### *Лекция 3.* КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

1. Геометрический смысл модуля производной.
2. Геометрический смысл аргумента производной.
3. Понятие конформного отображения.

**1. Геометрический смысл модуля производной.**

Пусть функция $w=f(z)$ – аналитическая в некоторой точке $z_0\in E$ комплексной плоскости $\mathbf{C}\,(Oxy)$, причем $f'(z_0)\neq 0$. Функция $w=f(z)$ отображает точку $z_0$ в точку $w_0=f(z_0)$ на комплексной плоскости $\mathbf{W}\,(O'uv)$.

Пусть произвольная точка $z=z_0+\Delta z$ из окрестности точки $z_0$ перемещается к точке $z_0$ по некоторой непрерывной кривой $\gamma$. Тогда в плоскости $\mathbf{W}\,(O'uv)$ соответствующая точка $w=w_0+\Delta w$ перемещается к точке $w_0$ по некоторой кривой $\Gamma$, являющейся отображением кривой $\gamma$ в плоскости $\mathbf{W}\,(O'uv)$ (см. рис.1).

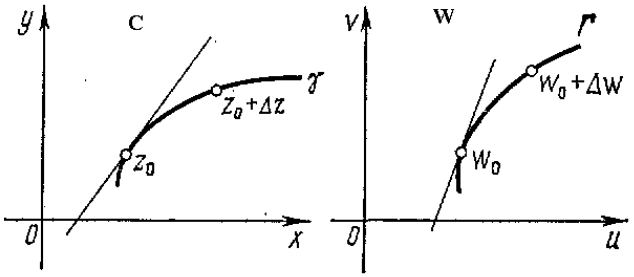


Рис.1.

По определению производной $f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$.

Отсюда следует, что

$$|f'(z_0)|=\left|\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|=\lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}.$$



Величина $|\Delta z|=|z-z_0|$ есть расстояние между точками $z_0$ и $z_0+\Delta z$, а $|\Delta w|$ – расстояние между точками $w_0$ и $w_0+\Delta w$. Следовательно, $|f'(z_0)|$ есть предел отношения бесконечно малого расстояния между отображенными точками $w_0$ и $w_0+\Delta w$ к бесконечно малому расстоянию $z_0$ и $z_0+\Delta z$. Этот предел в силу аналитичности функции $w=f(z)$ не зависит от выбора кривой $\gamma$, проходящей через точку $z_0$.

Поэтому величина $|f'(z_0)|=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$ является постоянной в точке $z_0$ (постоянной во всех направлениях) и определяет коэффициент подобия в точке $z_0$ при отображении $w=f(z)$. При $|f'(z_0)|>1$ модуль производной $|f'(z_0)|$ называется коэффициентом растяжения, при $|f'(z_0)|<1$ модуль производной $|f'(z_0)|$ называется коэффициентом сжатия.

**2. Геометрический смысл аргумента производной.** Для аргумента производной в точке $z_0$ имеем

$$\arg f'(z_0)=\arg\left(\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)=\lim_{\Delta z\to 0}\left(\arg\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)\right)=\lim_{\Delta z\to 0}(\arg\Delta w-\arg\Delta z)=$$
$$=\lim_{\Delta z\to 0}\arg\Delta w-\arg\Delta z=\alpha_1-\alpha_2,$$

где $\alpha_1$ и $\alpha_2$ – углы, которые образуют касательные к кривым $\gamma$ и $\Gamma$ соответственно в точках $z_0$ и $w_0$ с положительными направлениями действительных осей плоскостях $\mathbf{C}\,(Oxy)$ и $\mathbf{W}\,(O'uv)$ (рис.1).

Отсюда

$$\alpha_2=\alpha_1+\arg f'(z_0).$$

Значит, $\arg f'(z_0)$ – это угол, на который надо повернуть касательную к кривой $\gamma$ в точке $z_0$ для того, чтобы получить направление касательной к кривой $\Gamma$ в точке $w_0$. при этом, если

$\arg f'(z) > 0$, то поворот происходит против часовой стрелки, если $\arg f'(z) < 0$ – по часовой.

Для другой пары кривых $\Gamma_1$ и $\gamma_1$ в тех же точках $w_0$ и $z_0$ имеем

$$\arg f'(z_0) = \beta_1 - \beta_2,$$

где $\beta_1$ и $\beta_2$ – углы, которые образуют касательные к кривым $\gamma_1$ и $\Gamma_1$ соответственно в точках $z_0$ и $w_0$ с положительными направлениями действительных осей плоскостях $\mathbf{C}\,(Oxy)$ и $\mathbf{W}\,(O'uv)$ (рис.2).

Очевидно, что

$$\arg f'(z_0) = \beta_1 - \beta_2 = \alpha_1 - \alpha_2.$$

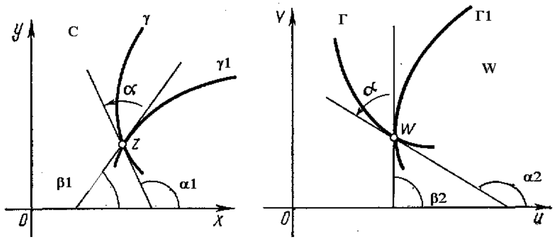


Рис.2.

Следовательно, если кривые $\gamma$ и $\gamma_1$ образуют в точке $z_0$ плоскости $\mathbf{C}\,(Oxy)$ угол $\theta$, то такой же угол $\theta$ будут образовывать в точке $w_0$ кривые $\Gamma$ и $\Gamma_1$ в плоскости $\mathbf{W}\,(O'uv)$.

**3. Понятие конформного отображения.**

**Определение 1.** Отображение, осуществляемое функцией $f(z)$, называется ***конформным*** (***конформным отображением первого рода***) в точке $z_0$, если оно обладает свойством сохранения углов и постоянством растяжений в точке $z_0$.

**Теорема 1**. *Пусть функция $w = f(z)$ – аналитическая в точке $z_0$ и $f'(z_0) \neq 0$. Тогда отображение $w = f(z)$ является конформным в точке $z_0$.*

Без доказательства.



**Определение 2.** Отображение, осуществляемое функцией $w = f(z)$, называется ***антиконформным*** (***конформным отображением второго рода)*** в точке $z_0$, если оно в точке $z_0$ обладает постоянством растяжений, свойством сохранения величин углов, но изменяет направление отсчета углов на противоположное.

Пусть функция $w = f(z)$ определена в некоторой области $E$ плоскости $\mathbf{C}\,(Oxy)$.

**Определение 3.** Взаимно однозначное отображение $w = f(z)$ называется ***конформным*** в области $E$, если оно конформно в каждой точке области $E$.

**Теорема 2 (критерий конформности).** *Для того, чтобы функция $w = f(z)$ являлась конформным отображением, необходимо и достаточно, чтобы $f(z)$ была 1) однолистной, 2) аналитической, 3) $f'(z) \neq 0$ всюду в области $E$.*

Без доказательства.

**Пример**. Выяснить геометрическую картину отображения, осуществляемого функцией $w = 5z$.

***Решение***. Поскольку $w' = 5 \neq 0$, то отображение $w = 5z$ является конформным во всех точках плоскости $\mathbf{C}\,(Oxy)$. Модуль производной $|f'(z_0)| = 5 > 1$, значит, происходит растяжение при отображении. Аргумент производной равен $\arg f'(z) = 0$, поэтому направление при отображении не меняется.

**Теорема 3 (Римана).** *Всякую односвязную область $E$ плоскости $\mathbf{C}\,(Oxy)$, граница которой состоит более чем из одной точки, можно конформно отобразить на внутренность единичного круга $|w| < 1$ плоскости $\mathbf{W}\,(O'uv)$, причем отображение будет единственным при выполнении условий*

$$f(z_0) = 0,\quad \arg f'(z_0) = \alpha,\quad z_0 \in E,\quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

**Теорема 4 (принцип взаимно однозначного соответствия границ).** *Пусть в ограниченной односвязной области $E \subseteq \mathbf{C}\,(Oxy)$ с контуром $\gamma$ задана аналитическая функция $w = f(z)$, непрерывная в $\overline{E}$ и осуществляющая взаимно-*

*однозначное отображение контура $\gamma$ на некоторый контур $\Gamma$ плоскости $\mathbf{W}\left(O'uv\right)$. Тогда, если при заданном отображении контуров сохраняется направление обхода, то функция $w=f(z)$, осуществляет конформное отображение $E$ на внутреннюю область $E'\subseteq\mathbf{W}\left(O'uv\right)$, ограниченную контуром $\Gamma$.*

Без доказательства.

**Пример.** Найти область $E'$, в которую функция $w=z^2$ конформно отображает круг $\left|z-\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$.

***Решение***. В полярных координатах $r$, $\varphi$ уравнение окружности $\left|z-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$ принимает вид $r=\cos\varphi$.

Обозначим через $\rho$, $\theta$ полярные координаты в плоскости $\mathbf{W}\left(O'uv\right)$. При данном отображении $w=z^2$ справедливы равенства

$$\rho=r^2,\quad \theta=2\varphi$$

Тогда при отображении $w=z^2$ окружность $r=\cos\varphi$ переходит в кардиоиду

$$\rho=\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos\theta),$$

причем сохраняется направление обхода окружности $r=\cos\varphi$ и кардиоиды $\rho=\dfrac{1}{2}(1+\cos\theta)$. На основании принципа взаимно однозначного соответствия границ заключаем, что функция $w=z^2$ осуществляет конформное отображение внутренности рассматриваемой окружности на внутренность кардиоиды (рис.3).



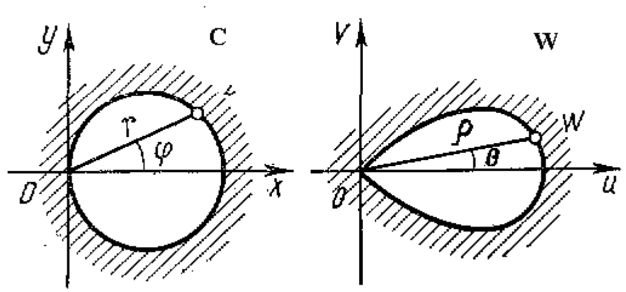


Рис.3.

Пусть область $E$ содержит в составе своей границы прямолинейный отрезок $\gamma$ (конечной или бесконечной длины).

**Определение 4.** Область $E^*$, полученная зеркальным отражением области $E$ относительно прямой, на которой лежит отрезок $\gamma'$ (относительно отрезка $\gamma'$), называется областью, ***симметричной*** области $E$ относительно $\gamma'$ (рис.4.).

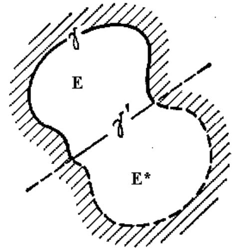


Рис.4.

**Теорема 5 (принцип симметрии Римана — Шварца).** *Пусть $E\subseteq\mathbf{C}\left(Oxy\right)$ – область, ограниченная кривой $\gamma$, содержащей прямолинейный отрезок $\gamma'$. На множестве $E\cup\gamma'$ определена непрерывная функция $w=f(z)$, осуществляющая конформное отображение области $E$ на область $G$ плоскости $\mathbf{W}\left(O'uv\right)$, при котором прямолинейный отрезок $\gamma'$ границы $\gamma$ переходит в прямолинейный отрезок $\Gamma'$ границы $\Gamma$ области $G$. В точках $z^*\in E^*\cup\gamma'$ определена функция $f^*(z^*)$ по следующему правилу: 1) точка $f^*(z^*)$ симметрична точке $f(z)$ от-*

*носительно отрезка* $\Gamma'$, *если* $z^* \in E^*$ *симметрична точке* $z \in E$ *и 2)* $f^*(z^*) = f(z)$, *если* $z^* = z \in \gamma'$. *Тогда функция* $f^*(z^*)$ *является аналитической в области* $E^*$ *и конформно отображает область* $E^*$ *на область* $G^*$, *симметричную с областью* $G$ *относительно* $\Gamma'$. *При этом функция*

$$w = f(z) = \begin{cases} f(z), \text{ если } z \in E, \\ f(z) = f^*(z^*), \text{ если } z^* = z \ (z \in \gamma'), \\ f^*(z^*), \text{ если } z^* \in E^* \end{cases}$$

*осуществляет конформное отображение области* $E \cup \gamma' \cup E^*$ *на область* $G \cup \Gamma' \cup G^*$.

**Следствие.** *Если* $\lambda'$ *и* $\Gamma'$ *отрезки действительных осей, то* $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$.

**Пример.** Пусть область $E \subseteq \mathbf{C}\left(Oxy\right)$ представляет собой внешность объединения отрезков $[-1;1]$ и $[-i;i]$ (рис.5).

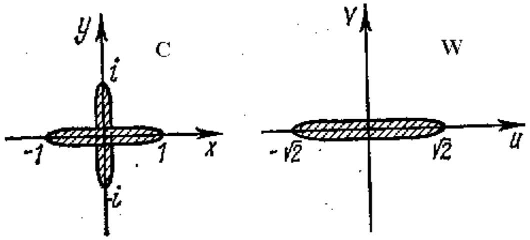


Рис.5.

Обозначим через $E_1$ верхнюю половину области $E$ ($\mathrm{Im}\, z > 0$). Граница $\gamma$ области $E_1$ содержит в своем составе отрезок $\gamma'$, действительной оси плоскости $\mathbf{C}\left(Oxy\right)$, соединяющий через $\infty$ точки $\pm 1$. Функция $w = \sqrt{z^2+1}$ $(0 < \arg z < \pi)$ отображает область $E_1$ на верхнюю полуплоскость $G_1$ комплексной плоскости $\mathbf{W}\left(O'uv\right)$. При этом отрезок $\gamma'$ переходит в отрезок $\Gamma'$ действительной оси плоскости $\mathbf{W}\left(O'uv\right)$, соединяющий через $\infty$ точки $w = \pm\sqrt{2}$.



Областью $E^*_1$, симметричной области $E_1$ относительно $\gamma'$, является нижняя полуплоскость $\mathrm{Im}\, z < 0$ с выброшенным интервалом $(0,-i]$. Областью, симметричной области $G_1$ относительно отрезка $\Gamma'$, будет область $G^*_1$, представляющая нижнюю полуплоскость $\mathbf{W}\left(O'uv\right)$ ($\mathrm{Im}\, w < 0$). Тогда, согласно принципу симметрии, функция $w = \sqrt{z^{*2}+1}$, $\pi < \arg z^* < 2\pi$, $z^* \in E_1$, конформно отображает область $E^*_1$ на область $G^*_1$ плоскости $\mathbf{W}\left(O'uv\right)$. Таким образом, функция $w = \sqrt{z^2+1}$, $z \in E$ конформно отображает область $E$ на область $G$, представляющую внешность отрезка $[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$ комплексной плоскости $\mathbf{W}\left(O'uv\right)$, и при $z \in \gamma'$ значения $w \in \Gamma'$.

## Вопросы для самоконтроля

1. В чем состоит геометрический смысл модуля производной?
2. В чем состоит геометрический смысл аргумента производной?
3. Какое отображение называется конформным?
4. Сформулируйте основные принципы конформномти.