-8x+y^2=0, y=x/2, y=2x.$

1.27 а) $y=\sin x, y=\cos x, x=0 (x\le 0)$;

б) $y^2-4y+x^2=0, y^2-8y+x^2=0, y=3x, x=0.$

1.28 а) $y=\frac{1}{x}, y=6e^x, y=1, y=6$;

б) $x^2-4x+y^2=0, x^2-6x+y^2=0, y=x/4, y=4x.$

1.29 а) $y=3\sqrt{x}, y=3/x, x=9$;

б) $y^2-2y+x^2=0, y^2-10y+x^2=0, y=x/2, x=0.$

1.30 а) $y=11-x^2, y=-10x$;

б) $x^2-6x+y^2=0, x^2-10x+y^2=0, y=x/3, y=3x.$

2 Найти площади:

2.1 части сферы $x^2+y^2+z^2=4$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=2y$.

2.2 части сферы $x^2+y^2+z^2=9$, заключенной внутри конуса $x^2+y^2=z^2$.

2.3 части конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=1$.

2.4 части сферы $x^2+y^2+z^2=9$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=3y$.

2.5 части конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=2$.

2.6 части сферы $x^2+y^2+z^2=4$, заключенной внутри конуса $x^2+y^2=z^2$.

2.7 части сферы $x^2+y^2+z^2=16$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=4y$.

2.8 части конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=4$.

6 Двойной интеграл $\iint\limits_G (x+2y)dxdy$ по области G, ограниченной прямыми $y=4x+6$, $y=\frac{1}{2}x-1$, $x=-1$ равен:

а) $-4\frac{1}{10}$; б) $-4\frac{1}{12}$; в) $-4\frac{1}{14}$.

7 Двойной интеграл $\iint\limits_{x^2+y^2\le 4} \sqrt{x^2+y^2}dxdy$ равен:

а) 12π; б) 6π; в) $\frac{16\pi}{3}$.

8 Объем тела, ограниченного поверхностями $x+2y-z=0$, $x-2y-2=0$, $x=-1$, $x=3$, $z=0$ равен: ____________________.

9 Масса плоской пластинки ограниченной линиями $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=16$ ($x\ge 0$, $y\ge 0$) с плотностью $\rho(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ равна: _________________.

10 Площадь фигуры, ограниченная линиями $(x^2+y^2)^2=8(x^2-y^2)$, $x^2+y^2=4$ равна _____________________.

Вариант 2

1 Укажите верную формулу

а) $\iint\limits_G f(x,y)dxdy=\iint\limits_{G^*} f(x(u,v),y(u,v))\,J\,dudv$;

б) $\iint\limits_G f(x,y)dxdy=\iint\limits_{G} f(x(u,v),y(u,v))|J|dudv$;

в) $\iint\limits_G f(x,y)dxdy=\iint\limits_{G^*} f(x(u,v),y(u,v))|J|dudv$.

2 Якобиан перехода от декартовых координат к полярным равен:

а) $J=r^2$; б) $J=r$; в) $J=r\sin\varphi$.

3 Укажите верное равенство

а) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^{3/2}}^{2-x^2} f(x,y)dy=\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-y^{2/3}}^{y^{2/3}} f(x.y)dx+\int\limits_1^2 dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$;

b) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^{3/2}}^{2-x^2} f(x,y)dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-y^{2/3}}^{y^{2/3}} f(x.y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$;

c) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{x^{2/3}}^{2-x^2} f(x,y)dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-y^{2/3}}^{y^{2/3}} f(x.y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$.

4 Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_1^c dx \int\limits_0^{\ln x} f(x,y)dy$:

а) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_e^{e^y} f(x,y)dx$; б) $\int\limits_0^{\ln x} dy \int\limits_e^{e^y} f(x,y)dx$; в) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{e^y}^{e} f(x,y)dx$.

5 Двойной интеграл $\iint\limits_D x\, y^2\, dxdy$ по прямоугольнику $D = \left\{ (x,y) \;\middle|\; 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \right\}$ равен:

а) 1,5; б) 0,5; в) 1/3.

6 Двойной интеграл $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$ по области G, ограниченной прямыми $y = x$, $y = 0$, $y = 1$, $y = 2$ равен:

а) 5; б) 7; в) 3.

7 Двойной интеграл $\iint\limits_{x^2+y^2\le 16} \frac{dxdy}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$ равен:

а) 2π; б) 4π; в) π.

8 Объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=8$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=4$ равен: ____________________.

9 Масса плоской пластинки ограниченной линиями $x+y=1$, $x+y=2$, $2x-y=0$, $4x-y=0$ с плотностью $\rho(x,y)=(x+y)^2$ равна: _________________.

10 Площадь фигуры, ограниченной линией $(x^2+y^2)^2 = 3(x^3-3xy^2)$ равна _____________________.

1.12 а) $y=\sin x, y=\cos x, x=0 (x\ge 0)$;

б) $x^2-2x+y^2=0, x^2-8x+y^2=0, y=x/3, y=3x$.

1.13 а) $y=20-x^2, y=-8x$;

б) $x^2-2x+y^2=0, x^2-6x+y^2=0, y=x/4, y=4x$.

1.14 а) $y=\sqrt{18-x^2}, y=3\sqrt{2}-\sqrt{18-x^2}$;

б) $y^2-2y+x^2=0, y^2-4y+x^2=0, y=3x, x=0$.

1.15 а) $y=32-x^2, y=-4x$;

б) $y^2-2y+x^2=0, y^2-6y+x^2=0, y=x/4, x=0$.

1.16 а) $y=2/x, y=5e^x, y=2, y=5$;

б) $x^2-2x+y^2=0, x^2-4x+y^2=0, y=0, y=x/3$.

1.17 а) $x^2+y^2=36, 3\sqrt{2y}=x^2 (y\ge 0)$;

б) $y^2-2y+x^2=0, y^2-10y+x^2=0, y=x/2, y=2x$.

1.18 а) $y=3\sqrt{x}, y=3/x, x=4$;

б) $x^2-2x+y^2=0, x^2-6x+y^2=0, y=0, y=x/2$.

1.19 а) $y=6-\sqrt{36-x^2}, y=\sqrt{36-x^2}, x=0 (x\ge 0)$;

б) $y^2-2y+x^2=0, y^2-10y+x^2=0, y=x/5, y=5x$.

1.20 а) $y=25/-x^2, y=x-5/2$;

б) $x^2-2x+y^2=0, x^2-6x+y^2=0, y=0, y=x$.

1.21 а) $y=\sqrt{x}, y=1/x, x=16$;

б) $y^2-2y+x^2=0, y^2-4y+x^2=0, y=x, x=0$.

1.22 а) $y=2/x, y=7e^x, y=2, y=7$;

б) $x^2-2x+y^2=0, x^2-4x+y^2=0, y=0, y=4x$.

1.23 а) $x=27-y^2, x=-6y$;

б) $x^2-4x+y^2=0, x^2-8x+y^2=0, y=0, y=2x$.

1.24 а) $\sqrt{72-y^2}, 6x=y^2, y=0 (y\ge 0)$;

б) $y^2-6y+x^2=0, y^2-8y+x^2=0, y=x, x=0$.

1.25 а) $y=\sqrt{6-x^2}, y=\sqrt{6}-\sqrt{6-x^2}$;

б) $y^2-4y+x^2=0, y^2-8y+x^2=0, y=x, x=0$.

Индивидуальные домашние задания по теме «Приложения двойных интегралов»

1 Найти площади фигур, ограниченных линиями:

1.1 а) $y = 3/x, y = 4e^x, y = 3, y = 4$;

б) $y^2 - 2y + x^2 = 0,\ y^2 - 4y + x^2 = 0,\ y = x/\sqrt{3},\ y = \sqrt{3}x$.

1.2 а) $x = \sqrt{36 - y^2}, x = 6 - \sqrt{36 - y^2}$;

б) $x^2 - 4x + y^2 = 0, x^2 - 8x + y^2 = 0, y = 0, y = x/\sqrt{3}$.

1.3 а) $x^2 + y^2 = 72, 6y = -x^2 (y \le 0)$;

б) $y^2 - 6y + x^2 = 0, y^2 - 8y + x^2 = 0, y = x/\sqrt{2}, y = \sqrt{2}x$.

1.4 а) $x = 8 - y^2, x = -2y$;

б) $x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 8x + y^2 = 0, y = 0, y = x$.

1.5 а) $y = \frac{3}{x}, y = 8e^x, y = 3, y = 8$;

б) $y^2 - 8y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0, y = \frac{x}{2}, y = 2x$.

1.6 а) $y = \frac{\sqrt{x}}{2}, y = \frac{1}{2x}, x = 16$;

б) $x^2 - 4x + y^2 = 0, x^2 - 8x + y^2 = 0, y = 0, y = x$.

1.7 а) $x = 5 - y^2, x = -4y$;

б) $y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0, y = x, x = 0$.

1.8 а) $x^2 + y^2 = 12, -\sqrt{6y} = x^2 (y \le 0)$;

б) $x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 10x + y^2 = 0, y = x, y = 2x$.

1.9 а) $y = \sqrt{12 - x^2}, y = 2\sqrt{3} - \sqrt{12 - x^2}, x = 0 (x \ge 0)$;

б) $y^2 - 6y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0, y = x, x = 0$.

1.10 а) $y = \frac{3}{2}\sqrt{x}, y = \frac{3}{2x}, x = 9$;

б) $x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 4x + y^2 = 0, y = x/5, y = 5x$.

1.11 а) $y = \sqrt{24 - x^2}, 2\sqrt{3y} = x^2, x = 0 (x \ge 0)$;

б) $y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0, y = 2x, x = 0$.

Тест 5 Тройной интеграл

Вариант 1

1 Укажите верную формулу

а) $\iiint\limits_Q f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$;

б) $\iiint\limits_Q f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dz \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dy$;

в) $\iiint\limits_Q f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b f(x,y,z)\,dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz$.

2 Сферические координаты имеют вид:

а) $x = r\cos\theta\sin\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\varphi$, $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$;

б) $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$;

в) $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $-\infty < r < +\infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$.

3 Укажите верное равенство

а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{x+y} f(x,y,z)dz = \int\limits_0^1 dy \left\{ \int\limits_0^y dz \int\limits_0^{1-z} f(x,y,z)dx + \int\limits_x^1 dz \int\limits_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)dx \right\}$;

б) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{x+y} f(x,y,z)dz = \int\limits_0^1 dz \left\{ \int\limits_0^z dy \int\limits_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)dx + \int\limits_x^1 dy \int\limits_0^{1-y} f(x,y,z)dx \right\}$;

в) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{x+y} f(x,y,z)dz = \int\limits_0^1 dy \left\{ \int\limits_0^y dz \int\limits_0^{1-z} f(x,y,z)dx + \int\limits_x^1 dz \int\limits_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)dx \right\}$.

4 Повторный интеграл $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} (x+y+z)dz$ равен:

а) 0,125; б) 0,15; в) 0,25.

5 Тройной интеграл $\iiint\limits_Q (6x + 8y + 4z + 5)\,dxdydz$ по кубу $Q = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$ равен:

а) 10; б) 14; в) 15.

6 Объем тела, ограниченного поверхностями $2y + 3z = 6$, $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$, $z = 0$, равен ______________________.

7 Тройной интеграл $\iiint\limits_Q (x^2+y^2+z^2)dxdydz$ по области, ограниченной поверхностями $y^2+z^2=4$, $x=0$, $x=2$, равен:

а) $\frac{40\pi}{3}$; б) $\frac{80\pi}{9}$; в) $\frac{80\pi}{3}$.

8 Тройной интеграл $\iiint\limits_Q \sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}dxdydz$ по области, ограниченной поверхностью $x^2+y^2+z^2=9$, $z\ge 0$, равен:

а) $\frac{81\pi}{2}$; б) $\frac{27\pi}{2}$; в) 243π.

9 Масса тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=2$, с плотностью $\rho(x,y,z)=(x^2+y^2+z)^2$ равна _____________.

10 Тройной интеграл $\iiint\limits_Q \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2 dxdydz$ по области Q, ограниченной поверхностью $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ равен:

а) $\frac{4\pi abc}{7}$; б) $\frac{\pi abc}{4}$; в) $\frac{3\pi abc}{4}$.

Вариант 2

1 Укажите верную формулу

а) $\iiint\limits_Q f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{Q^*} f\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)|J|dudvdw$;

б) $\iiint\limits_Q f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{Q^*} f\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)dudvdw$;

в) $\iiint\limits_Q f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{Q^*} f\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)J\,dudvdw$.

2 Цилиндрические координаты имеют вид:

а) $x=r\sin\varphi$, $y=r\cos\varphi$, $z=r$, $0\le r<+\infty$, $0\le\varphi\le 2\pi$;

б) $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$, $-\infty<r<+\infty$, $0\le\varphi\le 2\pi$;

в) $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$, $0\le r<+\infty$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

3 Укажите верное равенство

а) $\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)dz=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{|y|}^{y}dx\int\limits_{-\sqrt{x^2-y^2}}^{\sqrt{x^2-y^2}}f(x,y,z)dz$;

32 Найти ротор векторного поля $\vec{a}=xyz\cdot\vec{i}+(2x+3y-z)\cdot\vec{j}+(x^2+y^2)\cdot\vec{k}$.

33 Найти $F'(y)$ для функции $F(y)=\int\limits_y^{y^2}e^{-yx^2}dx$.

34 Исследовать равномерную сходимость интеграла $F(y)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos yx}{1+x^2}dx$.

35 Найти синус-преобразование Фурье функции $f(x)=e^{-2x}$, $x\ge 0$.

22 Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma} \sin^2 x dx + y^2 dy$, где $\Gamma = \left\{ (x; y) \middle| y = \cos x,\ 0 \le x \le \pi \right\}$

23 Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma} ydx - xdy\, dl$, где

$$\Gamma = \left\{ (x; y) \middle|\ x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t, 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \right\}.$$

24 Используя формулу Грина, вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma} (1 - x^2) y dx + x(1 + y^2) dy$, где $\Gamma = \left\{ (x; y) \middle| x^2 + y^2 = 9 \right\}$.

25 Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) ds$ по поверхности $\Omega = \left\{ (x; y; z) \middle| z = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \right\}$.

26 Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Omega} (y^2 + z^2) dxdy$ по верхней стороне поверхности $\Omega = \left\{ (x; y; z) \middle| z = \sqrt{25 - x^2}, 0 \le y \le 4 \right\}$.

27 Используя формулу Остроградского-Гаусса, вычислить интеграл $\oint\limits_{\Omega^+} 4x^3 dydz + 4y^3 dxdz - 6z^4 dxdy$ по внешней стороне поверхности $\Omega = \left\{ (x; y; z) \,\middle|\, x^2 + y^2 = 25,\ 0 \le z \le 4 \right\}$.

28 Применяя формулу Стокса, вычислить интеграл $\oint\limits_{\Gamma} ydx + z^2 dy + x^2 dz$, где Γ – пересечение плоскостей $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и $z = \sqrt{3}$.

29 Вычислить производную по направлению функции $z = x^2 y - 3xy$ в направлении вектора от точки $O(0;0)$ к точке $A(2;1)$.

30 Найти градиент функции $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ в точке $A(2;-1;3)$.

31 Найти дивергенцию векторного поля $\vec{a} = xyz \cdot \vec{i} + (3x^2 + 3y^2) \cdot \vec{j} + (x + 2y - z) \cdot \vec{k}$.

б) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z) dz = \int\limits_{0}^{1} dz \int\limits_{-z}^{z} dy \int\limits_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z) dx$;

в) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z) dz = \int\limits_{0}^{1} dz \int\limits_{-1}^{z} dy \int\limits_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{1} f(x,y,z) dx$.

4 Повторный интеграл $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-1-x}^{0} dy \int\limits_{-1-x-y}^{0} \frac{dz}{(4x + 3y + z + 2)^5}$ равен:

а) 0; б) 10; в) 7.

5 Тройной интеграл $\iiint\limits_{Q} (7x - 5y + 3z + 1) dxdydz$ по параллелепипеду $Q = \left\{ (x, y, z) \,\middle|\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1 \right\}$ равен:

а) 156; б) 56; в) 140.

6 Объем тела, ограниченного поверхностями $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$, $z = 3$, $z = 0$, равен ______________________.

7 Тройной интеграл $\iiint\limits_{Q} (x^2 + y^2 + z^2)^3 dxdydz$ по области, ограниченной поверхностями $y^2 + z^2 = 1$, $y = 0$, $y = 1$, равен:

а) 431π; б) 422π; в) 420π.

8 Тройной интеграл $\iiint\limits_{Q} (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz$ по области, ограниченной поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, равен:

а) $\frac{972\pi}{7}$; б) $\frac{927\pi}{2}$; в) $\frac{972\pi}{5}$.

9 Масса тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $z = 4$ с плотностью $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$ равна _____________.

10 Тройной интеграл $\iiint\limits_{Q} \frac{dxdydz}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1}$ по области Q, ограниченной поверхностью $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $z \ge 0$, равен:

а) $\frac{4 - \pi}{4}$; б) $\frac{4 - \pi}{8} abc$; в) $\frac{2 - \pi}{2} abc$.

Тест 6 Поверхностный интеграл

Вариант 1

1 По определению поверхностный интеграл 1-го рода равен:

а) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dS = \lim\limits_{\lambda\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k$,

б) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dS = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k$,

в) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dS = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k$.

2 Укажите верное равенство:

а) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{G} f(x,y,z)\frac{1}{|F_z'|}\sqrt{F_x'^2+F_y'^2+F_z'^2}\,dxdy$,

б) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{G} f(x,y,z)\frac{1}{|F_x'|}\sqrt{F_x'^2+F_y'^2+F_z'^2}\,dxdy$,

в) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{G} f(x,y,z)\frac{1}{F_z'}\sqrt{F_x'^2+F_y'^2+F_z'^2}\,dxdy$.

3 Изменяется ли знак поверхностного интеграла 2-го рода при выборе ориентации поверхности? ________________

4 Интеграл $\iint\limits_{\Omega}(x-3y+2z)\,dS$, где поверхность $\Omega=\{(x,y,z)\ |\ 4x+3y+2z-4=0,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$ равен:

а) $\frac{\sqrt{29}}{9}$, б) $\frac{\sqrt{29}}{8}$, в) $\sqrt{29}$.

5 Площадь поверхности $z=x^2+y^2$, расположенной между плоскостями $z=0$ и $z=1$, равна:

а) $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-3)$, б) $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$, в) $\frac{\pi}{3}(5\sqrt{5}+1)$.

6 Интеграл $\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,dS$ по верхней половине сферы $x^2+y^2+z^2=25$ равен:

а) $\frac{25}{3}\pi$, б) $\frac{100}{3}\pi$, в) $\frac{95}{3}\pi$.

7 Интеграл $\iint\limits_{\Omega} xdydz+ydzdx+zdxdy$ по верхней стороне плоскости $x+z-1=0$, отсеченной плоскостями $y=0$ и $y=4$ равен:

13 Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2} f(x;y)\,dy$.

14 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{G}\sqrt{25-x^2-y^2}\,dxdy$, где $G=\{(x;y)\,|\,x^2+y^2\le 16\}$.

15 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{G}(x^2+y^2)\,dxdy$, где $G=\{(x;y)\,|\,x^2+y^2\le 16,\ x^2+y^2\ge 4\}$.

16 Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{Q}\frac{dxdydz}{(2x+y-3z)^2}$ по области $Q=\{(x;y;z)\ |\ x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0\}$.

17 Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{Q}(x^2+y^2+z^2)^2\,dxdydz$ по области $Q=\{(x;y;z)\ |\ x^2+y^2=4,\ z=0,\ z=4\}$, переходя к цилиндрическим координатам.

18 Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{Q}(x^2+y^2+z^2)^2\,dxdydz$ по области $Q=\{(x;y;z)\ |\ x^2+y^2+z^2\le 4\}$, переходя к сферическим координатам.

19 Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma} y\,dl$, где $\Gamma=\{(x;y)\,|\ y=2x,\ 1\le x\le 2\}$.

20 Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma}\left(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y}\right)dl$, где $\Gamma=\left\{(x;y)\,\middle|\ x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t,\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}\right\}$.

21 Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma}\sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где Γ нижняя половина кардиоиды $\rho=2(1+\cos\varphi)$.

Типовые задачи к экзамену

1 Найти область определения функции $z=\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$.

2 Построить линии уровня функции $z=4x^2+9y^2$.

3 Вычислить предел функции $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\dfrac{\sin 2xy}{y}$.

4 Вычислить повторные пределы $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{x^2+3y^2}{x^2+y^3}$ и $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3y^2}{x^2+y^3}$.

5 Найти частные производные функции 2-го порядка $z=y^2\cos(x+2y)$.

6 Найти полный дифференциал функции $z=2x^2y^4-2xy$ в точке $M(1;3)$.

7 Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ сложной функции $z=5u^2+uv^2$, где $u=x^3+\cos y$, $v=xy-\sin x$.

8 Найти уравнения касательной и нормали к поверхности Ω, заданной уравнением $x^2+4y^2+z^2-8z-4y+8=0$ в точке $M(3;1;-1)$.

9 Проверить, удовлетворяет ли уравнению $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ функция $u=\dfrac{y}{x}$.

10 Исследовать на локальный экстремум функцию $z=x^3+8y^3-6xy+5$.

11 Найти экстремум функции $z=x^2-y^2$ при условии, что переменные x и y связаны уравнением $y=2x-6$.

12 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=3x+y-xy$ в области $\bar{D}=\{(x;y)|y=x,\ y=4,\ x=0\}$.

а) 4, б) 3, в) 5.

8 Интеграл $\iint\limits_{\Omega} xdydz+(y+z)dzdx+(z-y)dxdy$, где Ω внешняя часть поверхности $z=x^2+y^2$, отсекаемая плоскостью $z=2$, равен:

а) π, б) 2π, в) 4π.

9 С помощью формулы Остроградского-Гаусса вычислить интеграл $\oiint\limits_{\Omega} xdydz+ydzdx+zdxdy$, где Ω – внешняя сторона пирамиды, ограниченной плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

10 С помощью формулы Стокса вычислить интеграл $\oint\limits_{\Gamma} x^2y^3dx+dy+zdz$, где $\Gamma=\{(x,y,z)\ |\ x^2+y^2=R^2,\ z=0\}$, используя в качестве поверхности верхнюю часть сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

__________________.

Вариант 2

1 По определению поверхностный интеграл 2-го рода равен:

а) $\iint\limits_{\Omega} P(x,y,z)dydz=\lim\limits_{\lambda\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}P(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)(\Omega_k)_{xy}$,

б) $\iint\limits_{\Omega} P(x,y,z)dydz=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}P(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)(\Omega_k)_{xy}$,

в) $\iint\limits_{\Omega} P(x,y,z)dydz=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}P(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)(\Omega_k)_{yz}$.

2 Укажите верное равенство:

а) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dS=\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$,

б) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dS=\iint\limits_{G} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_y'+z_y'}\,dxdy$,

в) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dS=\iint\limits_{G} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$.

3 Изменяется ли знак поверхностного интеграла 1-го рода при выборе ориентации поверхности? __________________

4 Интеграл $\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dS$, где поверхность $\Omega=\{(x,y,z)\ |\ z=1-x^2-y^2,\ z=0\}$ равен:

а) 3π , б) π , в) 4π .

5 Площадь поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, расположенной между плоскостями $z = 0$ и $z = 1$, равна:

а) $\pi\left(\sqrt{2}+1\right)$, б) $\pi\left(\sqrt{2}-1\right)$, в) $2\pi\left(\sqrt{2}+1\right)$.

6 Интеграл $\iint\limits_{\Omega}(3x^2+5y^2+3z^2-2)dS$ по поверхности $y=\sqrt{x^2+z^2}$, отсеченной плоскостью $y=1$, равен:

а) $\sqrt{2}\pi$, б) $3\sqrt{2}\pi$, в) $2\sqrt{2}\pi$.

7 Интеграл $\iint\limits_{\Omega}\left(5x^2+5y^2+3z^2\right)dxdy$ по верхней стороне поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, отсеченной плоскостями $z=0$ и $z=1$ равен:

а) -4π , б) -3π , в) 4π .

8 Интеграл $\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}\right)dxdy$, где Ω внешняя часть поверхности $z=4-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}$, отсекаемая плоскостью $z=0$, равен:

а) 90π , б) 96π , в) -96π .

9 С помощью формулы Остроградского-Гаусса вычислить $\iint\limits_{\Omega}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, где Ω – часть конической поверхности $x^2+y^2=z^2$, отсекаемая плоскостями $z=0$, $z=4$.

10 С помощью формулы Стокса вычислить интеграл $\oint\limits_{\Gamma}ydx+zdy+xdz$, где Γ – окружность, пробегаемая против часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox, $\Gamma=\left\{\left(x,y,z\right)\ \middle|\ x^2+y^2+z^2=a^2,\ x+y+z=0\right\}$.

57. Производная по направлению скалярного поля, градиент.

58 Определение векторного поля, векторные линии.

59 Дивергенция векторного поля.

60 Циркуляция векторного поля и ее физический смысл.

61 Ротор векторного поля.

62* Определение и непрерывность собственных интегралов, зависящих от параметра.

63* Дифференцирование и интегрирование собственных интегралов, зависящих от параметра.

64 Определение и сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра.

65* Признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

66* Признак Дирихле равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

67 Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра (непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость).

68. Определение и свойства гамма-функции.

69 Определение и свойства бета-функции.

70* Преобразование Фурье и его свойства.

25 Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода.
26 Задача о работе переменной силы.
27 Определение и свойства криволинейного интеграла 2-го рода.
28 Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода.
29* Связь между криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода.
30 Множества, измеримые по Жордану, критерий измеримости.
31 Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла.
32 Определение и свойства двойного интеграла.
33* Вычисление двойного интеграла (случай прямоугольной области).
34* Вычисление двойного интеграла (случай криволинейной области).
35* Формула Грина.
36* Условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования.
37* Замена переменных в двойном интеграле, полярные координаты.
38 Задача о массе пространственного тела.
39 Определение и свойства тройного интеграла.
40 Вычисление тройного интеграла.
41 Замена переменных в тройном интеграле, цилиндрические координаты.
42 Замена переменных в тройном интеграле, сферические координаты.
43 Способы задания поверхности, простые поверхности, особые точки поверхности.
44 Касательная и нормаль к поверхности.
45 Площадь поверхности
46 Ориентация поверхности, односторонние и двусторонние поверхности.
47 Задача о массе изогнутой пластины.
48 Определение и свойства поверхностного интеграла 1-го рода.
49 Вычисление поверхностного интеграла 1-го рода.
50 Задача о потоке жидкости.
51 Определение и свойства поверхностного интеграла 2-го рода.
52 Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода.
53 Связь между поверхностными интегралами 1-го и 2-го родов.
54* Формула Остроградского-Гаусса.
55* Формула Стокса.
56 Поверхности и линии уровня скалярного поля.

Тест 7 Элементы векторного анализа

Вариант 1

1 Линия, для которой в каждой ее точке M вектор $\vec{a}(M)$ направлен по касательной к данной линии, называется ________________.

2 Векторное поле $\vec{a}=\vec{a}(M)$ называется соленоидальным, если в любой точке M справедливо равенство ________________.

3 Укажите верную формулу:

а) $\operatorname{rot}\vec{a}=\left(\frac{\partial Z}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial X}{\partial z}+\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial X}{\partial y}\right)\vec{k}$;

б) $\operatorname{rot}\vec{a}=\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\vec{k}$;

в) $\operatorname{rot}\vec{a}=\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\vec{k}$.

4 Выбрать верное утверждение:

а) для того чтобы векторное поле $\vec{a}(M)$ было потенциальным в односвязной области Q, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{grad}\vec{a}(M)=0$;

б) для того чтобы векторное поле $\vec{a}(M)$ было потенциальным в односвязной области Q, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{div}\vec{a}(M)=0$;

в) для того чтобы векторное поле $\vec{a}(M)$ было потенциальным в односвязной области Q, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rot}\vec{a}(M)=0$;

5 Линии уровня скалярного поля $U=x^2+y^2$ имеют вид ________________.

6 Поверхности уровня скалярного поля $U=x+y+z$ имеют вид ________________.

7 Производная функции $f=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ в точке $P=(1,1,1)$ по направлению вектора $\vec{l}=(2,1,0)$ равна:

а) 1; б) $\frac{\sqrt{15}}{5}$; в) $\frac{\sqrt{14}}{5}$.

8 Градиент скалярного поля $U = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - xz + yz - xy$ в точке $P(1;-1;1)$ равен:

а) $2\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$; б) $2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$; 4 в) $2\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}$.

9 Циркуляция векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j}$ вдоль замкнутой линии Γ, образованной осями координат и частью астроиды $\vec{r} = R\cos^3 t\,\vec{i} + R\sin^3 t\,\vec{j}$, лежащей в первой четверти, равна:

а) $-\dfrac{3}{16\pi R^2}$; б) $\dfrac{3}{16\pi R^2}$; в) $\dfrac{3}{14\pi R^2}$.

10 Поток векторного поля $\vec{a} = xy\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (x+2z)\vec{k}$ через часть плоскости $2x + y + z = 2$, лежащей в первом октанте равен ______________________.

Вариант 2

1 Множество точек скалярного поля, в каждой из которых потенциал сохраняет постоянное значение, называется _________.

2 Векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$ называется потенциальным, если существует непрерывно дифференцируемая скалярная функция $U(M)$ такая, что ___________________.

3 Укажите верную формулу:

а) $\operatorname{div}\vec{a} = \dfrac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 Z}{\partial z^2}$;

б) $\operatorname{div}\vec{a} = \dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z}{\partial z}$;

в) $\operatorname{div}\vec{a} = \dfrac{\partial X}{\partial y} + \dfrac{\partial Y}{\partial z} + \dfrac{\partial Z}{\partial x}$.

4 Выбрать верное утверждение:

а) если векторное поле $\vec{a}(M)$ соленоидальное, то поток вектора $\vec{a}(M)$ через любую замкнутую поверхность равен нулю;

б) векторное поле $\vec{a}(M)$ соленоидальное тогда и только тогда, когда поток вектора $\vec{a}(M)$ через любую замкнутую поверхность равен нулю;

в) если векторное поле $\vec{a}(M)$ соленоидальное, то поток вектора $\vec{a}(M)$ через любую поверхность равен нулю;

Примерный перечень вопросов к экзамену

(* отмечены вопросы, содержащие теорему с доказательством)

1 Определение евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, сходимость последовательности точек в $\mathbb{R}^n$.

2 Подмножества пространства $\mathbb{R}^n$, компакт.

3 Предел функции многих переменных.

4* Повторные пределы.

5 Непрерывность функции.

6 Частные и полные приращения функции многих переменных.

7 Частные производные функции двух переменных и их геометрический и механический смысл.

8* Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

9* Дифференцируемость функций многих переменных, необходимое условие дифференцируемости.

10* Достаточное условие дифференцируемости функции многих переменных.

11.* Дифференцирование сложной функции многих переменных.

12 Полный дифференциал функции двух переменных и его геометрический смысл.

13* Теорема о равенстве смешанных производных.

14. Дифференциалы высших порядков функции двух переменных.

15* Формула Тейлора для функции двух переменных.

16* Локальный экстремум функции многих переменных, необходимые условия локального экстремума.

17* Достаточные условия локального экстремума функции двух переменных.

18 Неявные функции двух переменных, определяемые одним уравнением, теоремы существования и дифференцирования.

19 Неявные функции многих переменных, определяемые системой уравнений, достаточное условие независимости.

20 Условный экстремум, метод исключения части переменных.

21* Необходимое условие Лагранжа условного экстремума.

22 Глобальный экстремум функции двух переменных на компакте.

23 Задачи, приводящие к понятию криволинейного интеграла 1-го рода.

24 Определение и свойства криволинейного интеграла 1-го рода.

Вариант 2

1 Найти массу материальной кривой $x=4(t-\sin t)$, $y=4(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$, с плотностью $\rho(x;y)=2x$.

2 Найти работу A переменной силы $\vec{F}=y\vec{i}-3x\vec{j}$ вдоль дуги астроиды $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, $0\le t\le \dfrac{\pi}{6}$.

3 Найти статические моменты относительно осей координат, центр тяжести и моменты инерции однородной пластинки, ограниченной линиями $x^2+y^2=16$, $x^2+y^2=9$.

4 Найти массу шара $x^2+y^2+z^2\le 9$, если его плотность $\rho(x;y;z)=\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}$.

5 Найти площадь части поверхности параболоида $y=1-x^2-z^2$, вырезанной цилиндром $x^2+z^2=1$.

6 Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Omega} x^2dydz-y^2dzdx-z^2dxdy$, где Ω – внешняя сторона поверхности куба $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, $0\le z\le 1$.

7 Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}=y\vec{i}+x\vec{j}-z\vec{k}$ вдоль контура $\Gamma=\left\{(x;y;z)\mid\ x=\cos t; y=\sin t; z=3\right\}$.

8 Выяснить, является ли соленоидальным и потенциальным векторное поле $\vec{a}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$.

9 Найти производную $\dfrac{dF}{dy}$ функции $F(y)=\int\limits_{y^2}^{\sin y}\ln\left(x+y^2\right)dx$.

10 С помощью интегралов Эйлера вычислить $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{(1+x)^3}dx$.

5 Линии уровня скалярного поля $U=x^2-y^2$ имеют вид ___________________.

6 Поверхности уровня скалярного поля $U=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ имеют вид ___________________.

7 Производная функции $f=x^2y+xz^2-2$ в точке $P=(1,1,-1)$ по направлению вектора $\vec{l}=(1,-2,4)$ равна:

а) 1; б) 9; в) -9.

8 Градиент скалярного поля $U=x^2-2y^2+4z^2-2xz+yz-2xy$ в точке $P(-1;1;1)$ равен:

а) $-6\vec{i}-\vec{j}+11\vec{k}$; б) $6\vec{i}-\vec{j}+11\vec{k}$; 4 в) $-6\vec{i}+\vec{j}-11\vec{k}$.

9 Циркуляция векторного поля $\vec{a}=y^2\vec{i}$ вдоль замкнутой линии Γ, образованной правой половиной эллипса $\vec{r}=b\cos t\,\vec{i}+c\sin t\,\vec{j}$ и осью Oy, равна:

а) 1; б) 0; в) – 1.

10 Поток векторного поля $\vec{a}=x^3\vec{i}+y^3\vec{j}+z^3\vec{k}$ через поверхность сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ равен ______________________.

Задания к контрольным работам

Контрольная работа по разделу «Дифференциальное исчисление функции многих переменных»

Вариант 1

1 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y}$ и $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y}$.

2 Найти дифференциал 1-го порядка в точке $M(0;0;2)$ функции $z(x;y)$, заданной уравнением $z^3+3xyz=8$.

3 Найти разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $(0;0)$ до членов 2-го порядка функции $z(x;y)=e^x\sin y$.

4 Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z(x;y)=x^2+2xy-y^2-4x$ на компакте $\overline{D}$, ограниченном кривыми $x-y+1=0$, $x=3$, $y=0$.

5 Решить дифференциальное уравнение $y\dfrac{dz}{dx}-x\dfrac{dz}{dy}=0$ с помощью замены переменных $\xi=x$, $\eta=x^2+y^2$.

Вариант 2

1 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2y^2+1}-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{x^2+y}{\sqrt{x^2y^2+1}-1}$ и $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+y}{\sqrt{x^2y^2+1}-1}$.

2 Найти дифференциал 1-го порядка в точке $M(0;0;1)$ функции $z(x;y)$, заданной уравнением $e^z-xyz=e$.

3 Найти разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $(0;0)$ до членов 2-го порядка функции $z(x;y)=e^x\cos y$.

4 Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z(x;y)=x^2+y^2-2x-2y+8$ на компакте $\overline{D}$, ограниченном кривыми $x+y-1=0$, $x=0$, $y=0$.

5 Решить дифференциальное уравнение $\dfrac{du}{dx}+\dfrac{du}{dy}+\dfrac{du}{dz}=0$ с помощью замены переменных $\xi=x$, $\eta=x-y$, $\zeta=z-x$.

Контрольная работа по разделу «Интегральное исчисление функции многих переменных»

Вариант 1

1 Найти массу материальной кривой $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$, с плотностью $\rho(x;y)=x$.

2 Найти работу A переменной силы $\vec F=y\vec i+x\vec j$ вдоль дуги астроиды $x=2\cos^3 t$, $y=2\sin^3 t$, $0\le t\le\dfrac{\pi}{4}$.

3 Найти статические моменты относительно осей координат, центр тяжести и моменты инерции однородной пластинки, ограниченной линиями $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=25$.

4 Найти массу шара $x^2+y^2+z^2\le 4$, если его плотность $\rho(x;y;z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

5 Найти площадь части поверхности параболоида $x=1-y^2-z^2$, вырезанной цилиндром $y^2+z^2=1$.

6 Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Omega}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, где Ω – внешняя сторона поверхности куба $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, $0\le z\le 1$.

7 Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec a=y\vec i-x\vec j+z\vec k$ вдоль контура $\Gamma=\left\{(x;y;z)\,\middle|\; x=\cos t; y=\sin t; z=2\right\}$.

8 Выяснить, является ли соленоидальным и потенциальным векторное поле $\vec a=x^2z\vec i+y^2\vec j-xz^2\vec k$.

9 Найти производную $\dfrac{dF}{dy}$ функции $F(y)=\int\limits_{y^2}^{\sin y}\ln\left(2y^2-x\right)dx$.

10 С помощью интегралов Эйлера вычислить $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx$.