Лекция 5. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ

1. Первообразная и неопределенный интеграл
2. Формула Коши.
3. Принцип максимума модуля аналитической функции.
4. Интеграл типа Коши, теоремы Коши – Лиувилля и Морера.

1. Первообразная и неопределенный интеграл.

Пусть функция $f(z)$ определена в области E (односвязной или многосвязной).

Определение 1. ***Первообразной*** функции $f(z)$ в области E называется такая функция $F(z)$, что в каждой точке $z \in E$ выполняется равенство

$$F'(z) = f(z).$$

Теорема 1. *Если $F(z)$ – первообразная функции $f(z)$ в области E, то совокупность всех первообразных функции $f(z)$ определяется формулой $F(z)+c$, где c – произвольная постоянная.*

► Пусть $F_1(z)$ и $F_2(z)$ две первообразные функции $f(z)$ в области E. Рассмотрим функцию $F(z) = F_1(z) - F_2(z)$. Производная этой функции равна

$$F'(z) = F_1'(z) - F_2'(z) = f(z) - f(z) = 0.$$

С другой стороны $F(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Тогда

$$F'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0.$$

Отсюда находим $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$ для любых $(x,y) \in E$.

Следовательно, функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ постоянные в области E, т. е. $F(z) = c$, где $c = \text{const}$. ◄

Определение 2. Совокупность всех первообразных, функции $f(z)$ называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(z)$.

Обозначается: $\int f(z)dz = F(z) + c$, где $F'(z) = f(z)$.

Теорема 2 (формула Ньютона-Лейбница). *Если функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области E, то интеграл от $f(z)$ вдоль любого кусочно-гладкого контура, соединяющего две любые точки z_0 и z_1 этой области и лежащего целиком в ней, равен*

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta = F(z_1) - F(z_0).$$

►Пусть $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ есть произвольная первообразная функции $f(z)$. то имеем $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = F(z) + c$, где c — некоторое комплексное число. Полагая здесь $z = z_0$, получим

$$0 = F(z_0) + c,$$

т.е. контур замкнется и интеграл равен нулю.

Отсюда $c = -F(z_0)$.

Тогда $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = F(z) - F(z_0)$.

Полагая $z = z_1$, имеем

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta = F(z_1) - F(z_0). \blacktriangleleft$$

Интегралы от элементарных функций комплексного переменного в области их аналитичности вычисляются с помощью тех же формул и методов, что и в случае действительного переменного.

Пример. Вычислить интегралы

1) $\int_0^i z^2 dz$, 2) $\oint_l (z - z_0)^n dz$, $n \neq 1$.

Решение. 1. Имеем

$$\int_0^i z^2 dz = \left.\frac{z^3}{3}\right|_0^i = -\frac{i}{3}.$$

2. Параметрические уравнения окружности с центром в точке z_0 есть

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos t, \\ y = y_0 + R\sin t. \end{cases}$$

Отсюда комплексно-параметрическое уравнение окружности примет вид:

$$z = x + i\,y = x_0 + R\cos t + i(y_0 + R\sin t) = x_0 + i\,y_0 + R(\cos t + i\sin t)$$
$$= z_0 + R\cdot e^{it},$$

где $0 \le t \le 2\pi$.

Тогда

$$\oint_l (z-z_0)^n dz = \int_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} \left(R\cdot e^{it}\right)^n R\cdot i\cdot e^{it} dt =$$

$$= i\cdot R^{n+1}\cdot \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = i\cdot R^{n+1}\cdot \left.\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\right|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{R^{n+1}}{n+1}\cdot\left(\cos 2\pi(n+1) + i\sin 2\pi(n+1) - e^0\right) = \frac{R^{n+1}}{n+1}(1-1) = 0.$$

2. Формула Коши.

Теорема 3. *Пусть функция $f(z)$ — аналитическая в односвязной области E. Тогда для любой точки $z_0 \in E$ и для любого замкнутого кусочно-гладкого контура Γ, целиком лежащего в области E и содержащего точку z_0 внутри себя, справедливо равенство*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\, i}\oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz,$$

где интегрирование производится в положительном направлении замкнутого контура Γ.

► Рассмотрим функцию $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ как функцию z в двухсвязной области E', получающейся из E удалением точки z_0. Очевидно, что $\varphi(z)$ определена всюду в E' и является аналитической в ней. Опишем из точки z_0, как из центра, окружность c_ρ столь малого радиуса ρ, чтобы она была целиком расположена в области E и не пересекает Γ (рис.1).

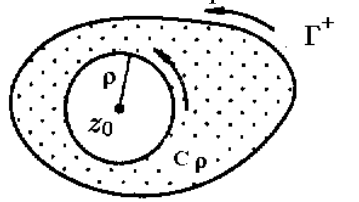

Рис.1.

Тогда, согласно формуле Коши для многосвязной области, имеем

$$\oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \oint_{c_\rho^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz.$$

Умножая обе части данного равенства на $\dfrac{1}{2\pi\, i}$, получим

$$\frac{1}{2\pi\, i}\oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \frac{1}{2\pi\, i}\oint_{c_\rho^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz.$$

Отсюда следует

$$\frac{1}{2\pi\, i}\oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \frac{1}{2\pi\, i}\oint_{c_\rho^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \frac{1}{2\pi\, i}\oint_{c_\rho^+} \frac{f(z_0) + f(z) - f(z_0)}{z-z_0} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi\, i} f(z_0)\oint_{c_\rho^+} \frac{1}{z-z_0} dz + \frac{1}{2\pi\, i}\oint_{c_\rho^+} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} dz.$$

Так как $\displaystyle\oint_{c_\rho^+} \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi\, i$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\frac{1}{2\pi i}f(z_0)\cdot 2\pi i+\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_\rho^+}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\,.$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_\rho^+}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\,.$$

Из последнего равенства имеем

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-f(z_0)\right|\le\frac{1}{2\pi}\oint_{c_\rho^+}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}|dz|\,.$$

Так как функция $f(z)$ является аналитической в области E и, следовательно, непрерывной в точке $z_0\in E$, то для любого числа $\varepsilon>0$ найдется $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что неравенство $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$ ($z\in c_\rho$) справедливо, как только $\rho<\delta$.

Значит,

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_\rho^+}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-f(z_0)\right|\le\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{\rho}\cdot 2\pi\rho=\varepsilon\,.$$

Так как ε может быть выбрано сколь угодно малым, а левая часть предыдущего неравенства не зависит ε, и, следовательно, равна нулю, то

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_\rho^+}\frac{f(z)}{z-z_0}dz\,.$$

Так как функция $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ является аналитической в области E', то, согласно теореме Коши для многосвязной области, окружность c_ρ, лежащая в области E, не изменяя значения интеграла, находящегося в правой части предыдущего равенства, может быть заменена на любой замкнутый кусочно-гладкий контур Γ, лежащий в области E'. Тогда последнее равенство принимает вид

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+}\frac{f(z)}{z-z_0}dz\,.◄$$

Интеграл $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+}\dfrac{f(z)}{z-z_0}dz$ называется ***интегралом Коши*** функции $f(z)$.

Замечание. Если в условиях теоремы точка $z_0\in E$ расположена вне области, ограниченной контуром Γ, то $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+}\dfrac{f(z)}{z-z_0}dz=0$.

Это утверждение непосредственно следует из теоремы Коши, ибо в области G ограниченной контуром Γ, функция $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ является аналитической.

Теорема 4. *Пусть функция $f(z)$ — аналитическая в односвязной области E, ограниченной кусочно-гладким контуром Γ, и непрерывна в $\overline{E}$. Тогда для любой точки $z_0\in E$ справедливо равенство*

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+}\frac{f(z)}{z-z_0}dz\,.$$

Пример. Пользуясь формулой Коши, вычислить интеграл $\oint_{|z|=1}\dfrac{e^z\cdot\cos\pi z}{z^2+2z}dz$, где окружность проходится в положительном направлении.

Решение. Внутри области, ограниченной окружностью $|z|=1$, находится точка $z=0$, в которой знаменатель функции $f(z)=\dfrac{e^z\cdot\cos\pi z}{z^2+2z}$ обращается в нуль.

Перепишем заданный интеграл так

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z \cdot \cos \pi z}{z^2 + 2z} d\zeta = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\dfrac{e^z \cdot \cos \pi z}{z+2}}{z}.$$

Функция $f(z) = \dfrac{e^z \cdot \cos \pi z}{z+2}$ является аналитической в круге $|z| \le 1$. Применяя формулу Коши, при $z_0 = 0$ получим

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z \cdot \cos \pi z}{z^2 + 2z} dz = 2\pi\, i \cdot f(0) = 2\pi\, i \cdot \frac{1}{2} = \pi\, i.$$

Теорема 5 (о среднем для аналитических функций). *Значение аналитической функции $f(z)$ в любой точке z_0 области E, в которой функция $f(z)$ является аналитической, равно среднему арифметическому ее значений на любой окружности с центром в точке z_0, целиком лежащей в области E.*

► Пусть c_ρ — окружность радиуса ρ с центром в точке z_0, целиком лежащая в области E. Комплексно-параметрическое уравнение окружности c_ρ имеет вид $z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$ ($0 \le \varphi \le 2\pi$).

Следовательно,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\, i} \oint\limits_{c_\rho^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0 + \rho e^{i\varphi}\right) i\rho e^{i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f\left(z_0 + \rho e^{i\varphi}\right) d\varphi = \frac{1}{2\pi\rho} \oint\limits_{c_\rho^+} f(z)|dz| = \frac{1}{2\pi\rho} \oint\limits_{c_\rho^+} f(z)\, dl,$$

где dl – дифференциал дуги окружности. Последний интеграл можно рассматривать как среднее арифметическое значений $f(z)$ на окружности $|z - z_0| = \rho$. ◄

3. Принцип максимума модуля аналитической функции.

Пусть функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ – аналитическая в области E.

Лемма 1. *Если в области E, в которой определена аналитическая функция*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

и постоянна действительная часть $u(x, y)$ функции $f(z)$ или постоянен модуль функции $f(z)$, то функция $f(z)$ постоянна в области E.

► *Случай 1.* $u(x, y) = \text{const}$ в области E.

Тогда $\forall (x, y) \in E$ имеем $\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \dfrac{\partial u(x, y)}{\partial y} \equiv 0$. Так как функция $f(z)$ – аналитическая в области E, то выполняются условия Коши–Римана

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}.$$

Отсюда $\dfrac{\partial v(x, y)}{\partial x} = \dfrac{\partial v(x, y)}{\partial y} \equiv 0$.

Следовательно, $v(x, y) = \text{const}$ $\forall (x, y) \in E$. Таким образом, $f(z) = \text{const}$ $\forall z \in E$.

Случай 2. $|f(z)| = M$, где M – постоянная.

Если $M = 0$, то $\forall (x, y) \in E$

$$|f(z)| = \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)} \equiv 0.$$

Отсюда следует, что $u(x, y) = v(x, y) \equiv 0$, т.е. $f(z) \equiv 0$ $\forall z \in E$

Пусть $M \ne 0$. Тогда, очевидно, что $f(z) \ne 0$ при $z \in E$. Следовательно, в этом случае $\ln f(z)$ является аналитической функцией в области E (как сложная функция, составленная из аналитических функций). Так как

$$\mathrm{Ln}\, f(z) = \ln|f(z)| + i \arg f(z)$$

и ее действительная часть $\ln|f(z)|$ является постоянной в области E, то по доказанному в случае 1 и сама функция $\mathrm{Ln}\, f(z)$ является постоянной в этой области. Следовательно, и функция $f(z)$ постоянна в области E. ◄

Теорема 6 (о максимуме модуля аналитической функции). *Пусть функция $f(z)$, не равная тождественно постоянной, яв-*

ляется аналитической в области E и непрерывна в замкнутой области $\overline{E}$. Тогда максимальное значение $|f(z)|$ достигается только на границе области $\overline{E}$ (т.е. $|f(z)|$ не может достигать максимума внутри области E кроме случая, когда $f(z)=\text{const}$).

Без доказательства.

Замечание. Если функция $f(z)$ не постоянна, аналитична в E и непрерывна в $\overline{E}$ и, кроме того, не обращается в нуль, то минимум $|f(z)|$ не может достигаться внутри $\overline{E}$.

4. Интеграл типа Коши, теоремы Коши–Лиувилля и Морера.

Пусть в плоскости комплексного переменного $\mathbf{C}(Oxy)$ задана произвольная кусочно-гладкая кривая Γ (замкнутая или незамкнутая) и на ней — произвольная непрерывная функция $f(z)$.

Определение 2. Интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$, где z – произвольная точка комплексной плоскости, не лежащая на кривой Γ, называется ***интегралом типа Коши***.

Интеграл Коши является частным случаем интеграла типа Коши. В самом деле, выражение $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$ становится интегралом Коши, если контур Γ является замкнутым (простым или составным), и функция $f(z)$— аналитической в области E, содержащей в себе целиком контур Γ.

Теорема 7. *Пусть Γ — кусочно-гладкая кривая, расположенная в комплексной плоскости $\mathbf{C}(Oxy)$ и $f(z)$ – непрерывная функция на этой кривой. Тогда функция $\Phi(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$, является 1) аналитической во всякой области E комплексной плоскости $\mathbf{C}(Oxy)$, не содержащей точек кривой Γ,*

2) бесконечно дифференцируемой в области E, причем ее производная любого порядка n может быть получена путем n-кратного дифференцирования по z подынтегральной функции

$$\Phi^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z_0)}{(z-z_0)^{n+1}}dz.$$

Без доказательства.

Следствия. 1. *Пусть $f(z)$ аналитическая в области E функция. Тогда функция $f(z)$ бесконечно дифференцируема в этой области и ее производная n-го порядка находится по формуле*

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^+}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\ n=1,2,\dots.$$

2. *Производные любого порядка от функции $f(z)$, аналитической в области E, также являются аналитическими в этой области.*

Этот факт непосредственно следует из того, что по следствию 1 каждая функция $f^{(n)}(z)$, $n=1,2,\dots$, сама является дифференцируемой в области E.

3. *В любой точке z области E, в которой функция $f(z)$ является аналитической, справедливы неравенства Коши*

$$\left|f^{(n)}(z)\right|\le\frac{n!\cdot M(\rho)}{\rho^n},\ n=1,2,\dots,$$

где ρ — радиус произвольной окружности c_ρ с центром в точке z_0, целиком лежащей в области E; $M(\rho)$– наибольшее значение модуля функции $f(z)$ на окружности c_ρ.

Пример. Пользуясь формулой для производных аналитической функции, вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^3}dz$, где окружность проходится в положительном направлении.

Решение. Подынтегральная функция $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3}$ является аналитической в области $|z|\le 1$ всюду, кроме точки $z=0$. Функция $f(z)=\cos z$ является всюду аналитической в круге $|z|\le 1$. При $n=2$ по следствию 1 имеем $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{\cos z}{z^3}dz=\dfrac{2\pi i}{2!}f''(0)$.

Так как $f''(z)=-\cos z$ и $f''(0)=-1$, то

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^3}dz=\pi\cdot i\cdot(-1)=-\pi\cdot i.$$

Теорема 8 (Коши—Лиувилля). *Если функция $f(z)$ аналитична во всей комплексной плоскости* $\mathbf{C}\ (Oxy)$ *и ограничена по модулю, то она постоянна.*

► Пусть всюду $|f(z)|\le M$, где M — некоторое положительное число. Для произвольной точки z комплексной плоскости и для любого $\rho>0$ неравенство Коши при $n=1$ имеет вид $|f'(z)|\le\dfrac{M}{\rho}$. Правая часть полученного соотношения при увеличении ρ может стать сколь угодно малой, а левая часть не зависит от ρ, поэтому $|f'(z)|=0$.Так как z – произвольно, то на всей комплексной плоскости $f'(z)\equiv 0$

Отсюда следует, что $f(z)=c$, где $c=\text{const}$.◄

Теорема 9 (Морера). *Если функция $f(z)$ непрерывна в области E и интеграл $\int\limits_\Gamma f(z)dz=0$ по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру Γ, лежащему в области E, то $f(z)$ является аналитической функцией в области E.*

Без доказательства.

Из условия теоремы следует, что в области E интеграл $\int\limits_{z_0}^{z}f(\zeta)d\zeta$ не зависит от пути Γ интегрирования, соединяющего

фиксированную точку z_0 с произвольной точкой z (z_0 и z лежат в области E) и определяет аналитическую функцию z

$$F(z)=\int\limits_{z_0}^{z}f(\zeta)d\zeta$$

для которой $F'(z)=f(z)$, $z\in E$.

Тогда, согласно следствию 1 теоремы 7 имеем, что функция $f(z)$ как производная от аналитической функции $F(z)$, является функцией, аналитической в области E.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется первообразной для функции комплексного переменного?
2. Дайте определение неопределенного интеграла для функции комплексного переменного. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
3. Докажите интеграл Коши.
4. В чем суть теоремы о среднем для функции комплексного переменного?
5. В чем состоит принцип максимума модуля аналитической функции?
6. Какой интеграл называется интегралом типа Коши?
7. Запишите неравенство Коши для функции комплексного переменного.
8. Сформулируйте и докажите теорему Коши-Лиувилля.
9. В чем суть теоремы Морера?