СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие «Теория функций комплексного переменного» является пятой частью текстов лекций по математическому анализу для студентов физического факультета. Их содержание включает материал третьего семестра в соответствии с учебной программой по данной дисциплине. Пособие включает теоретический материал по темам «Теория функций комплексного переменного» и «Элементы операционного исчисления».

Как и в предыдущих частях, вначале каждой лекции сформулированы основные рассматриваемые вопросы, отражающие ее содержание. Далее приводятся определения основных понятий, формулировки теорем и следствий из них, доказательства наиболее важных теорем. Теоретические положения иллюстрируются решениями задач, многие из которых имеют прикладную направленность. Каждая лекция имеет свою нумерацию определений, теорем, рисунков и таблиц. В конце лекции сформулированы вопрос, позволяющие обучаемому организовать самоконтроль знаний. Поскольку объем пособия не позволяет привести доказательства всех утверждений, то читателю предлагается воспользоваться учебниками, приведенными в списке литературы.

Пособие рекомендуется для использования студентами при самостоятельном изучении математического анализа, является основой для подготовки к сдаче экзаменов и зачетов.

Автор надеется, что пособие будет полезным и для преподавателей в работе со студентами, и с благодарностью воспримет все критические замечания и пожелания, направленные на улучшение его содержания.

ТЕМА 1
ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Лекция 1. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. Множества, области, кривые.
2. Предел последовательности.
3. Функции комплексного переменного.
4. Основные элементарные функции.

1. Множества, области, кривые.

Пусть E — некоторое множество точек z на расширенной комплексной плоскости (множеству $\mathbf{C}$ принадлежит бесконечно удаленная точка).

ε-окрестностью точки z_0 называется множество точек плоскости $\mathbf{C}$, удовлетворяющих неравенству $|z_0 - z| \le \varepsilon$.

Обозначается: $U(\varepsilon; z_0) = \{ z \in \mathbf{C} | \ |z_0 - z| \le \varepsilon \}$.

Множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $|z| > R > 0$, называется R-окрестностью бесконечно удаленной точки $z = \infty$.

Обозначается: $U(R; \infty) = \{ z \in \mathbf{C} | \ |z| > R > 0 \}$.

Комплексная плоскость вместе с бесконечно удаленной точкой $z = \infty$ называется расширенной расширенной комплексной плоскостью $\mathbf{C}\ (Oxy)$. Символы $x \pm i\infty$, $\pm\infty + iy$, $\infty e^{i\varphi}$ задают направления на плоскости $\mathbf{C}\ (Oxy)$.

Точка z_0 называется ***предельной точкой*** множества E , если в любой окрестности точки z_0 расположено бесконечно много точек $z \in E$. Предельная точка z_0 может принадлежать множеству E , а может и не принадлежать ему.

Точка $z \in E$ называется ***внутренней точкой*** множества E , если существует такое $\delta > 0$, что окрестность $U(z, \delta)$ состоит только из точек множества E . Множество называется ***открытым***, если каждая точка этого множества является его внутренней точкой.

Точка z_0 расширенной комплексной плоскости называется ***граничной точкой*** множества E , если при любом $\delta > 0$ окрестность $U(\delta, z_0)$ содержит точки $z \in E$ и точки $z \notin E$. Граничная точка множества E может принадлежать самому множеству E , а может и не принадлежать ему. Совокупность всех граничных точек множества называется ***границей*** этого множества. Множество E называется ***замкнутым***, если оно содержит свою границу. *Обозначается*: $\overline{E}$.

Пусть t – действительная переменная, изменяющаяся в интервале $t_0 < t < T$.

Если каждому значению t из интервала $t_0 < t < T$ по некоторому правилу поставлено в соответствие определенное комплексное число z , то говорят, что на интервале $t_0 < t < T$ задана ***комплексная*** (***комплекснозначная***) функция действительного переменного t .

Обозначается: $z = z(t)$.

Полагая $z(t) = x(t) + iy(t)$, можно считать, что задание функции $z(t)$ действительного переменного равносильно заданию в рассматриваемом интервале $t_0 < t < T$ двух действительных функций $x(t)$ и $y(t)$ действительного переменного t . Уравнение $z(t) = x(t) + iy(t)$, $t_0 \le t \le T$, представляет собой ***параметрическое*** представление непрерывной кривой на комплексной плоскости $\mathbf{C}\ (Oxy)$.

Точкой самопересечения кривой $z(t) = x(t) + iy(t)$ называется точка z , для которой при $t_1 \ne t_2$ имеем $z(t_1) = z(t_2)$.

Кривой Жордана (простой кривой) называется непрерывная кривая, не имеющая точек самопересечения.

Замкнутой кривой называется простая кривая (кривая Жордана), у которой конец совпадает с началом. (Совпадение начала и конца замкнутой кривой не принято считать точкой самопересечения.) Область, ограниченная замкнутым контуром γ, обозначается D_γ.

Кривая Жордана $z(t)$ называется гладкой, если функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $t_0 \le t \le T$ и в каждой точке этого отрезка хотя бы одна из производных x_t', y_t' отлична от нуля.

Геометрически это определение означает, что в любой точке гладкой кривой существует касательная, изменяющая непрерывно свое направление от точки к точке.

Кривая Жордана называется ***кусочно-гладкой***, если она состоит из конечного числа гладких кривых. Кусочно-гладкая кривая имеет касательную во всех точках, за исключением конечного числа, причем, в этих исключенных точках существуют предельные положения секущих как справа, так и слева. Точки кусочно-гладкой кривой, в которых касательная не существует, называются ***угловыми*** точками кривой.

Множество E называется ***связным*** множеством, если две любые его точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат множеству E. Связное открытое множество E называется ***областью***.

Область D называется ***односвязной***, если любой замкнутый контур γ целиком лежащий в D, ограничивает область $D_\gamma \subset D$. Это обеспечивает отсутствие дырок в области D (рис.1, а).

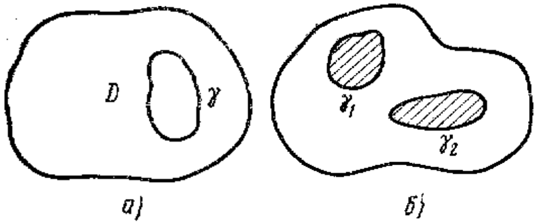

Рис.1.

В противном случае область называется ***многосвязной*** (рис.1,б). Это означает, что в области D найдутся контуры γ_1, γ_2, … такие,

что точки из областей D_{γ_1}, D_{γ_2}, … не входят в D. Заметим, что с помощью дополнительных разрезов l_1, l_2 ... многосвязная область может быть сделана односвязной (как на рис. 2), так как в области с разрезами любой замкнутый контур γ не будет содержать внутри себя точек из областей D_{γ_1}, D_{γ_2}, ….

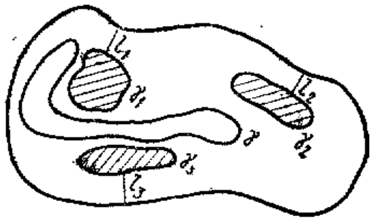

Рис.2.

Примеры. 1. Односвязной областью является множество точек z, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < R$, где z_0 – некоторая фиксированная точка комплексной плоскости, а R — некоторое положительное число, границей этой области является односвязное множество, являющееся окружностью $|z - z_0| = R$.

2. Двухсвязной областью является множество точек z, удовлетворяющих неравенству

$$R_1 < |z - z_0| < R_2,$$

где z_0 – некоторая фиксированная точка комплексной плоскости, $0 < R_1 < R_2 < \infty$, граница этой области состоит из двух связных компонент: окружностей $|z - z_0| = R_1$ и $|z - z_0| = R_2$.

Положительным направлением обхода границы области D принято считать направление, при котором область D остается слева.

2. Предел последовательности.

Пусть дана бесконечная последовательность комплексных чисел $z_n = x_n + iy_n$, $n = 1,2, ...$

Комплексное число $a=\alpha+i\beta$, $a\neq\infty$, называется ***пределом числовой последовательности*** $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, если для любого $\varepsilon>0$ существует номер $N=N(\varepsilon)$ такой, что для всякого $n>N(\varepsilon)$ справедливо неравенство $|z_n-a|<\varepsilon$.

Обозначается: $a=\lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

Комплексное число $a=\infty$ называется пределом числовой последовательности $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, если $\forall R>)$ найдется такой номер $N=N(R)$, что для любого $n>N$ выполняется неравенство $|z_n|>R$.

Обозначается: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\infty$.

Существование конечного предела $a=\alpha+i\beta=r\,e^{i\varphi}$ последовательности комплексных чисел $z_n=x_n+iy_n=r_n e^{i\varphi_n^*}$, где $\varphi_n^*=\arg z_n$, равносильно существованию как двух пределов вещественных последовательностей (x_n) и (y_n), а при специальной оговорке относительно главных значений аргументов $\arg z_n$, так и пределов последовательностей (r_n) и (φ_n^*).

Теорема 1. *Для того чтобы существовал конечный предел последовательности* $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, $z_n=x_n+iy_n$,

$$\lim_{n\to\infty} z_n=\lim_{n\to\infty}(x_n+iy_n)=a=\alpha+i\beta,$$

необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы последовательностей (x_n) *и* (y_n)

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\alpha,\ \lim_{n\to\infty} y_n=\beta.$$

►*Необходимость*. Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a=\alpha+i\beta$. По определению предела

$$\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists\ N=N(\varepsilon):\ \forall\ n>N(\varepsilon)\qquad |z_n-a|<\varepsilon.$$

Модуль комплексного числа равен

$$|z_n-a|=\sqrt{(x_n-\alpha)^2+(y_n-\beta)^2}.$$

Поэтому

$$(x_n-\alpha)^2+(y_n-\beta)^2<\varepsilon^2\ \text{ при }\ n>N(\varepsilon).$$

Отсюда следуют неравенства

$$|x_n-\alpha|<\varepsilon,\quad |y_n-\beta|<\varepsilon\ \text{ при }\ n>N(\varepsilon).$$

Это означает, что существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\alpha,\ \lim_{n\to\infty} y_n=\beta.$$

Достаточность. Пусть существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\alpha,\ \lim_{n\to\infty} y_n=\beta.$$

По определению предела

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\alpha\ \Leftrightarrow\ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N_1=N_1(\varepsilon):\ \forall\ n>N_1(\varepsilon)\quad |x_n-\alpha|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n=\beta\ \Leftrightarrow\ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N_2=N_2(\varepsilon):\ \forall\ n>N_2(\varepsilon)\quad |y_n-\beta|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Возьмем $N=\max\{N_1,N_2\}$. Тогда $\forall\ n>N(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$|z_n-a|=\sqrt{(x_n-\alpha)^2+(y_n-\beta)^2}<\varepsilon.$$

Отсюда следует, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a=\alpha+i\beta$.◄

Теорема 2. *Для того чтобы существовал конечный предел* $a=\alpha+i\beta=r\,e^{i\varphi}$, $r\neq 0$, *последовательности* $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, $z_n=x_n+iy_n=r_n e^{i\varphi_n^*}$, *необходимо и достаточно, чтобы существовал предел* $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=r$, *а при надлежащем выборе области главных значений аргументов* (φ_n^*) *и* φ^* *предел* $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n^*=\varphi^*$.

Без доказательства.

Теорема 3 (критерий Коши). *Для того чтобы последовательность* $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ *комплексных чисел была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon>0$ *существовал номер* $N=N(\varepsilon)$ *такой, что для всякого* $n>N(\varepsilon)$ *и* $p=1,2,\ldots$ *справедливо неравенство* $|z_{n+p}-z_n|<\varepsilon$.

Все действия с пределами последовательностей комплексных чисел аналогичны действиям с последовательностями действительных чисел.

2. Комплексные функции.

Пусть E есть некоторое множество точек, расположенных на расширенной комплексной плоскости $\mathbf{C}\,(Oxy)$ (к E может принадлежать и бесконечно удаленная точка).

Если каждому комплексному числу z, принадлежащему множеству E, по некоторому правилу f поставлено в соответствие одно или несколько комплексных чисел w (к ним может принадлежать и $w=\infty$), то говорят, что на множестве E ***задана функция.*** При этом точки $z\in E$ представляют значения независимой переменной (или аргумента), а точки w – значения функции.

Обозначается: $w=f(z)$.

Если каждому $z\in E$ соответствует одно определенное значение w, то функция $w=f(z)$ называется ***однозначной***; в противном случае функция $w=f(z)$ называется ***многозначной***. Множество E называется ***областью определения*** функции $w=f(z)$, а совокупность E' всех значений w, которые функция $f(z)$ принимает на E, называется ***множеством значений*** функции $f(z)$.

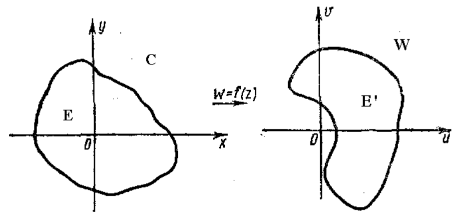

Рис.3.

Геометрически функцию $w=f(z)$, заданную на E можно рассматривать как отображение области E плоскости $\mathbf{C}\,(Oxy)$ на некоторую область E' плоскости $\mathbf{W}\,(O'uv)$ (рис.3). Обратное отображение определяет обратную функцию $z=\varphi(w)$.

Если функция $w_1=f(z)$ отображает область $E\subset\mathbf{C}$ на область $E_1\subset\mathbf{W}_1$, а функция $w=g(w_1)$ отображает область E_1 на область $G\subset\mathbf{W}$, то сложная функция $w=g(f(z))$ осуществляет отображение области $E\subset\mathbf{C}$ на $G\subset\mathbf{W}$.

Функция $w=f(z)$ называется ***однолистной*** на множестве E, если она однозначна и в различных точках $z_1\neq z_2$ множества E принимает различные значения $f(z_1)\neq f(z_2)$.

Функция $w=f(z)$ может быть записана в виде

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y),$$

где $u=u(x,y)=\operatorname{Re}f(z)$ – ***действительная часть функции*** $f(z)$, $v=v(x,y)=\operatorname{Im}f(z)$ – ***мнимая часть функции*** $f(z)$.

Пример. Пусть $w=z^3$, где $z=x+iy$. Найти $\operatorname{Re}w$, $\operatorname{Im}w$.

Решение. Имеем

$$w=(x+iy)^3=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3).$$

Отсюда $u(x,y)=\operatorname{Re}z^3=x^3-3xy^2$, $v(x,y)=\operatorname{Im}z^3=3x^2-y^3$.

3. Предел и непрерывность

Пусть однозначная функция $w=f(z)$ определена и конечна в некоторой окрестности точки z_0 комплексной плоскости $\mathbf{C}\,(Oxy)$, кроме, быть может, самой точки z_0.

Комплексное число A называется ***пределом*** функции $f(z)$ при $z\to z_0$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для всех точек z, удовлетворяющих неравенству $0<|z-z_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(z)-A|<\varepsilon$.

Символическая запись:

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=A \iff$$

$$\iff \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall z\ \ 0<|z-z_0|<\delta\ \Rightarrow\ |f(z)-A|<\varepsilon.$$

Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0 расширенной комплексной плоскости $\mathbf{C}\,(Oxy)$.

Функция $f(z)$ называется ***бесконечно малой*** при $z \to z_0$, если ее предел равен нулю:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = 0.$$

Теорема 3 (Критерий Коши существования конечного предела функции). *Для существования конечного предела $\lim_{z \to z_0} f(z) = A$ необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ существовало такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых точек z' и z'', принадлежащих области определения функции $f(z)$ и удовлетворяющих неравенствам $0 < |z' - z_0| < \delta$, $0 < |z'' - z_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$.*

Без доказательства

Теорема 4. *Пусть функция $f(z) = u(x, y,) + iv(x, y)$ определена и конечна в некоторой окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$ и $A = u_0 + iv_0$. Тогда для того, чтобы $\lim_{z \to z_0} f(z) = A$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u_0, \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v_0.$$

►*Необходимость.* Пусть $\lim_{z \to z_0} f(z) = A$, $z_0 \neq \infty$, $A \neq \infty$. По определению предела для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех точек z, удовлетворяющих неравенству $0 < |z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - A| < \varepsilon$.

Так как

$|u(x, y) - u_0| \leq |f(z) - A|$, $|v(x, y) - v_0| \leq |f(z) - A|$,

$|x - x_0| \leq |z - z_0|$, $|y - y_0| \leq |z - z_0|$,

то из неравенства $|f(z) - A| < \varepsilon$ при условии $0 < |z - z_0| < \delta$ следует справедливость неравенств

$$|u(x, y) - u_0| < \varepsilon, \qquad |v(x, y) - v_0| < \varepsilon$$

при условии $0 < |x - x_0| < \delta$, $0 < |y - y_0| < \delta$.

Это означает, что $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u_0$, $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v_0$.

Достаточность. Пусть имеют место соотношения $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u_0$, $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v_0$. Это означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что справедливы неравенства

$$|u(x, y) - u_0| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |v(x, y) - v_0| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при условии $0 < |x - x_0| < \frac{\delta}{2}$, $0 < |y - y_0| < \frac{\delta}{2}$.

Так как

$|f(z) - A| = |u(x, y) + iv(x, y) - (u_0 + iv_0)| \leq |u(x, y) - u_0| + |v(x, y) - v_0|$

и

$$|z - z_0| = |x + iy - (x_0 + iy_0)| \leq |x - x_0| + |y - y_0|,$$

то имеем $|f(z) - A| < \varepsilon$, если $0 < |z - z_0| < \delta$.

Отсюда следует, что $\lim_{z \to z_0} f(z) = A$. ◄

Теоремы о пределах для функций нескольких действительных переменных остаются справедливыми и для функций комплексного переменного.

Теорема 5. *Если функции $f(z)$ и $g(z)$ имеют конечные пределы при $z \to z_0$ (z_0 — конечно, либо $z_0 = \infty$), то имеют место следующие соотношения*:

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) \pm g(z)] = \lim_{z \to z_0} f(z) \pm \lim_{z \to z_0} g(z),$$

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) \cdot g(z)] = \lim_{z \to z_0} f(z) \cdot \lim_{z \to z_0} g(z),$$

$$\lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right] = \frac{\lim_{z \to z_0} f(z)}{\lim_{z \to z_0} g(z)} \text{ при } g(z) \neq 0.$$

Пусть однозначная функция $f(z)$ определена и конечна в некоторой окрестности точки z_0, включая и саму точку z_0.

Функция $f(z)$ называется ***непрерывной*** в точке z_0, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Пусть $\Delta z = z - z_0$ приращение аргумента, то величина $\Delta f(z_0) = f(z) - f(z_0)$ есть приращение функции. Тогда определение непрерывности функции $f(z)$ в точке z_0 можно записать так: $\lim\limits_{\Delta z\to 0} \Delta f(z) = 0$. Отсюда следует, что функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Функция $f(z)$ называется ***непрерывной в области*** $E \subseteq \mathbf{C}\,(Oxy)$, если она непрерывна в каждой точке $z \in E$.

Пусть функция $f(z)$ непрерывна в области E.

Функция $f(z)$ называется ***равномерно непрерывной в области*** E, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых двух точек z' и z'', принадлежащих области E, расстояние между которыми $|z' - z''| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$.

Очевидно, что всякая равномерно непрерывная функция в области E является непрерывной функцией в этой области. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно: непрерывная функция в области E может и не обладать свойством равномерной непрерывности.

Теорема 6 (Кантора). *Если $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{E}$, то она непрерывна в этой области.*

Без доказательства.

4. Основные элементарные функции.

Рассмотрим основные элементарные функции комплексного переменного $z = x + iy$.

Функция $w = z^n$, $n = 2,3,\dots$, называется ***степенной*** функцией.

Степенная функция $w = z^n$ определена и однозначна на всей расширенной плоскости $\mathbf{C}\,(Oxy)$. Точке $z = \infty$ ставится в соответствие точка $w = \infty$.

Дробно-линейной функцией называется функция вида

$$w = \frac{az+b}{cz+d},$$

где a, b, c, d – постоянные, $ad - bc \neq 0$.

Условие $ad - bc \neq 0$ накладывается для того, чтобы исключить случай вырождения функции в постоянную. При $ad - bc = 0$ дробно-линейная функция принимает вид $w = \dfrac{a}{c}$.

При $c = 0$ получаем функцию $w = \dfrac{a}{d} z + \dfrac{b}{d}$, которая называется ***целой линейной функцией.***

При $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 0$ имеем $w = \dfrac{1}{z}$.

Дробно-линейная функция $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ определена и однозначна на расширенной плоскости $\mathbf{C}\,(Oxy)$: при $c \neq 0$ каждой точке z ($z \neq -\dfrac{d}{c}$, $z \neq \infty$) становится в однозначное соответствие конечная точка w на плоскости $\mathbf{W}\,(O'uv)$. Точке $z = -\dfrac{d}{c}$ соответствует точка $w = \infty$, точке $z = \infty$ – точка $w = \dfrac{a}{c}$.

Функция $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ также всюду определена на расширенной плоскости $\mathbf{C}\,(Oxy)$: любому конечному z ставится в однозначное соответствие конечное w; точке $z = \infty$ – точка $w = \infty$.

Показательной функцией комплексного переменного называется функция вида

$$w = e^z.$$

Положим $z = x + iy$, $w = u + iv$. Тогда имеем

$$w = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Отсюда находим $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$.

Показательная функция обладает следующими ***свойствами***:

1) показательная функция $w = e^z$ определена во всей комплексной плоскости $\mathbf{C}\,(Oxy)$;

2) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$;

3) формулы Эйлера $e^{iz} = \cos z + i\sin z$, $e^{-iz} = \cos z - i\sin z$;

4) $e^{z+2\pi i} = e^z$, т.е. показательная функция $w = e^z$ $2\pi i$ периодичная;

5) $\lim\limits_{\operatorname{Re} z\to-\infty} e^z = 0$, $\lim\limits_{\operatorname{Re} z\to+\infty} e^z = \infty$.

Показательная форма комплексного числа $z = r \cdot e^{iArgz}$.

Очевидно, что $e^{2k\pi i} = 1$.

Тригонометрические функции определяются из формул Эйлера

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Тригонометрические функции $\cos z$, $\sin z$ комплексного переменного являются периодическими с действительным периодом 2π; $\cos z = 0$ в точках $z = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \dots$, $\sin z = 0$ в точках $z = \pi n$, где $n = 0, 0, \pm1, \pm2, \dots$.

Отношение $\frac{\sin z}{\cos z}$, $z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \dots$,называется ***тангенсом*** z:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}.$$

Отношение $\frac{\cos z}{\sin z}$, $z \neq \pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \dots$, называется ***котангенсом*** z:

$$ctgz = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Все тригонометрические тождества для тригонометрических функций комплексного переменного аналогичны тождествам тригонометрических функций действительного переменного.

Гиперболическими функциями называются функции, определяемые равенствами

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \ \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \ \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \ \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Гиперболические и тригонометрические функции связаны между собой соотношениями:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{sh} z = -i \cdot \sin iz, & \sin z = -i \operatorname{sh} iz, \\ \operatorname{ch} z = \cos iz, & \cos z = \operatorname{ch} iz, \\ \operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz, & \operatorname{tg} z = -i \operatorname{th} iz, \\ \operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz, & \operatorname{ctg} z = i \operatorname{ctg} iz. \end{array}$$

Для гиперболических функций существуют тождества, аналогичные тригонометрическим тождествам.

Функция, обратная к функции $w = e^z$ называется ***логарифмической*** и обозначается

$$z = \operatorname{Ln} w.$$

Изменяя обозначения w на z и z на w, имеем $w = \operatorname{Ln} z$, $z \neq 0$. Каждое значение функции $w = \operatorname{Ln} z$ называется ***логарифмом*** комплексного числа.

Логарифмическая функция определена во всех точках комплексной плоскости $\mathbf{C}\,(Oxy)$ кроме точки $z = 0$.

Правила о логарифме произведения, частного, степени и корня для положительных чисел справедливы и для комплексных чисел.

Пусть $w = \operatorname{Ln} z = u + iv$, $z = re^{i\varphi} = |z|e^{i\operatorname{Arg} z}$. Тогда согласно определения логарифмической функции, получаем $e^{u+iv} = |z|e^{i\operatorname{Arg} z}$. Отсюда $e^u = |z|$, $v = \operatorname{Arg} z$. Следовательно $u = \ln|z|$, $v = \operatorname{Arg} z$. Таким образом,

$$w = \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), \ k = 0, \pm1, \pm2, \dots.$$

Значение функции, которое получается при $k=0$, называется ***главным значением*** и обозначается

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z .$$

Справедливы следующие соотношения:

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2 ,$$

$$\operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2 ,$$

$$\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z ,$$

$$\operatorname{Ln}\sqrt[n]{z} = \frac{1}{n}\operatorname{Ln} z .$$

Общая степенная функция $w = z^{\alpha}$, где α – любое комплексное число, определяется соотношением $z^{\alpha} = e^{\alpha \cdot \operatorname{Ln} z}$, $z \neq 0$. Эта функция многозначна, значение $z^{\alpha} = e^{\alpha \cdot \ln z}$ называется ***главным значением***.

Общая показательная функция $w = \alpha^{z}$, $\alpha \neq 0$, определяется равенством $\alpha^{z} = e^{z \cdot \operatorname{Ln} z}$. Главное значение этой функции $\alpha^{z} = e^{z \cdot \ln z}$.

Функции $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$ определяются как обратные функции к функциям $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ соответственно. Эти функции являются многозначными и выражаются через логарифмические функции:

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right),$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{z^2-1}\right),$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right),$$

$$\operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{z-i}{z+i}\right).$$

Главные значения обратных тригонометрических функций $\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$, $\operatorname{arcctg} z$ получаются, если брать главные значения соответствующих логарифмов.

Обратные гиперболические функции выражаются через логарифмические функции по следующим формулам:

$$\operatorname{Arcsh} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2+1}\right),$$

$$\operatorname{Arcch} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right),$$

$$\operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{1+z}{1-z}\right),$$

$$\operatorname{Arccth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{z+1}{z-1}\right).$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется окрестностью точки на комплексной плоскости?
2. Какие множества комплексной плоскости называются областью?
3. Какие множества комплексной плоскости называются связными?
4. Дайте определение функции комплексного переменного.
5. Сформулируйте определение предела функции комплексного переменного.
6. Сформулируйте необходимое и достаточное условия существования предела функции комплексного переменного.
7. Какие функции называются непрерывными?
8. Назовите основные элементарные функции комплексного переменного.