Лекция 6. РЯДЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. Ряды комплексных чисел.
2. Функциональные ряды.
3. Равномерная сходимость функционального ряда.
4. Степенные ряды.

1. Ряды комплексных чисел.

Определение 1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, членами которого являются комплексные числа, называется ***числовым рядом с комплексными членами***, где a_k – ***члены*** ряда.

Если положить $a_k = \alpha_k + i\beta_k$, $k \in \mathrm{N}$, – комплексные постоянные, то ряд с комплексными членами запишется в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k + i\beta_k .$$

Определение 2. Сумма

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k + i\beta_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k + i\sum_{k=1}^{n} \beta_k$$

называется ***частичной суммой*** ряда,
сумма

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k + i\beta_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k + i\sum_{k=n+1}^{\infty} \beta_k$$

называется ***остатком*** ряда.

Определение 3. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k + i\beta_k$ называется ***сходящимся***, если существует предел последовательности частичных сумм $(S_n)_{n=1}^{\infty}$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S ,$$

комплексное число S называется ***суммой*** ряда.

В случае сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k + i\beta_k$ его остаток r_n стремится к нулю при неограниченном возрастании n, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер N, что при $n > N$ выполняется неравенство $|r_n| < \varepsilon$.

Очевидно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k + i\beta_k$ сходится тогда и только тогда, когда сходится каждый из рядов $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$. При этом $S = S_1 + iS_2$, где S_1 – сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$, S_2 – сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$.

Это позволяет проводить исследование сходимости рядов с комплексными членами, основываясь на сходимости рядов с действительными членами. Для исследования применяются известные методы из математического анализа функций действительной переменной (принципы сравнения рядов, признак д'-Аламбера и Коши и другие достаточные признаки сходимости рядов).

Теорема 1 (необходимое условие сходимости). *Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k + i\beta_k$ сходится, то его общий член $a_k = \alpha_k + i\beta_k$ стремится к нулю при $k \to \infty$:*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}(\alpha_k + i\beta_k) = 0 .$$

Без доказательства.

Теорема 2 (достаточное условие сходимости). *Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k + i\beta_k$ сходится, если сумма $\sum_{k=n}^{n+m} \alpha_k + i\beta_k$ стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер N , что $\left|\sum_{k=n}^{n+m} \alpha_k + i\beta_k\right| < \varepsilon$, если $n > N$, $m > N$.*

Без доказательства.

Добавление или отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на сходимость ряда.

Определение 4. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k + i\beta_k$ называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд с действительными положительными членами $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$, $a_k = \alpha_k + i\beta_k$.

В случае абсолютной сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k + i\beta_k$ имеем абсолютную сходимость рядов $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k$.

2. Функциональные ряды.

Определение 5. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)$, членами которого являются функции $u_k(z)$ комплексной переменной z, называется ***функциональным*** рядом.

Определение 6. Точка z_0 называется ***точкой сходимости*** ряда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)$, если сходится числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z_0)$.

Определение 7 Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ называется ***сходящимся*** в области E, если он сходится в каждой точке этой области.

Совокупность всех точек сходимости называется ***областью сходимости*** функционального ряда. В общем случае область сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ может быть многосвязной и замкнутой.

Определение 8. ***Суммой*** функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ в области E называется однозначная функция $f(z)$, значение которой в каждой фиксированной точке $z_0 \in E$ равно сумме соответствующего числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z_0)$:

$$f(z_0) = \sum_{k=1}^{\infty}u_k(z_0) \text{ при } z_0 \in E.$$

Другими словами функция $f(z)$ является суммой функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ в точке z_0 области E, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер N, что $\left|f(z_0) - \sum_{k=1}^{\infty}u_k(z_0)\right| < \varepsilon$ при $n > N$. В общем случае номер N зависит от выбора величин ε и z.

3. Равномерная сходимость функционального ряда.

Определение 9. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ называется ***равномерно сходящимся*** к функции $f(z)$ в области E, если значение N зависит только от ε и одинаково для $z \in E$ одновременно:

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z) \rightrightarrows f(z).$$

Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ равномерно сходится в области E, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер N, что для любых $z_1 \in E$ и $z_2 \in E$ имеет место неравенство

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$$

Теорема 3 (признак Вейерштрасса). *Если в некоторой области E члены ряда, составленного из функций комплексной* *переменной, не превосходят по модулю соответствующих членов сходящегося числового ряда с положительными членами, то указанный функциональный ряд в области E сходится равномерно.*

Равномерно сходящиеся функциональные ряды обладают следующими **свойствами**.

1 (непрерывность). *Сумма равномерно сходящегося в области E ряда, состоящего из непрерывных функций, есть функция, непрерывная в области E.*

2 (интегрирование). *Равномерно сходящийся в области E ряд непрерывных функций можно почленно интегрировать вдоль всякой кусочно-гладкой кривой Γ, целиком лежащей в области. При этом сумма ряда, составленного из интегралов от членов исходного ряда, равна интегралу от суммы исходного ряда вдоль той же кривой:*

$$\int_\Gamma \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)\right) dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Gamma u_k(z)\,dz = \int_\Gamma f(z)\,dz .$$

3 (дифференцирование). *Пусть $u_k(z)$ аналитические в области E функции и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ сходится равномерно в E к $f(z)$, т.е. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z) \rightrightarrows f(z)$. Тогда 1) $f(z)$ аналитическая в области E, 2) функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ в области E можно дифференцировать любое число раз и справедлива формула*

$$\frac{d^n}{dz^n}\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(n)}(z) = f^{(n)}(z).$$

► *Шаг 1.* Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ состоит из непрерывных функций и сходится равномерно к $f(z)$, то $f(z)$ непрерывна в E.

Для любого замкнутого контура Γ, целиком лежащего в E, имеем

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{\infty} \oint_\Gamma u_k(z)\,dz = 0 .$$

По теореме Морера $f(z)$ является аналитичной в E.

Шаг 2. Умножим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ на $\dfrac{1}{2\pi i}\cdot\dfrac{1}{(z-z_0)^{n+1}}$, где z_0 – фиксированная точка области E. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{u_k(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \rightrightarrows \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} .$$

И пусть $|z-z_0| \ge \alpha$ для любого $z \in \overline{E}$, где $\overline{E} = E \cup \partial E$, ∂E – граница области E.

Отсюда $\left|\dfrac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\right| \le \left|\dfrac{1}{\alpha^{n+1}}\right|$.

Проинтегрируем $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2\pi i}\cdot\dfrac{u_k(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = \dfrac{1}{2\pi i}\cdot\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ по границе области ∂E

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!}{2\pi i}\cdot \oint_{\partial E} \frac{u_k(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{n!}{2\pi i}\cdot \oint_{\partial E} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz .$$

Отсюда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k^{(n)}(z_0) = f^{(n)}(z_0)$.◄

4. Степенные ряды.

Определение 10. ***Степенным рядом*** называется ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k ,$$

где c_k – постоянные комплексные числа (коэффициенты ряда).

Для степенных рядов справедлива следующая теорема.

Теорема 4 (Абеля). *Если степенной ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ *сходится в точке* z_1, *то он сходится во всех точках* z, *удовлетворяющих условию* $|z-z_0|<|z_1-z_0|$. *Если степенной ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ *расходится в точке* z_2, *то он расходится во всех точках* z, *удовлетворяющих условию* $|z-z_0|>|z_2-z_0|$.

Без доказательства.

Следствие 1. *Для степенного ряда* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$, *имеющего как точки сходимости (кроме* z_0, *где ряд всегда сходится), так и точки расходимости, всегда существует такое действительное число* $R>0$, *что внутри круга* $|z-z_0|<R$ *ряд сходится, а вне этого круга – расходится.*

В круге радиуса ρ, $\rho<R$, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ сходится равномерно.

Определение 11. Область $|z-z_0|<R$ называется ***кругом сходимости***, а число R – ***радиусом*** сходимости степенного ряда.

Радиус сходимости R вычисляется по формуле Коши

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|c_k|}},$$

где $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|c_k|}$ — верхний предел последовательности коэффициентов $\left(\sqrt[k]{|c_k|}\right)_{k=1}^{\infty}$.

Если $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|c_k|}=\infty$, то $R=0$ и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ сходится лишь в точке z_0.

Если $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|c_k|}=0$, то $R=\infty$ и ряд сходится на всей комплексной плоскости.

Радиус сходимости R может также вычисляется по формуле $R=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right|$, если этот предел существует.

Следствие 2. *Внутри круга сходимости* $|z-z_0|<R$ *ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ *сходится к аналитической функции.*

Следствие 3. *Степенной ряд внутри круга сходимости можно почленно интегрировать и почленно дифференцировать любое число раз. При этом радиус сходимости каждого вновь полученного ряда равен радиусу сходимости исходного ряда, а над суммой ряда выполняется то же действие, что и над самим рядом.*

Примеры. 1. Найти сумму ряда $\sum_{k=0}^{\infty} (z-z_0)^k$.

2. Найти область сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-i)^k}{(k+1)2^k}$.

Решение. 1. Каждый коэффициент ряда равен 1, поэтому радиус сходимости $R=1$. Заданный ряд является рядом геометрической прогрессии, для которого

$$S_n(z)=1+(z-z_0)+\ldots+(z-z_0)^n=\frac{1-(z-z_0)^{n+1}}{1-(z-z_0)}.$$

Поэтому сумма ряда есть аналитическая функция

$$f(z)=\lim_{n\to\infty} S_n(z)=\frac{1}{1-(z-z_0)}.$$

2.Радиус сходимости есть $R=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right|=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{2^{k+1}(k+2)}{(k+1)2^k}\right|=2$.

Поэтому ряд сходится в области $|z-i|<2$.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется числовым рядом комплексных чисел?
2. Какой ряд с комплексными числами называется сходящимся?
3. Сформулируйте необходимое условие сходимости ряда с комплексными числами.
4. Какой ряд с комплексными числами называется абсолютно сходящимся?
5. Какой ряд называется функциональным рядом комплексных функций? Что называется точкой сходимости и областью сходимости такого ряда?
6. Какой функциональный ряд называется равномерно сходящимся? Перечислите основные свойства равномерно сходящихся рядов.
7. Какой функциональный ряд называется степенным? Какими свойствами он обладает?