ТЕМА 2
ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Лекция 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

1. Оригиналы и их свойства.
2. Изображения и свойства изображений.
3. Свойства преобразования Лапласа.

1. Оригиналы и ихсвойства.

Пусть $f(t)$ – комплекснозначная функция действительного переменного t, определенная на интервале $-\infty < t < +\infty$.

Определение 1. Любая комплекснозначная функция $f(t)$ называется ***оригиналом***, если она удовлетворяет условиям:

1) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;

2) при $t \ge 0$ функция $f(t)$ кусочно-непрерывна, т.е. на любом конечном участке оси t имеет не более чем конечное число точек разрыва первого рода;

3) при $t \to \infty$ функция $f(t)$ имеет ограниченную степень роста, т. е. существует такое положительное постоянное M и такое неотрицательное постоянное s_0, что для всех $t \ge 0$ выполняется неравенство $|f(t)| \le M \cdot e^{s_0 t}$, $M > 0$, $s_0 \ge 0$. Число s_0 называется ***показателем роста*** функции $f(t)$.

Свойства оригиналов

1. Если $f(t)$ — оригинал с показателем роста s_0, то $|f(t)|$ является оригиналом с тем же показателем роста.

2. Если $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_n(t)$ – оригиналы с показателями роста s_1, s_2, ..., s_n, то функция

$$f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \cdots c_n f_n(t),$$

где c_1, c_2, ..., c_n – постоянные (действительные или комплексные), является также оригиналом с показателем роста s_0, равным наибольшему из чисел s_1, s_2, ..., s_n:

$$s_0 = \max\{s_1, s_2, ..., s_n\}.$$

3. Если $f(t)$ – оригинал с показателем роста s_0, то являются оригиналами следующие функции:

– функция $f_1(t) = f(\alpha \cdot t)$, $\alpha > 0$, имеющая показатель роста, равный $\alpha \cdot s_0$;

– функция $f_2(t) = e^{\lambda t} f(t)$ (λ — действительное или комплексное число), показатель роста которой равен

$$s = \begin{cases} s_0 + \operatorname{Re}\lambda, & \text{если } s_0 + \operatorname{Re}\lambda > 0, \\ 0, & \text{если } s_0 + \operatorname{Re}\lambda < 0. \end{cases}$$

– функция $f_3(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < \tau, \\ f(t-\tau), & \text{если } t \ge \tau. \end{cases}$, $\tau > 0$, имеющая показатель роста, равный s_0;

– функция $f_4(t) = t^z \cdot f(t)$, (z — действительное или комплексное число), показатель роста которой равен s_0.

4. Если $f(t)$ — оригинал с показателем роста s_0, то функция $g(t) = \int_0^t f(z)dz$ на интервале $0 \le t < \infty$ является непрерывным оригиналом с показателем роста s_0.

Пример. Функция

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \ge 0, \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

называется ***единичной функцией Хевисайда***. Функция $\eta(t)$ является оригиналом с показателем роста $s_0 = 0$.

Пусть функция $f(t)$ определена на интервале $-\infty < t < \infty$; и удовлетворяет условиям 2) и 3) определения 1, но $f(t) \ne 0$ при $t < 0$. Тогда функция

$$f(t)\eta(t) = \begin{cases} f(t) & \text{при } t \ge 0, \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

является оригиналом.

Пример. Найти показатель роста функции $f(t) = \mathrm{e}^{at}$, где a – действительное или комплексное число.

Решение. Если $\operatorname{Re} a > 0$, то для функции $f(t) = \mathrm{e}^{at}$ показатель ее роста $s_0 = \operatorname{Re} a > 0$. Если $\operatorname{Re} a < 0$, то функция $\left|\mathrm{e}^{at}\right|$ является ограниченной и $s_0 = 0$.

2. Изображения и свойства изображений.

Определение 2. ***Изображением*** (***интегралом Лапласа***) оригинала $f(t)$ называется несобственный интеграл

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt,$$

зависящий от комплексного параметра p.

Определение 3. ***Преобразованием Лапласа*** называется операция перехода от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$.

Соответствие между оригиналом $f(t)$ и изображением $F(p)$ записывается в виде $f(t) \doteq F(p)$.

Пусть функция $f(t)$ является оригиналом с показателем роста $s_0 > 0$.

Теорема 1 (существование изображения). *Для любого оригинала $f(t)$ изображение $F(p)$ существует в полуплоскости $\operatorname{Re} p = u > s_0$, где s_0 - показатель роста функции $f(t)$, причем функция $F(p)$ является аналитической в этой полуплоскости.*

►Пусть $p = u + iv$, произвольная точка полуплоскости $\operatorname{Re} p = u > s_0$. Учитывая, что

$$|f(t)| \le M \cdot e^{s_0 t}, \quad u - s_0 > 0,$$

$$\left|e^{-pt}\right| = \left|e^{-ut} \cdot e^{-ivt}\right| = e^{-ut} \cdot |\cos vt - i \sin vt| = e^{-ut},$$

имеем

$$\left|\int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} dt\right| \le \int_0^\infty \left|f(t) \cdot e^{-pt}\right| dt \le M \cdot \int_0^\infty e^{s_0 t} \cdot \left|e^{-pt}\right| dt = M \cdot \int_0^\infty e^{s_0 t} \cdot e^{-ut} dt =$$

$$= M \cdot \int_0^\infty e^{-t(u - s_0)} dt \le \frac{M}{u - s_0}.$$

Таким образом,

$$|F(p)| = \left|\int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} dt\right| \le \frac{M}{u - s}.$$

Отсюда на основании признака сравнения сходимости несобственных интегралов следует абсолютная сходимость интеграла Лапласа. Значит, изображение $F(p)$ существует и однозначно в полуплоскости $\operatorname{Re} p = u > s_0$.◄

Теорема 2 (необходимый признак существования изображения). *Если функция $F(p)$ является изображением функции $f(t)$, то* $\lim\limits_{\operatorname{Re} p \to \infty} F(p) = 0$.

► Справедливость данной теоремы непосредственно вытекает из неравенства $\left|\int_0^\infty f(t) \cdot \mathrm{e}^{-pt} dt\right| \le \frac{M}{u - s_0}$.◄

Теорема 3 (единственность оригинала). *Если функции $F(p)$ и $\Phi(p)$ совпадают, то совпадают между собой и соответствующие оригиналы $f(t)$ и $\varphi(t)$ во всех точках, в которых они непрерывны.*

Без доказательства.

Пример. Найти изображения функций

1) единичной функцией Хевисайда $\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \ge 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$

2) $f(t) = e^{at}$, где a – действительное или комплексное число.

Решение. 1. По формуле $F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$ при $u = \operatorname{Re} p > 0$ находим

$$F(p) = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-pt} dt = \lim_{N \to \infty} \int_0^N 1 \cdot e^{-pt} dt = \lim_{N \to \infty} \left(-\frac{1}{p} \cdot e^{-pt} \Big|_0^N \right) = \frac{1}{p}.$$

Итак, $\eta(t) \doteq \frac{1}{p}$.

2. По формуле $F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$ при $\operatorname{Re}(p-a)>0$ имеем

$$F(p)=\int_0^\infty e^{at}\cdot e^{-pt}dt=\lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-(p-a)t}dt=-\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{p-a}e^{-(p-a)t}\Big|_0^N\right)=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{p-a}-\frac{e^{-(p-a)N}}{p-a}\right)=\frac{1}{p-a}.$$

Итак, $e^{at}\doteq\frac{1}{p-a}$ при $\operatorname{Re}p>\operatorname{Re}a$.

Замечание. Функция $F(p)=\frac{1}{p-a}$ является аналитической не только в полуплоскости $\operatorname{Re}p>\operatorname{Re}a$, но и на всей комплексной плоскости, кроме точки $p=a$. Такая особенность наблюдается и для многих изображений.

3. Свойства преобразования Лапласа.

Преобразование Лапласа обладает следующими свойствами.

1 (линейность). *Линейной комбинации оригиналов соответствует линейная комбинация изображений, т.е. если* $f_1(t)\doteq F_1(p)$ *и* $f_2(t)\doteq F_2(p)$ *и* c_1, c_2 *– постоянные числа, то*

$$c_1f_1(t)+c_2f_2(t)\doteq c_1F_1(p)+c_2F_2(p).$$

► Находим изображение для функции $c_1f_1(t)+c_2f_2(t)$:

$$c_1f_1(t)+c_2f_2(t)\to\int_0^\infty[c_1f_1(t)+c_2f_2(t)]\cdot e^{-pt}dt=$$

$$=c_1\int_0^\infty f_1(t)\cdot e^{-pt}dt+c_2\int_0^\infty f_2(t)\cdot e^{-pt}dt=c_1F_1(p)+c_2F_2(p).$$ ◄

2 (подобие). *Если* $f(t)\doteq F(p)$ *и* $\lambda>0$, *то*

$$f(\lambda t)\doteq\frac{1}{\lambda}\cdot F\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$

► Находим изображение для функции $f(\lambda t)$

$$f(\lambda t)\doteq\int_0^\infty f(\lambda t)\cdot e^{-pt}dt=\begin{bmatrix}\text{замена } y=\lambda t,\\ t=\frac{y}{\lambda},\ dt=\frac{1}{\lambda}dy\end{bmatrix}=\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty f(y)\cdot e^{-\frac{p}{\lambda}y}dy=$$

$$=\frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$ ◄

3 (запаздывание). *Если* $f(t)\doteq F(p)$ *и* $\tau>0$, *то*

$$f(t-\tau)\doteq e^{-p\tau}\cdot F(p).$$

► Находим изображение для функции $f(t-\tau)$

$$f(t-\tau)\doteq\int_0^\infty f(t-\tau)\cdot e^{-pt}dt=\begin{bmatrix}\text{замена } y=t-\tau,\\ t=y+\tau,\ dt=dy,\\ t=0\Rightarrow y=-\tau,\\ t=\infty\Rightarrow y=\infty.\end{bmatrix}=\int_{-\tau}^\infty f(y)\cdot e^{-p\cdot(y-\tau)}dy=$$

$$=\int_0^\infty f(y)\cdot e^{-p\cdot y}e^{-p\tau}dy=e^{-p\tau}\cdot\int_0^\infty f(y)\cdot e^{-p\tau}dy=e^{-p\tau}\cdot F(p).$$ ◄

Графики функций $f(t)$ и $f(t-\tau)$ имеют одинаковый вид, но график $f(t-\tau)$ сдвинут на τ единиц вправо. Это означает, что процесс, описываемый функцией $f(t-\tau)$, начинается с опозданием на время τ относительно процесса, описываемого функцией $f(t)$ (рис.1).

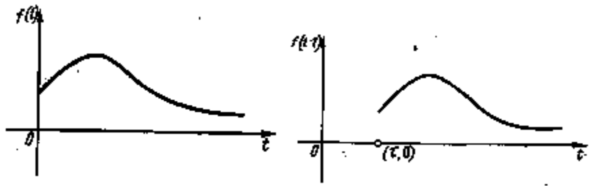

Рис.1.

4 (опережение). *Если* $f(t)\doteq F(p)$, *то*

$$f(t+\tau) \doteq e^{p\tau}\left[F(p) - \int_0^{\tau} f(t) e^{-pt} dt\right].$$

► Находим изображение для функции $f(t+\tau)$

$$f(t+\tau) \doteq \int_0^{\infty} f(t+\tau)\cdot e^{-pt}dt = \left[\begin{array}{l}\text{замена } y = t+\tau, \\ t = y-\tau, dt = dy, \\ t = 0 \Rightarrow y = \tau, \\ t = \infty \Rightarrow y = \infty.\end{array}\right] = \int_{\tau}^{\infty} f(y) e^{-p(y-\tau)} dy =$$

$$= e^{p\tau}\cdot\left(\int_0^{\infty} f(y)\cdot e^{-py}dy - \int_0^{\tau} f(y)\cdot e^{-py}dy\right) =$$

$$= e^{p\tau}\cdot\left(F(p) - \int_0^{\tau} f(y)\cdot e^{-py}dy\right). \blacktriangleleft$$

График функций $f(t)$ и $f(t+\tau)$ изображены на рисунке 2.

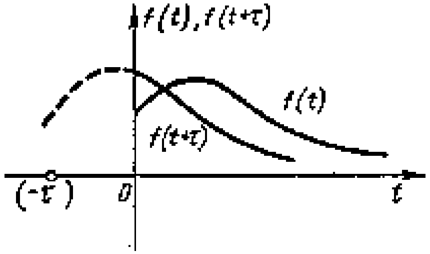

Рис.2.

5 (изображение периодической функции). *Пусть оригинал* $f(t)$ *имеет период* T, *т.е.* $f(t \pm T) = f(t)$. *Тогда она может быть представлена в виде сходящегося ряда*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_0(t - nT),$$

где $f_0(t) = \begin{cases} f(t) & \text{при } 0 < t < T, \\ 0 & \text{при } t < 0 \text{ и } t > T. \end{cases}$

Тогда $\sum_{n=0}^{\infty} f_0(t - nt) \doteq F_0(p)\cdot\frac{1}{1-e^{-pT}}$.

► На основании теоремы запаздывания, имеем

$f_0(t-T) \doteq e^{-pT}F_0(p)$,

$f_0(t-2T) \doteq e^{-2pT}F_0(p)$,

....,

$f_0(t-nT) \doteq e^{-npT}F_0(p)$,

где $F_0(p)$ – изображение функции $f(t)$ на начальном периоде.

Поэтому при достаточно больших p, $\operatorname{Re} p > s_0$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_0(t-nt) \doteq F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-npT}F_0(p) = F_0(p)\sum_{n=0}^{\infty} e^{-npT} =$$

$$= F_0(p)\cdot\frac{1}{1-e^{-pT}} \blacktriangleleft.$$

Пример. Найти изображение π -периодичной функции

$$f(t) = |\sin t|$$

при $0 \le t \le \pi$, график которой представлен на рисунке 3.

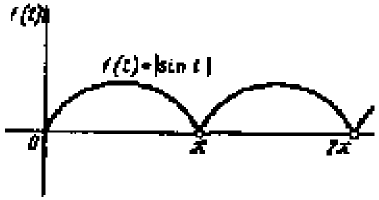

Рис.3.

Решение. Учитывая предыдущий пример, имеем

$$|\sin t| \doteq \frac{1}{1-e^{-\pi\cdot p}}\cdot\int_0^{\pi}\sin t\cdot e^{-pt}dt = \frac{1}{1-e^{-\pi\cdot p}}\cdot\left.\frac{e^{-pt}(p\sin t - \cos t)}{p^2+1}\right|_0^{\pi} =$$

$$=\frac{1+e^{-\pi p}}{\left(1-e^{-\pi p}\right)\cdot\left(p^2+1\right)}.$$

6 (затухание (смещение)). *Если* $f(t)\doteq F(p)$ *и* a *– постоянное число, то*

$$e^{at}\cdot f(t)\doteq F(p-a).$$

► Находим изображение для функции $e^{at}\cdot f(t)$

$$e^{at}\cdot f(t)\doteq\int_0^\infty e^{at}\cdot f(t)\cdot e^{-pt}dt=\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-(p-a)t}dt=F(p-a)$$

при $\operatorname{Re}(p-a)\ge s_0$.◄

7 (дифференцирование оригинала). *Если* $f(t)\doteq F(p)$ *и функции* $f'(t)$, $f''(t)$,..., $f^{(n)}(t)$ *являются оригиналами, то*

$f'(t)\doteq p\cdot F(p)-f(0)$,

$f''(t)\doteq p^2\cdot F(p)-p\cdot f(0)-f'(0)$,

$f'''(t)\doteq p^3\cdot F(p)-p^2\cdot f(0)-p\cdot f'(0)-f''(0)$,

....,

$f^{(n)}(t)\doteq p^n\cdot F(p)-p^{n-1}\cdot f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$.

► Находим изображение для функции $f'(t)$

$$f'(t)\doteq\int_0^\infty f'(t)\cdot e^{-pt}dt=\begin{bmatrix}\text{интегрируем по частям}\\ u=e^{-pt},\ dv=f'(t)dt,\\ du=-p\cdot e^{-pt}dt,\ v=f(t)\end{bmatrix}=f(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty+$$

$$+p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt=-f(0)+p\cdot F(p).$$

Находим изображение для функции $f''(t)$, используя пункт 1.

$$f''(t)=\left(f'(t)\right)'\doteq p\cdot\left(p\cdot F(p)-f(0)\right)-f'(0)=p^2F(p)-pf(0)-f'(0).$$

Аналогично находятся изображения производных 3-го, 4-го и т.д. порядков.◄

8 (дифференцирование изображения). *Если* $f(t)\doteq F(p)$, *то*

$F'(p)\doteq -t\cdot f(t)$,

$F''(p)\doteq t^2\cdot f(t)$,т

....,

$F^{(n)}(p)\doteq(-1)^n\cdot t^n\cdot f(t)$.

► Изображение $F(p)$ согласно теореме 1. является аналитической функцией в полуплоскости $\operatorname{Re}p=u>s_0$. Следовательно, у нее существуют производные любого порядка. Функции $(-1)^n\cdot t^n\cdot f(t)$ являются оригиналами с показателями роста s_0. Поэтому $\left|(-1)^n\cdot t^n\cdot f(t)\right|\le M\cdot e^{s_1 t}$, где $s_1>s_0$.

Тогда получаем $\left|(-1)^n\cdot t^n\cdot f(t)\cdot e^{-pt}\right|\le M\cdot e^{-(u-s_1)t}<M\cdot e^{-(s_2-s_1)t}$, где $s_2>s_1>s_0$, $\operatorname{Re}p=u>s_2$.

Так как интеграл $\int_0^\infty Me^{-(s_2-s_1)t}dt$ существует, несобственный интеграл $\int_0^\infty(-1)^n\cdot t^n\cdot f(t)\cdot e^{-pt}dt$ равномерно сходится относительно p в полуплоскости $\operatorname{Re}p=u\ge s_2>s_0$. Тогда возможно дифференцирование под знаком несобственных интегралов и

$$F'(p)=\left(\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-pt}dt\right)'=\int_0^\infty\left(f(t)\cdot e^{-pt}\right)'dt=\int_0^\infty f(t)\cdot(-t)\cdot e^{-pt}dt=$$

$$=\int_0^\infty\left(-t\cdot f(t)\right)\cdot e^{-pt}dt\doteq -t\cdot f(t),$$

$F''(p)=\left(F'(p)\right)'\to -t\cdot\left(-t\cdot f(t)\right)=t^2\cdot f(t)$ и так далее. ◄

9 (изображение оригинала (интегрирование оригинала). *Если* $f(t)\doteq F(p)$, *то*

$$\int_0^t f(z)dz\doteq\frac{1}{p}F(p).$$

► По свойству 4 оригиналов имеем, что функция $\varphi(t)=\int\limits_0^t f(z)dz$ является оригиналом с показателем роста s_0 и $\varphi(0)=0$.

Так как $\varphi'(t)=f(t)$, то $\varphi'(t)$ также оригинал с показателем роста s_0. Пусть $\varphi(t)\doteq\Phi(p)$. Используя свойство изображения производной оригинала, имеем $f(t)\doteq p\cdot\Phi(p)$. Так как $f(t)\doteq F(p)$, то $F(p)=p\cdot\Phi(p)$.

Отсюда $\Phi(p)=\frac{1}{p}F(p)$

или $\int\limits_0^t f(z)dz\doteq\frac{1}{p}F(p)$, при $\operatorname{Re}p=u>s_0$.◄

Следствие. *Пусть $f(t)$ – непрерывный оригинал на интервале $0\le t<\infty$, $f(t)\doteq F(p)$ и существует несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty f(t)dt$. Тогда имеет место соотношение $\int\limits_0^\infty f(t)dt=\lim\limits_{p\to 0}F(p)$.*

10 (интегрирование изображения). *Если $f(t)\doteq F(p)$ и интеграл $\int\limits_p^\infty F(\rho)d\rho$ сходится, то*

$$\int\limits_p^\infty F(\rho)d\rho\doteq\frac{f(t)}{t}.$$

► Имеем

$$\int\limits_p^\infty F(\rho)d\rho=\int\limits_p^\infty\left(\int\limits_0^\infty f(t)\cdot e^{-\rho t}dt\right)d\rho=\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_\rho^\infty e^{-\rho t}d\rho\right)\cdot f(t)dt=$$

$$=\int\limits_0^\infty\left(-\frac{1}{t}\cdot e^{-\rho t}\Big|_p^\infty\right)\cdot f(t)dt=\int\limits_0^\infty\frac{f(t)}{t}\cdot e^{-pt}dt.◄$$

Следствие. *Пусть*

1) $\frac{f(t)}{t}$ – оригинал непрерывный на $0\le t<\infty$,

2) $f(t)\doteq F(p)$,

3) несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty\frac{f(t)}{t}dt$ сходится.

Тогда имеет место равенство $\int\limits_0^\infty\frac{f(t)}{t}dt=\int\limits_0^\infty F(x)dx$.

В таблице 1 приведены изображения некоторых функций (оригиналов).

Таблица 1

№	Оригинал	Изображение
1	1	$\frac{1}{p}$
2	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
3	t	$\frac{1}{p^2}$
4	$\sin wt$	$\frac{w}{p^2+w^2}$
5	$\cos wt$	$\frac{p}{p^2+w^2}$
6	$\operatorname{sh} wt$	$\frac{w}{p^2-w^2}$
7	$\operatorname{ch} wt$	$\frac{p}{p^2-w^2}$
8	$e^{at}\cdot\sin wt$	$\frac{w}{(p-a)^2+w^2}$
9	$e^{at}\cdot\cos wt$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+w^2}$

10	$e^{at} \cdot \operatorname{sh} wt$	$\dfrac{w}{(p-a)^2 - w^2}$
11	$e^{at} \cdot \operatorname{ch} wt$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2 - w^2}$
12	t^n, n – целое число	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
13	$e^{at} \cdot t^n$	$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
14	$t \cdot \sin wt$	$\dfrac{2wp}{\left(p^2 + w^2\right)^2}$
15	$t \cdot \cos wt$	$\dfrac{p^2 - w^2}{\left(p^2 + w^2\right)^2}$
16	$t \cdot \operatorname{sh} wt$	$\dfrac{2wp}{\left(p^2 - w^2\right)^2}$
17	$t \cdot \operatorname{ch} wt$	$\dfrac{p^2 + w^2}{\left(p^2 - w^2\right)^2}$
18	$e^{at} \cdot t \cdot \sin wt$	$\dfrac{2w(p-a)}{\left((p-a)^2 + w^2\right)^2}$
19	$e^{at} \cdot t \cdot \cos wt$	$\dfrac{(p-a)^2 - w^2}{\left((p-a)^2 + w^2\right)^2}$
20	$\dfrac{1}{2w^3}(\sin wt - wt\cos wt)$	$\dfrac{1}{\left(p^2 + w^2\right)^2}$
21	$\dfrac{1}{2w^3}(wt \operatorname{ch} wt - \operatorname{sh} wt)$	$\dfrac{1}{\left(p^2 - w^2\right)^2}$
22	$\sin(wt \pm \varphi)$	$\dfrac{w\cos\varphi \pm p\sin\varphi}{p^2 + w^2}$
23	$\cos(wt \pm \varphi)$	$\dfrac{p\cos\varphi \mp w\sin\varphi}{p^2 + w^2}$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение оригинала и перечислите их свойства.
2. Что называется изображением? Перечислите свойства изображений.
3. Дайте определение преобразования Лапласа. Перечислите свойства преобразования Лапласа.