Контрольная работа по разделу «Дифференциальное исчисление функции действительной переменной»

Вариант 1

1 Найти производные данных функций:

а) $y=\arcsin x^2$, б) $y=(x-5)^2\cdot e^{x^2-3}$, в) $y=\dfrac{\sin(x+6)}{x^2+5}$.

2 Найти производную неявной функции и функции, заданной параметрическими уравнениями

а) $\sin(y^2)=x^2+y^3$; б) $x=\sqrt{t^3-1}$, $y=\operatorname{arctg}(t+1)$.

3 Найти производную функции с помощью логарифмической производной:

а) $y=(\operatorname{tg}x)^{\cos x+x}$, б) $y=\dfrac{(x-5)^2}{\sin^3 x}$.

4 Написать разложение функции $y=f(x)$ в ряд Маклорена по степеням переменной x до членов порядка n включительно $y=x^2\cdot e^{x+1}$, $n=4$.

5 Провести полное исследование и построить график функции:

а) $y=\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$; б) $x=t^3+2t^2+t$. $y=-2+3t-t^3$.

6 Частица движется с постоянной по величине скоростью v по кривой $y=x^3$. Найдите величину ускорения частицы в момент, когда $x=0$.

Вариант 2

1 Найти производные данных функций:

а) $y=\arcsin(\ln^2 x)$, б) $y=\cos x^2\cdot\ln(\operatorname{tg}x)$, в) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x-4}}{\arccos x}$.

2 Найти производную неявной функции и функции, заданной параметрическими уравнениями

а) $\sqrt{y+1}=\ln(x-y)+y$, б) $x=\sqrt[3]{t^2-1}$, $y=\operatorname{arctg}t+t^2$.

3 Найти производную функции с помощью логарифмической производной:

а) $y=(\sin x)^{\cos x}$, б) $y=\dfrac{(x^5-x)^4}{\sqrt[5]{x+3}}$.

Последовательность частичных сумм (S_n) этого ряда не имеет предела и поэтому данный ряд расходится;

б) сумма n первых членов ряда

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{k-1}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}aq^{k-1}$$

имеет вид

$$S_n=a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}=\frac{a(1-q^n)}{1-q},\ q\neq 1.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty}q^n=\begin{cases}0, \text{ если } |q|<1,\\ \infty, \text{ если } |q|>1,\end{cases}$$

то

$$S_n=\begin{cases}\dfrac{a}{1-q}, \text{ если } |q|<1,\\ \infty, \quad \text{ если } |q|>1.\end{cases}$$

При $q=-1$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty}aq^{k-1}$ совпадает с рядом $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a$, при $q=1$, $S_n=na$ и $\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$.

Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}aq^{k-1}$ сходится при $|q|<1$ и его сумма $S=\dfrac{a}{1-q}$, при $|q|\geq 1$ он расходится.

5 Исследовать сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{k+1}{k}\right)^k$

Решение. Вычислим предел:

$$\lim_{k\to\infty}a_k=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=e\neq 0.$$

Согласно теореме 1 не выполняется необходимое условие сходимости ряда. Значит, данный ряд расходится.

6 Исследовать сходимость *гармонического ряда*

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}.$$

Р е ш е н и е. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{k}=0$, однако гармонический ряд расходится. Докажем, что гармонический ряд расходится двумя способами.

1 способ. Действительно, предположим, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ сходится и его сумма равна S. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_{2n}-S_n\right)=\lim_{n\to\infty}S_{2n}-\lim_{n\to\infty}S_n=S-S=0 .$$

Из неравенства

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\ge n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},\ n\in\mathbb{N},$$

предельным переходом по n получаем противоречие: $0\ge\frac{1}{2}$.

2 способ. Имеем:

$$\left|a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_{k+p}\right|=\left|\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{k+p}\right|=$$

$$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{k+p}.$$

Для любого $t\in\mathbb{N}$ положим $k=t$ и $p=t$. Так как $\frac{1}{t+i}\ge\frac{1}{t+t}$, $i=1,2,\ldots,t$,то получим:

$$\left|a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_{k+p}\right|>\frac{1}{2t}+\frac{1}{2t}+\ldots+\frac{1}{2t}=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, для любого $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ критерий Коши не выполняется. Следовательно, гармонический ряд расходится.

7 Исследовать сходимость *обобщенного гармонического ряда* (*ряда Дирихле*)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p},\ p\in\mathbb{R}.$$

Р е ш е н и е. При $p=1$ ряд совпадает с гармоническим рядом и расходится.

Если $p\le 0$, то $\frac{1}{k^p}\ge 1\ \ \forall k\in\mathbb{N}$ и $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k^p}\ne 0$. В этом случае

Задания к контрольным работам

Контрольная работа по разделу «Теория пределов»

Вариант 1

1 Найти $\max X$, $\min X$, $\sup X$, $\inf X$ числового множества $X=\{x\in Q:|x|\le 2\}$.

2 Найти все значения корня и изобразить их в комплексной плоскости числа $\sqrt[7]{3-3\sqrt{3}i}$.

3 Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$.

4 Вычислить пределы

а) $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{x-8}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x\sin 5x}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{x-1}$.

5 Исследовать функцию на непрерывность

$$f(x)=\begin{cases}|x|-1 \text{ при } x\le -1,\\ x^2 \text{ при } x>-1.\end{cases}$$

Вариант 2

1 Найти $\max X$, $\min X$, $\sup X$, $\inf X$ числового множества $X=\{x\in Q:|x|\ge 3\}$.

2 Найти все значения корня и изобразить их в комплексной плоскости числа $\sqrt[3]{2-2i}$.

3 Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$.

4 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x-1}-x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x\sin 9x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{5x+1}\right)^{x-1}$.

5 Исследовать функцию на непрерывность

$$f(x)=\begin{cases}-2|x| \text{ при } x\le -1,\\ x^2+1 \text{ при } x\ge -1.\end{cases}$$

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 3^3} \approx 0{,}3333 - 0{,}0123 = 0{,}3210\,.$$

Окончательно получаем $\int_0^{1/3} e^{-x^2}dx \approx 0{,}321$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

10 Найти решение уравнения $yy' = \sin y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Уравнение $yy' = \sin y$ допускает разделение переменных:

$$\frac{ydy}{\sin y} = dx\,.$$

Однако интеграл от левой части уравнения не выражается в элементарных функциях. В окрестности $x_0 = 0$ уравнение удовлетворяет условиям теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши. Будем искать его в виде ряда Маклорена

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n\,.$$

Так как $y(0) = \frac{\pi}{2}$ и $y' = \frac{\sin y}{y}$, то $y'(0) = \frac{2}{\pi}$. Дифференцируя по x обе части равенства $y' = \frac{\sin y}{y}$, находим

$$y'' = \frac{(y'\cos y)y - y'\sin y}{y^2} = \frac{y'(y\cos y - \sin y)}{y^2}\,.$$

Откуда $y''(0) = \frac{-y'(0)\sin(\pi/2)}{(\pi/2)^2} = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^3$. Дифференцируя обе части найденного равенства для y'', находим $y'''(0)$. Продолжая этот процесс, можно получить любое число членов разложения в ряд Маклорена искомого решения $y = y(x)$:

$$y = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}x - \frac{2^2}{\pi^3}x^2 + \ldots\,.$$

ряд расходится, так как нарушается необходимое условие сходимости ряда.

Пусть $p > 0$ и $p \neq 1$. Положим $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Функция $f(x)$ монотонно убывает на промежутке $[1;+\infty)$.

Обобщенный гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ сходится и расходится одновременно с интегралом $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}$.

Известно, что несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p}, & \text{если } p > 1, \\ \infty, & \text{если } 0 < p < 1. \end{cases}$$

Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$.

8 Исследовать сходимость рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^k}$; в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^k}$; д) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k}{k+1}\right)^k$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{k}$; г) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k^4}$; е) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3k^2+5k+1}{k^4-10k^2-5}$.

Решение. а) так как $\frac{1}{k^k} \le \frac{1}{k^2}$ $\forall k \ge 2$ и обобщенный гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ сходится ($p = 2 > 1$), то согласно признаку сравнения сходится и данный ряд;

б) сравним ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{k}$ с гармоническим рядом $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$. Поскольку

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{k}}{\frac{1}{k}} = \pi\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{k}}{\frac{\pi}{k}} = \pi\,,\ 0 < \pi < \infty\,,$$

и гармонический ряд расходится, то расходится и исходный ряд;

в) вычислим предел:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{(k+1)!k^k}{(k+1)^{k+1}k!}=\lim_{k\to\infty}\frac{k^k}{(k+1)^n}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}=\frac{1}{e}.$$

Так как $L=\frac{1}{e}<1$, то по признаку Д'аламбера данный ряд сходится;

г) вычислим предел:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{2^{k+1}k^4}{(k+1)^4\cdot 2^k}=2\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^4}=2.$$

Так как $L=2>1$, то согласно признаку Д'аламбера исходный ряд расходится;

д) так как

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(\frac{2k}{k+1}\right)^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{2k}{k+1}=2>1,$$

то согласно признаку Коши данный ряд расходится;

е) сравним ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{3k^2+5k+1}{k^4-10k^2-5}$ с обобщенным гармоническим рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$. Вычислим предел:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{3k^2+5k+1}{k^4-10k^2-5}}{\frac{1}{k^2}}=\lim_{k\to\infty}\frac{(3k^2+5k+1)k^2}{k^4-10k^2-5}=3,\ 0<3<\infty.$$

Поскольку для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ имеем $p=2$, то исходный ряд сходится вместе с обобщенным гармоническим рядом.

Тема 2 Знакопеременные ряды

1 Исследовать сходимость знакопеременных рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}}{3^k}$; г) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{k(k-1)(k-2)}{2}}}{k^2}$;

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^n}{k!}+R_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0<\xi<x,\ \forall x\in\mathbb{R},$$

то из оценки

$$|R_n(1)|=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}\le 0{,}01$$

следует, что $n\ge 5$, т. е. $n_0=5$. Полагая $x_0=1$, $x_1=0$, получим

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}\approx 2+0{,}500+0{,}167+0{,}042+0{,}008=2{,}717.$$

8 Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x-2-2x-x^2}{x-\sin x}$.

Решение. Заменим e^x и $\sin x$ их разложением в ряд Маклорена

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-2-2x-x^2}{x-\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)-2-2x-x^2}{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x^3}{3!}+\frac{2x^4}{4!}\ldots+}{\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\ldots}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3!}+\frac{2x}{4!}\ldots+}{\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\ldots}=2.$$

9 Вычислить $\int\limits_0^{1/3}e^{-x^2}dx$ с точностью $\varepsilon=0{,}001$.

Решение. Имеем $\forall x\in\mathbb{R}$ $e^{-x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}$

Тогда

$$\int_0^{1/3}e^{-x^2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{1/3}x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}.$$

Отсюда

$$|r_n|\le\frac{1}{(n+1)!(2n+3)3^{2n+3}}\le 0{,}001\ \Rightarrow\ n\ge 1\Rightarrow n_0=1$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{a(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

для разложения функций

$$f_1(x)=\left(1+x^3-2x\right)^{\frac{1}{2}} \text{ и } f_2(x)=\left(1+x^2-3x\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Для первой функции имеем

$$f_1(x)=\left(1+\left(x^3-2x\right)\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\left(x^3-2x\right)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(x^3-2x\right)^2+$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\left(x^3-2x\right)^3+o\left(\left(x^3-2x\right)^3\right)=$$

$$=1-x+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^3\right),$$

так как $o\left(x^3-2x\right)=o\left(x^3\right)$.

Для второй функции аналогично получим

$$f_2(x)=\left(1+\left(x^2-3x\right)\right)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}\left(x^2-3x\right)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(x^2-3x\right)^2+$$

$$+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\left(x^2-3x\right)^3+o\left(x^3\right)=$$

$$=1-\frac{1}{3}x^2-x+\frac{2}{3}x^3+o\left(x^3\right)=1-x-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x^3+o\left(x^3\right).$$

Тогда

$$f(x)=f_1(x)-f_2(x)=$$

$$=1-x+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^3\right)-\left(1-x-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{6}x^2+x^3+o\left(x^3\right)$$

(воспользовались тем, что $o\left(x^3\right)-o\left(x^3\right)=o\left(x^3\right)$).

7 Вычислить с точностью $\varepsilon=0{,}01$ число e.

Решение. Так как

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-5)^k}{1+(-5)^{2k}}$; д) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k k}{3k-1}$;

в) $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\ln k}$; е) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\alpha}{k^4}$.

2 Исследовать абсолютно или условно сходятся ряды:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$; г) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{3k(3k-1)}$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(k\ln k)^2}$; д) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\left(3^k+1\right)}{k\cdot 3^k}$;

в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k+2^k}$; е) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)!!}{(k+1)^k}$.

3 С точностью до 0,001 вычислить сумму рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}$; г) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\,2^k}$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$; д) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^k}$;

в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$; е) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt[3]{k+1}}$.

4 Найти сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^k}+\frac{(-1)^k}{5^k}\right)$.

5 Составить ряд, полученный из разности соответствующих членов рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}$. Сходится ли полученный ряд?

6 Даны два ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k}$. Записать первые пять членов их произведения. Сходится ли полученный ряд?

Примеры оформления решения

1 Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

Решение. Так как $\frac{1}{k^2}>\frac{1}{(k+1)^2}$ $\forall k\in\mathbb{N}$ и $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k^2}=0$, то данный ряд, согласно признаку Лейбница, сходится.

2 Исследовать сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2^k}$, б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Решение. а) ряд, составленный из абсолютных величин исходного ряда, имеет вид $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ и является сходящимся. Значит, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2^k}$ является абсолютно сходящимся;

б) по признаку Лейбница ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k}$ сходится. С другой стороны, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ является расходящимся гармоническим рядом. Значит, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ не является абсолютно сходящимся.

3 Найти сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k$.

Решение. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ является расходящимся, так как $\lim\limits_{k\to\infty}(-1)^k$ не существует.

Ряды

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots$$

и

$$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\ldots,$$

полученные из него путем объединения его членов, сходятся:

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots=0,$$
$$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\ldots=1.$$

Таким образом, для исходного ряда сумма ряда не существует, а ряды, полученные из него указанным объединением его членов, имеют конечные суммы.

4 Разложить функцию $f(x)=\ln x$ в степенной ряд по степеням $(x-1)$.

Решение. В разложении $\forall x\in(-1;1)$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

заменим x на $(x-1)$. Получим $\forall x\in(0;2)$

$$\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\ldots.$$

5 Разложить функцию $f(x)=\frac{1}{x}$ в степенной ряд по степеням $(x-2)$.

Решение. Воспользуемся равенством

$$\frac{1}{x}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x-2}{2}}.$$

Правую часть можно рассматривать как сумму бесконечно убывающей прогрессии с первым членом $a_1=\frac{1}{2}$ и и знаменателем $q=-\frac{x-2}{2}$.

Отсюда получаем

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x-2}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-2}{2}\right)^3+\ldots,$$

Тогда

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{x-2}{4}+\frac{(x-2)^2}{8}-\frac{(x-2)^3}{16}+\ldots.$$

Поскольку ряд сходится при $\left|\frac{x-2}{2}\right|<1$, то разложение имеет место для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<x<4$.

6 Разложить по целым неотрицательным степеням переменной x до члена с x^3 функцию

$$f(x)=\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}.$$

Решение. Используем разложение $\forall x\in(-1;1)$

$$f''(x)=2^x\ln^2 2, \qquad\qquad f''(0)=\ln^2 2,$$
……………………………………………………,
$$f^{(n)}(x)=2^x\ln^n 2, \qquad\qquad f^{(n)}(0)=\ln^n 2.$$

Так как $0<\ln 2<1$, то при фиксированном x имеет место неравенство

$$\left|f^{(n)}(x)\right|<2^x$$

при любом n. Следовательно, функция может быть представлена в виде суммы ряда Тейлора

$$2^x=1+x\cdot\ln 2+\frac{x^2\cdot\ln^2 2}{2!}+\frac{x^3\cdot\ln^3 2}{3!}+\ldots.$$

2 Разложить функцию $f(x)=\sin^2 x$ в степенной ряд.

Решение. Функцию $f(x)=\sin^2 x$ можно записать в виде

$$f(x)=\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x).$$

Заменим $\cos 2x$ его разложением в ряд Маклорена

$$\cos 2x=1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+\ldots=$$

$$=1-\frac{4x^2}{2!}+\frac{2^4x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots.$$

Подставляя, получим

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}\left(1-\left(1-\frac{4x^2}{2!}+\frac{2^4x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)\right)=$$

$$=\frac{2x^2}{2!}+\frac{2^3x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots.$$

3 Разложить функцию $f(x)=e^{-x^2}$ в степенной ряд.

Решение. В разложении

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

заменим x на $(-x^2)$. Получим

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}+\ldots,\ \forall\ x\in\mathbb{R}.$$

4 Исследовать на сходимость ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\alpha}{k}$.

Решение. Последовательность $(a_k)=\left(\frac{1}{k}\right)$ монотонно убывающая и $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}=0$.

Рассмотрим последовательность $(B_n)=\left(\sum_{k=1}^{n}\sin k\alpha\right)$. При $\alpha\neq 2m\pi$, $m\in\mathbb{Z}$, имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\alpha=\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin n\alpha=$$

$$=\frac{2\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+2\sin 2\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+\ldots+2\sin n\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{3\alpha}{2}+\cos\frac{3\alpha}{2}-\ldots+\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\alpha}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Поэтому

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin k\alpha\right|\le=\frac{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|+\left|\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\alpha}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}\le\frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}.$$

При $\alpha\neq 2m\pi$, $m\in\mathbb{Z}$, все рассматриваемые суммы ограничены. В силу признака Дирихле ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\alpha}{k}$ сходится.

При $\alpha=2m\pi$, $m\in\mathbb{Z}$, все члены ряда обращаются в нуль и ряд также сходится.

5 Исследовать сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\alpha}{k}\cos\frac{\pi}{k}$.

Решение. Последовательность $(a_k)=\left(\cos\frac{\pi}{k}\right)$ ограничена и монотонна. Ряд сходится по признаку Дирихле. Согласно признаку Абеля ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\alpha}{k}\cos\frac{\pi}{k}$ сходится.

6 Сколько членов ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^4}$ нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,0001?

Решение. Этот ряд является знакочередующимся рядом, удовлетворяющим условиям признака Лейбница:

$$1>\frac{1}{2^4}>\frac{1}{3^4}>\ldots>\frac{1}{k^4}>\ldots,$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^4}=0.$$

Следовательно, данный ряд сходится, причем абсолютно, поскольку ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{k-1}}{k^4}\right|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}$$

является сходящимся обобщенным гармоническим рядом ($p=4>1$).

Определим число членов, которые нужно взять, чтобы вычислить его сумму с заданной точностью.

Если

$$\frac{1}{k^4}<0{,}0001 \text{ или } \frac{1}{k^4}<\frac{1}{10000},$$

то $k>10$.

Следовательно, нужно взять 10 членов данного ряда.

Так как $a_{11}=\frac{1}{11^4}<\frac{1}{10^4}=0{,}0001$, то оценка ряда есть

$$R_{10}<a_{11}<0{,}0001.$$

Тема 5 Ряд Тейлора

1 Разложить в ряд Маклорена функции:

а) $f(x)=4^x$;
б) $f(x)=\sqrt{1-x}$;
в) $f(x)=\ln(2+x)$;
г) $f(x)=\mathrm{sh}^2 x$;
д) $f(x)=\mathrm{tg}\, x$;
е) $f(x)=(1+x)e^{-x^2}$.

2 Вычислить с точностью 0,0001 значение функций:

а) $\sqrt{24}$;
б) $\cos 18^\circ$;
в) $\mathrm{arctg}\, 0{,}9$;
г) $\ln 3$;
д) $\sqrt[3]{e}$;
е) $\sqrt[4]{17}$.

3 Найти:

а) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\mathrm{arctg}\, x}{x^3}$;
б) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{e^x-1-x}$.

4 С точность до 0,0001 вычислить определенные интегралы:

а) $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sin x}{x}dx$;
б) $\int_0^1\cos^3 x dx$;
в) $\int_0^{\frac{1}{3}}\sqrt{1+x^4}dx$;
г) $\int_0^{0{,}1}\frac{e^x-1}{x}dx$.

5 Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего указанным условиям:

а) $y'x+y+2=0$, $y(1)=2$;

б) $y'(x-3)+y=0$, $y(-6)=-6$;

в) $y'-y=e^x$, $y(0)=1$;

г) $y''=2x-\mathrm{sh}\, x$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

Примеры оформления решения

1 Разложить функцию $f(x)=2^x$ в степенной ряд.

Решение. Найдем значение функции и ее производных в точке $x=0$:

$f(x)=2^x$, $f(0)=1$,

$f'(x)=2^x\ln 2$, $f'(0)=\ln 2$,

$$R=\lim_{k\to\infty}\frac{\dfrac{1}{k\cdot 5^k}}{\dfrac{1}{(k+1)\cdot 5^{k+1}}}=5\,.$$

Значит, интервал сходимости $-5<x-3<5$ или $-2<x<8$. В точке $x=-2$ получаем условно сходящийся ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$, а в точке $x=8$ – расходящийся гармонический ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$. Таким образом, область сходимости ряда есть полуинтервал $[-2;8)$.

3 Найти сумму ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}=1-x^2+x^4-\ldots+(-1)^k x^{2k}+\ldots,$$

полученный почленным дифференцированием исходного ряда. Так как члены этого ряда образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $(-x^2)$, то его сумма $S(x)=\frac{1}{1+x^2}$, если $|x|<1$.

Интегрируя ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}$ почленно на отрезке $[0;x]\subset(-1;1)$, получаем:

$$\operatorname{arctg} x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k}dt=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_0^x t^{2k}dt=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

.

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}=\operatorname{arctg} x\,,\ |x|<1\,.$$

Таким образом, функция $y=\operatorname{arctg}x$ является суммой исходного ряда.

7 Составить сумму рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3^k}$. Сходится ли полученный ряд?

Р е ш е н и е. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ есть геометрический со знаменателем $q_1=\frac{1}{2}$, его сумма $S_1=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$, второй $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3^k}$ геометрический ряд со знаменателем $q_2=-\frac{1}{3}$, его сумма $S_2=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$.

По определению суммы двух рядов полученный ряд имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{(-1)^k}{3^k}\right).$$

Данный ряд сходится, его сумма

$$S=S_1+S_2=2{,}75\,.$$

Тема 3 Функциональные ряды

1 Доказать, что последовательность $\left(\frac{k^2}{k^2+x^2}\right)$ равномерно сходится на отрезке $[-1;1]$.

2 Найти область сходимости функциональных рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{2x-3}{4x+5}\right)^k$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)x^{2k-1}}$;

в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\,e^{kx}$;

д) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\sqrt{k}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^k$;

е) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}4^k(3x+2)^{2k-1}$;

ж) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5-x^2}{4}\right)^k$;

г) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3x+1}{x^2+x+1}\right)^k$; и) $\sum_{k=1}^{\infty}k^2e^{-kx^2}$.

3 Доказать равномерную сходимость функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+k}$.

4 Исследовать равномерную сходимость функциональных рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+3^k}$; б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{x^2+k^2}$.

5 Исследовать непрерывность функциональных рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{x^2+k^2}$; б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+x^2}$.

6 Найти сумму функциональных рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$; б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$.

Примеры оформления решения

1 Доказать, что функциональная последовательность $(x^n)_{n=1}^{\infty}=(1;x;x^2;...)$, заданная на множестве $X=\left[0;\frac{1}{2}\right]$, является равномерно сходящейся на этом множестве.

Решение. Предел существует и $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0=f(x)$ для всех $x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$. Так как $\sup\limits_{\left[0;\frac{1}{2}\right]}\left|x^n-0\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^n$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\left[0;\frac{1}{2}\right]}\left|x^n-0\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0.$$

Поэтому последовательность $(x^n)=(1;x;x^2;...)$ сходится равномерно к нулю на отрезке $X=\left[0;\frac{1}{2}\right]$: $x^n \underset{\left[0;\frac{1}{2}\right]}{\rightrightarrows} 0$.

2 Найти область абсолютной сходимости функционального

числовым рядом $\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}$, сходящимся по признаку Д'аламбера.

Используя свойство почленного дифференцирования, получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2},\ \forall x\in(-1;1).$$

Тема 4 Степенные ряды

1 Найти радиус сходимости степенных рядов:

а) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{7^k}$; д) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 5^k x^k$;

б) $\sum_{k=0}^{\infty}k3^k x^k$; е) $\sum_{k=1}^{\infty}k!(x-2)^k$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k^2}}{k!}(x+3)^k$; ж) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k}{k!}(x+1)^k$;

г) $\sum_{k=1}^{\infty}(1-\frac{1}{k})^{k^2}(x-e)^k$; и) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^k$.

2 Найти область сходимости степенных рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2k-1}}{k^3}$; в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x+2)^k}{k(5^k+1)}$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{2k-1}}{k\cdot 7^k}$; г) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-2)^k}{k\sqrt{k+1}}$.

Примеры оформления решения

1 Найти радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty}k!x^k$.

Решение. Имеем:

$$R=\lim_{k\to\infty}\frac{k!}{(k+1)!}=0.$$

Значит, ряд сходится в единственной точке $x=0$.

2 Найти область сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-3)^k}{k\cdot 5^k}$.

Решение. Имеем:

Решение. Каждый член $u_k(x)=\dfrac{\cos kx}{k^3}$, $k=1,2,\ldots$, есть функция, непрерывная от x. Поскольку $\left|\dfrac{\cos kx}{k^3}\right|\le\dfrac{1}{k^3}$, то и мажорантный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^3}$ является сходящимся как обобщенный гармонический ряд, $p=3>1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos kx}{k^3}$ сходится равномерно на всей числовой оси. Поэтому сумма этого ряда непрерывна при всех x как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций.

6 Исследовать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{k}$.

Решение. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2+x^2}$.

Так как $\dfrac{1}{k^2+x^2}\le\dfrac{1}{k^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса исходный ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$. Интегрируя его почленно на отрезке $[0;x]$, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x\frac{1}{k^2+t^2}dt=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{x}{k}.$$

Значит, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{k}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$.

7 Найти сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}$.

Решение. Очевидно, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k$ сходится при $|x|<1$ и его сумма равна $\dfrac{1}{1-x}$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}$, полученный почленным дифференцированием ряда сходится равномерно при $|x|\le q<1$ на основании признака Вейерштрасса, так как он мажорируется

ряда $1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}+\ldots=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x^{k-1}$.

Решение. Зафиксируем точку x и применим признак Д'аламбера:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^k}{x^{k-1}}\right|=|x|.$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x|^{k-1}$ сходится при $|x|<1$ и расходится при $|x|\ge1$.

Таким образом, областью абсолютной сходимости функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x^{k-1}$ является интервал $(-1;1)$.

3 Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{k}}\left(\dfrac{x-1}{2x+1}\right)^k$.

Решение. Применим признак Коши к ряду, составленному из абсолютных величин членов данного ряда.
Так как

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|u_k(x)|}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^k\right|}=\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^{\frac{1}{2k}}}=\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|,$$

то ряд сходится, когда $\left|\dfrac{x-1}{2x+1}\right|<1$.

Решая данное неравенство, получим

$$-1<\frac{x-1}{2x+1}<1\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+1\ge 0, \\ -(2x+1)<x-1<2x+1, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+1<0, \\ -(2x+1)>x-1>2x+1, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge \dfrac{-1}{2}, \\ x>0, \\ x>-2, \end{cases} \\ \begin{cases} x<-\dfrac{1}{2}, \\ x<0, \\ x<-2, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>0, \\ x<-2. \end{array}\right.$$

Итак, ряд сходится при $x\in(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала.

При $x=0$ имеем знакочередующийся ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$, являющийся сходящимся, поскольку он удовлетворяет условиям Лейбница.

При $x=-2$ получим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$, являющийся расходящимся как обобщенный гармонический ряд ($p=\dfrac{1}{2}<1$).

4 Исследовать ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{k-1}}$$

на а) поточечную, б) равномерную сходимость.

Решение. а) так как

$$x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}+\ldots+\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{n-1}}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{k-1}},$$

то члены исходного ряда при $x\ne 0$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\dfrac{1}{1+x^2}<1$, а при $x=0$ все обращаются в нуль. Тогда

$$S(x)=\begin{cases} 0,\ \text{если } x=0, \\ 1+x^2,\ \text{если } x\ne 0. \end{cases}$$

Следовательно, областью поточечной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{k-1}}$ является вся числовая ось $\mathbb{R}$. При этом, хотя все члены ряда непрерывны на $\mathbb{R}$, сумма $S(x)$ разрывна в точке $x=0$;

б) пусть $0<\varepsilon<1$ и $x\ne 0$. Тогда

$$S_n(x)=\left(1+x^2\right)\left(1-\frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}\right),$$

и неравенство

$$\left|S(x)-S_n(x)\right|=\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{n-1}}<\varepsilon$$

выполняется при $n>N(\varepsilon,x)=1+\left[1-\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln\left(1+x^2\right)}\right]$.

Действительно,

$$\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{n-1}}<\varepsilon \;\Rightarrow\; \left(1+x^2\right)^{n-1}>\frac{1}{\varepsilon} \;\Rightarrow\; (n-1)\ln\left(1+x^2\right)>-\ln\varepsilon.$$

Отсюда $n>1-\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln\left(1+x^2\right)}$.

Отсюда $N(\varepsilon,x)=1+\left[1-\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln\left(1+x^2\right)}\right]$.

Поскольку $N(\varepsilon,x)\to+\infty$ при $x\to 0$ и $0<\varepsilon<1$, то при выбранном ε не существует конечного номера $N(\varepsilon)$, который не зависит от x, такого, чтобы выполнялось неравенство $\left|S(x)-S_n(x)\right|<\varepsilon\ \ \forall n>N(\varepsilon),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Значит, сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{k-1}}$ на $\mathbb{R}$ неравномерная.

5 Является ли сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos kx}{k^3}$ непрерывной функцией?