Лекция 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. Определение интеграла.
2. Связь интеграла комплексной переменной с криволинейным интегралом второго рода.
3. Свойства интегралов по комплексному переменному.
4. Основная теорема Коши.

1. Определение интеграла.

Пусть $w = f(z)$ — однозначная функция комплексного переменного z, определенная на некоторой гладкой кривой Γ с началом в точке z_0 и концом в точке z_1. Кривая Γ может быть как замкнутой, так и незамкнутой. Направление движения по кривой Γ от начальной точки z_0 к конечной точке z_1 называется ***положительным*** направлением на кривой Γ и обозначается через Γ^+. Противоположное направление на кривой Γ называется ***отрицательным*** и обозначается Γ^-.

Разобьем кривую Γ на n частичных дуг произвольно выбранными точками ξ_0, ξ_1, ξ_2, …, ξ_{n-1}, ξ_n, причем $\xi_0 = z_0$, $\xi_n = z_1$, расположенными последовательно в положительном направлении кривой Γ (рис. 1).

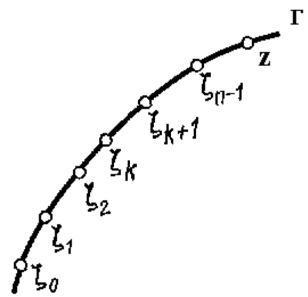

Рис.1.

На каждой частичной дуге $\xi_k\xi_{k+1}$, $k = 0,1,\cdots,n-1$, выберем произвольную точку ξ_κ^* и составим интегральную сумму

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\xi_\kappa^*\right)\Delta\xi_\kappa ,$$

где $\Delta\xi_\kappa = \xi_{\kappa+1} - \xi_\kappa$.

Определение 1. Комплексное число J называется ***пределом*** интегральных сумм $\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\xi_\kappa^*\right)\Delta\xi_\kappa$, при $\max\left|\Delta\xi_\kappa\right| \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при любом разбиении кривой Γ на частичные дуги $\xi_k\xi_{k+1}$, $k = 0,1,\cdots,n-1$, и при любом выборе точек ξ_κ^* на частичных дугах $\xi_\kappa\xi_{\kappa+1}$ имеет место неравенство $\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_\kappa^*)\Delta\xi_\kappa - J\right| < \varepsilon$ при $\max\left|\Delta\xi_\kappa\right| < \delta$.

Определение 2. Предел интегральных сумм $\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\xi_\kappa^*\right)\Delta\xi_\kappa$ при $\max\left|\Delta\xi_\kappa\right| \to 0$, если он существует, называется ***интегралом от функции*** $f(z)$ ***вдоль кривой*** Γ (в выбранном направлении).

Обозначается:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \lim_{\max\left|\Delta\xi_\kappa\right| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\xi_\kappa^*\right)\Delta\xi_k .$$

Если для функции $f(z)$, определенной на кривой Γ, данный предел существует, то говорят, что функция $f(z)$ ***интегрируема по кривой*** Γ. Кривая Γ называется ***путем*** или ***контуром*** интегрирования.

Интеграл от функции $f(z)$ в положительном направлении кривой Γ обозначается $\int_{\Gamma^+} f(z)dz$. Интеграл от функции $f(z)$ в отрицательном направлении кривой Γ – символом $\int_{\Gamma^-} f(z)dz$. В случае замкнутого контура Γ интеграл от функции $f(z)$ по кривой Γ обозначается символом $\oint_\Gamma f(z)dz$.

Положительным направлением обхода замкнутого простого контура Γ считается такое направление движения, при котором область, ограниченная данным замкнутым контуром и находящаяся внутри контура Γ, остается слева от направления движения. Противоположное направление обхода замкнутого контура Γ называется отрицательным. Интеграл по замкнутому контуру Γ в положительном направлении обозначается $\oint\limits_{\Gamma^+} f(z)dz$, интегрирование в отрицательном направлении – символом $\oint\limits_{\Gamma^-} f(z)dz$.

2. Связь интеграла комплексной переменной с криволинейным интегралом второго рода.

Теорема 1. *Если функция* $f(z)$ *комплексного переменного* z *непрерывна на гладкой кривой* Γ, *заданной параметрическими уравнениями* $x = x(t)$, $y = y(t)$, *а начальная и конечная точка дуги соответствуют значениям* $t=\alpha$ *и* $t=\beta$, *то интеграл* $\int\limits_\Gamma f(z)dz$ *существует и справедлива формула*

$$\int\limits_\Gamma f(z)dz = \int\limits_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt,$$

где $z(t) = x(t) + iy(t)$, $\alpha \le t \le \beta$.

Без доказательства.

Теорема 2. *Если функция* $f(z)$ *комплексного переменного* z *непрерывна на гладкой кривой* Γ, *то интеграл* $\int\limits_\Gamma f(z)dz$ *существует и справедлива формула*

$$\int\limits_\Gamma f(z)dz = \int\limits_\Gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int\limits_\Gamma v(x,y)dx + u(x,y)dy.$$

► Пусть $f(z)$ непрерывна на кривой Γ, уравнение которой $z(t) = x(t) + iy(t)$, $\alpha \le t \le \beta$.

Тогда

$$\int\limits_\Gamma f(z)dz = \int\limits_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta [u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t))]\cdot[x'(t) + iy'(t)]dt =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta [u(x(t),y(t))\cdot x'(t) - v(x(t),y(t))\cdot y'(t)] +$$

$$+ i[v(x(t),y(t))\cdot x'(t) + u(x(t),y(t))\cdot y'(t)]dt =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta [u(x(t),y(t))\cdot x'(t) - v(x(t),y(t))\cdot y'(t)]dt + dt =$$

$$= \int\limits_\Gamma udx - vdy + i\int\limits_\Gamma vdx + udy. \blacktriangleleft$$

Следствие. $\int\limits_\Gamma f(z)|dz| = \int\limits_\Gamma u(x,y)dl + i\int\limits_\Gamma v(x,y)dl$, где dl – дифференциал длины дуги кривой Γ.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{|z-z_0|=R} \frac{dz}{z-z_0}$, где обход окружности осуществляется в положительном направлении.

Решение. Параметрические уравнения окружности с центром в точке z_0 есть

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos t, \\ y = y_0 + R\sin t. \end{cases}$$

Отсюда получим комплексно-параметрическое уравнение окружности

$$z = z_0 + R\cdot e^{it},$$

где $0 \le t \le 2\pi$.

Тогда

$$\int\limits_{|z-z_0|=R} \frac{dz}{z-z_0} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{iR\cdot e^{it}}{R\cdot e^{it}}dt = i\cdot\int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

3. Свойства интегралов по комплексному переменному.

Интегралы от комплексного переменного обладают следующими свойствами.

1 (линейность). Если $f(z)$ и $g(z)$ непрерывны на кусочно-гладкой кривой Γ, то для любых комплексных постоянных c_1 и c_2

$$\int_\Gamma [c_1 f(z) \pm c_2 g(z)]dz = c_1 \int_\Gamma f(z)dz \pm c_2 \int_\Gamma g(z)dz .$$

2 (ориентированность). Пусть Γ^+ и Γ^- — один и тот же путь интегрирования, проходимый соответственно в положительном и отрицательном направлении кусочно-гладкой кривой Γ, и функция $f(z)$ непрерывна на этой кривой. Тогда

$$\int_{\Gamma^+} f(z)dz = -\int_{\Gamma^-} f(z)dz .$$

3 (аддитивность). Пусть кривая Γ состоит из кусочно-гладких кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_n$ и функция $f(z)$ непрерывна на Γ. Тогда

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz + \cdots + \int_{\Gamma_n} f(z)dz ,$$

причем направление на кривых Γ_k, $k = 0,1,2;...;n-1$, совпадает с направлением на кривой Γ.

4. Если Γ – произвольная кусочно-гладкая кривая с началом z_0 и концом z_1, то $\int_\Gamma dz = z_1 - z_0$.

5. Если Γ – гладкая кривая, замкнутая или незамкнутая, имеющая длину L, то $\int_{\Gamma l} |dz| = L$.

6 (оценка интеграла). Для любой функции $f(z)$, непрерывной на гладкой кривой Γ, справедливо неравенство

$$\left| \int_\Gamma f(z)dz \right| \le \int_\Gamma |f(z)||dz| .$$

7. Если $|f(z)| \le M$ во всех точках гладкой кривой Γ, то справедливо неравенство

$$\left| \int_\Gamma f(z)dz \right| \le M \cdot L ,$$

где L – длина кривой Γ.

4. Основная теорема Коши.

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области E.

Теорема 3 (Коши). *Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области E, то интеграл от этой функции по любому кусочно-гладкому замкнутому контуру Γ, целиком лежащему в области E, равен нулю*

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 0 .$$

► Предположим, что $f'(z)$ непрерывна. Пусть Γ — какой-нибудь кусочно-гладкий замкнутый контур, целиком лежащий в области E и $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Тогда согласно теореме 2 имеем

$$\oint_\Gamma f(z)dz = \oint_\Gamma udx - vdy + i\oint_\Gamma vdx + udy .$$

В силу условий Коши – Римана в области E имеем

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial(-v(x,y))}{\partial x} .$$

Из непрерывности $f'(z)$ в области E вытекает непрерывность частных производных первого порядка по x и по y от функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$. Так как функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывно дифференцируемы в области E, удовлетворяют в ней равенствам Коши-Римана и область E односвязна, то, с учетом формулы Грина, получим

$$\oint_{\Gamma} udx - vdy = \iint_{E} \left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy = 0 ,$$

$$\oint_{\Gamma} vdx + udy = \iint_{E} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy = 0 .$$

Отсюда получаем $\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0$. ◄

Теорема Коши для многосвязной области. Теорема Коши допускает распространение на случай *многосвязной области*.

Рассмотрим для определенности трехсвязную область E, ограниченную внешним контуром Γ и внутренними контурами Γ_1 и Γ_2. Выберем положительное направление обхода контуров: при обходе область E остается слева (см. рис.2).

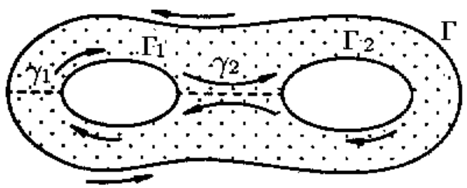

Рис.2.

Пусть функция $f(z)$ аналитична в области E и на контурах Γ, Γ_1 и Γ_2, (т. е. в замкнутой области $\overline{E}$). Проведя два разреза (две дуги) γ_1 и γ_2 области E (см.рис.2), получим новую односвязную область E_1, ограниченную замкнутым ориентированным контуром Γ^*, состоящим из контуров Γ, Γ_1, Γ_2 и разрезов γ_1 и γ_2:

$$\Gamma^* = \Gamma + \gamma_1^{\ +} + \Gamma_1 + \gamma_2^{\ +} + \Gamma_2 + \gamma_2^{\ -} + \gamma_1^{\ -} .$$

По теореме Коши для односвязной области

$$\oint_{\Gamma^*} f(z)dz = 0 .$$

Учитывая

$$\oint_{\gamma_1^+ + \gamma_2^+ + \gamma_2^- + \gamma_1^-} f(z)dz = \oint_{\gamma_1^+} f(z)dz + \oint_{\gamma_2^+} f(z)dz + \oint_{\gamma_1^-} f(z)dz + \oint_{\gamma_2^-} f(z)dz = 0 ,$$

т. к. каждый из разрезов (дуг) γ_1 и γ_2 при интегрировании проходится дважды в противоположных направлениях. Поэтому получаем:

$$\oint_{\Gamma^*} f(z)dz = \oint_{\Gamma} f(z)dz + \oint_{\Gamma_1} f(z)dz + \oint_{\Gamma_2} f(z)dz = 0$$

т. е. интеграл от аналитической в замкнутой многосвязной области функции $f(z)$ по границе области E, проходимой в положительном направлении, равен нулю.

Замечание. Изменив направление обхода внутренних контуров Γ_1, Γ_2 будем иметь

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{\Gamma_1} f(z)dz + \oint_{\Gamma_2} f(z)dz = 0$$

где все контуры Γ, Γ_1, Γ_2 обходятся в одном направлении: против часовой стрелки (или по часовой стрелке). В частности, если $f(z)$ аналитична в двусвязной области, ограниченной контурами Γ и γ и на самих этих контурах (см. рис.3), то

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{\gamma} f(z)dz ,$$

т.е. «интеграл от функции $f(z)$ по внешнему контуру Γ равен интегралу от функции $f(z)$ по внутреннему контуру γ (контуры Γ и γ обходятся в одном направлении).

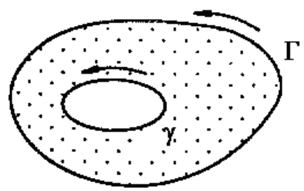

Рис.3.

Теорема 4. *Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в односвязной области E. Тогда интеграл от функции $f(z)$ не зависит от формы пути интегрирования, а зависит лишь от начальной точки z_0 и конечной точки z пути интегрирования.*

► Пусть Γ_1 и Γ_2 две кривые в области E, соединяющей точки z_0 и z (рис.4).

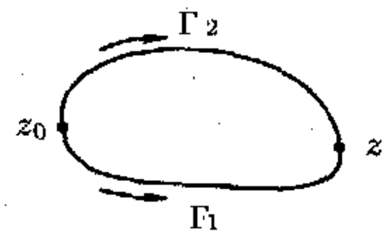

Рис.4.

По теореме Коши

$$\oint_{\Gamma_1^+ + \Gamma_2^-} f(z)dz = 0 .$$

С другой стороны, по свойствам интеграла

$$\oint_{\Gamma_1^+ + \Gamma_2^-} f(z)dz = \oint_{\Gamma_1^+} f(z)dz + \oint_{\Gamma_2^-} f(z)dz = \oint_{\Gamma_1^+} f(z)dz - \oint_{\Gamma_2^+} f(z)dz .$$

Следовательно, $\oint_{\Gamma_1^+} f(z)dz - \oint_{\Gamma_2^+} f(z)dz = 0$.

Откуда $\oint_{\Gamma_1^+} f(z)dz = \oint_{\Gamma_2^+} f(z)dz$. ◄

Вопросы для самоконтроля

1. Какое направление движения по кривой называется положительным, отрицательным?
2. Что называется интегралом от функции комплексного переменного по кривой Γ?
3. Как связаны интеграл от функции комплексного переменного по кривой и криволинейный интеграл второго рода?
4. Перечислите свойства интеграла от функции комплексного переменного по кривой.
5. Сформулируйте основную теорему Коши для односвязной области.
6. Сформулируйте основную теорему Коши для многосвязной области.