Лекция 10. ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ВЫЧЕТОВ

1. Вычисление определенных интегралов от функции комплексного переменного.
2. Суммирование некоторых рядов с помощью вычетов.

1 Вычисление определенных интегралов от функции комплексного переменного

Вычисление интегралов по замкнутому контуру. Основная теорема о вычетах часто используется для вычисления интегралов комплексного переменного по замкнутому контуру.

Пример. Вычислить $\oint\limits_{\Gamma}\frac{dz}{(z-1)^3(z^2+1)}$, где $\Gamma=\{z\in\mathbf{C}:|z-1-i|=2\}$.

Решение. В круге $\Gamma=\{z\in\mathbf{C}:|z-1-i|=2\}$ функция $f(z)=\frac{1}{(z-1)^3(z^2+1)}$ имеет в точке $z_1=1$ полюс третьего порядка, в точках $z_{2,3}=\pm i$ полюсы первого порядка, причем точка $z=-i$ не принадлежит кругу $|z-1-i|<2$.

Тогда

$$\oint\limits_{l}\frac{dz}{(z-1)^3(z^2+1)}=2\pi i\cdot\left[\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{1}{(z-1)^3(z^2+1)}+\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{1}{(z-1)^3(z^2+1)}\right]=$$

$$=2\pi i\cdot\left[\frac{1}{2!}\lim_{z\to1}\left(\frac{(z-1)^3}{(z-1)^3(z^2+1)}\right)''+\lim_{z\to i}\frac{z-i}{(z-1)^3(z+i)(z-i)}\right]=$$

$$=2\pi i\cdot\left[\frac{1}{2}\lim_{z\to1}\left(\frac{1}{(z^2+1)}\right)''+\lim_{z\to i}\frac{1}{(z-1)^3(z+i)}\right]=$$

$$=2\pi i\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\lim_{z\to1}\left(\frac{2z}{(z^2+1)^2}\right)'+\frac{1}{(i-1)^3(i+i)}\right]=$$

$$=2\pi i\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\lim_{z\to1}\frac{2\cdot(z^2+1)^2-2z\cdot2\cdot(z^2+1)\cdot2z}{(z^2+1)^4}+\frac{1}{2i\cdot(i-1)^3}\right]=$$

$$=2\pi i\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\lim_{z\to1}\frac{2\cdot(z^2+1)(z^2+1-4z^4-4z^2)}{(z^2+1)^4}-\frac{i}{2\cdot(i-1)^3}\right]=$$

$$=2\pi i\cdot\left[-\frac{i}{2\cdot(i-1)^3}+\frac{1}{2}\cdot\lim_{z\to1}\frac{2\cdot(1-4z^4-z^2)}{(z^2+1)^4}\right]=$$

$$=2\pi i\cdot\left[\frac{2(1-4-1)}{(1+1)^4}-\frac{i}{2\cdot(i-1)^3}\right]=-\frac{\pi}{2}(1+i).$$

Вычисление интегралов от рациональных функций. Пусть $f(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ – рациональная функция, где $P_m(x)$, $Q_n(x)$ – многочлены степеней m и n соответственно. Если функция $f(x)$ непрерывна на всей действительной оси и $n\geq m+2$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=2\pi i\sigma,$$

где σ – сумма вычетов функции $f(z)=\frac{P_m(z)}{Q_n(z)}$ во всех полюсах, расположенных в верхней полуплоскости.

Пример. Вычислить интеграл $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}$, $a>0$.

Решение. Так как подынтегральная функция $f(x)=\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}$ – четная, то

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}.$$

Введем функцию $f(z)=\dfrac{z^2}{\left(z^2+a^2\right)^2}$, которая на действительной оси (при $z=x$) совпадает $f(x)$. Функция $f(z)$ имеет в верхней полуплоскости полюс второго порядка в точке $z=ai$. Вычет $f(z)$ относительно этого полюса равен

$$\operatorname*{Res}_{z=ai} f(z)=\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left[f(z)(z-ai)^2\right]=$$

$$=\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z+ai)^2}\right]=\lim_{z\to ai}\frac{2aiz}{(z+ai)^3}=\frac{1}{4ai}.$$

Тогда $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot\frac{1}{4\pi i}=\frac{\pi}{4a}$.

Интегралы вида $\displaystyle\int_0^{2\pi}R(\sin x,\cos x)dx$. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^{2\pi}R(\sin x,\cos x)dx,$$

где $R(\sin x,\cos x)$ – рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$, ограниченная внутри промежутка интегрирования. С помощью замены

$$e^{ix}=z,\ dx=\frac{dz}{iz},\ \cos x=\frac{z^2+1}{2z},\ \sin x=\frac{z^2-1}{2iz}$$

интеграл $\displaystyle\int_0^{2\pi}R(\sin x,\cos x)dx$ сводится к интегралу от рациональной функции $F(z)$ комплексного переменного z по окружности $|z|=1$.

К интегралу $\displaystyle\oint_{|z|=1}F(z)dz$ применима основная теорема о вычетах. Тогда $\displaystyle\int_0^{2\pi}R(\sin x,\cos x)dx=2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}F(z)$.

Пример. Вычислить интеграл $J=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2-2\cos x}$.

Решение. Введем замену $z=e^{ix}$. Тогда

$$dx=\frac{dz}{iz},\ \cos x=\frac{z^2+1}{2z}.$$

Подставим в интеграл

$$J=\oint_{|z|=1}\frac{\dfrac{dz}{iz}}{2-2\cdot\dfrac{z^2+1}{2z}}=\oint_{|z|=1}\frac{dz}{i\left(2z-z^2-1\right)}=i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{(z-1)^2}.$$

Функция $F(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2}$ в точке $z=1$ имеет простой полюс 2-го порядка. Поэтому

$$\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{1}{(z-1)^2}=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2\cdot\frac{1}{(z-1)^2}\right]'=0.$$

Отсюда $J=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2-2\cos x}=0$.

Интегралы вида $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$**.** Вычисление этих интегралов основано на следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть функция* $f(x)$*, заданная на всей числовой оси* $-\infty<x<+\infty$*, может быть аналитически продолжена на верхнюю полуплоскость* $\operatorname{Im}z\ge 0$*. Функция* $f(z)$ *является аналитической в верхней полуплоскости* $\operatorname{Im}z\ge 0$ *за исключением конечного числа изолированных точек*

$z_1, z_2, \dots, z_n \in \{z \in \mathbf{C} | \ \operatorname{Im} z \geq 0\}$. *И пусть существуют такие положительные числа* M, R_0, δ, *что для всех точек верхней полуплоскости, удовлетворяющих условию* $|z| = R > R_0$, *имеет место оценка* $|f(z)| < \dfrac{M}{|z|^{1+\delta}}$. *Тогда несобственный интеграл* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *существует и вычисляется по формуле*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Пример. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

Решение. Функция $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^3}$ определена на всей действительной оси $-\infty < x < +\infty$. Ее аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z \geq 0$ функция $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^3}$ является аналитической в каждой точке верхней полуплоскости за исключением точки $z = i$, являющейся полюсом 3-го порядка. На действительной оси полюсов нет При этом для всех точек верхней полуплоскости, удовлетворяющих условию $|z| = R > R_0 > 1$ имеет место оценка

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{(z^2+1)^3} \right| < \frac{1}{|z|^6}.$$

Поэтому для исходного интеграла можно применить теорему 1

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{(z^2+1)^3} = \frac{1}{2!} \lim_{z \to i} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{(z-i)^3}{(z^2+1)^3} \right) = \frac{1}{2} \lim_{z \to i} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{(z+i)^3} \right) =$$
$$= -\frac{1}{2} \lim_{z \to i} \frac{12}{(z+i)^5} = -\frac{3i}{16}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} \frac{1}{(x^2+1)^3} = 2\pi i \left(-\frac{3i}{16} \right) = \frac{3\pi}{8}.$$

Интегралы вида $\int_0^{+\infty} R(x) \cos \lambda x dx$, $\int_0^{+\infty} R(x) \sin \lambda x dx$. Интегралы вида $\int_0^{+\infty} R(x) \cos \lambda x dx$, $\int_0^{+\infty} R(x) \sin \lambda x dx$, где $R(x)$ – рациональная функция, $\lambda > 0$ любое действительное число вычисляются с использованием леммы Жордана.

Лемма Жордана. *Пусть* $g(z)$ *– аналитическая в верхней полуплоскости* $(0 < \arg z < \pi)$, *за исключением конечного числа особых точек, и стремится к этой полуплоскости к нулю при* $|z| \to \infty$. *Тогда при* $\lambda > 0$

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} g(z) e^{i\lambda z} dz = 0,$$

где контур C_R *– полуокружность в верхней полуплоскости с центром в точке 0 и радиусом* R *(рис.1.).*

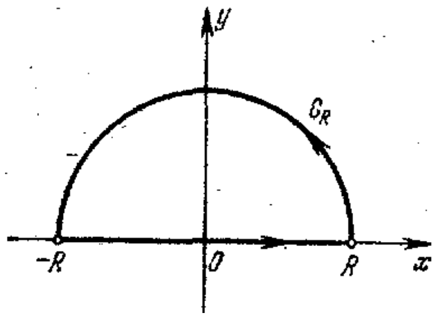

Рис.1.

Пример. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin ax}{x^2+k^2} dx$, где $a > 0$, $k > 0$.

Решение. Введем вспомогательную функцию

$$f(z)=\frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}.$$

Видно, если $z=x$, то $f(z)$ совпадает с подынтегральной функцией $\varphi(x)=\frac{x\sin ax}{x^2+k^2}$.

Рассмотрим контур, указанный на рис.1. При достаточно большом R на контуре C_R функция $g(z)=\frac{z}{z^2+k^2}$ удовлетворяет неравенству $|g(z)|\le\frac{R}{R^2-k^2}$. следовательно, $g(z)$ стремится к нулю при $R\to\infty$.

Значит, по лемме Жордана

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}dz=0.$$

Для любого $R>k$ по теореме о вычетах имеем

$$\int_{-R}^{+R}\frac{xe^{iax}}{x^2+k^2}dx+\int_{C_R}\frac{xe^{iax}}{x^2+k^2}dx=2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{z=ik}\frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}.$$

Имеем

$$\operatorname*{Res}_{z=ik}\frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}=\lim_{z\to ik}\frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}(z-ik)=\frac{1}{2}e^{-ak}.$$

Тогда

$$\int_{-R}^{+R}\frac{xe^{iax}}{x^2+k^2}dx+\int_{C_R}\frac{xe^{iax}}{x^2+k^2}dx=2\pi i\cdot\frac{1}{2}e^{-ak}=\pi ie^{-ak}.$$

В пределе при $R\to\infty$ получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{iax}}{x^2+k^2}dx=\pi ie^{-ak}.$$

Отделяя слева и справа вещественные и мнимые части, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+k^2}dx=\pi e^{-ak}.$$

В силу того, что подынтегральная функция четная, окончательно получим

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+k^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-ak}.$$

2. Суммирование некоторых рядов с помощью вычетов.

Вычисление некоторых рядов с помощью теории вычетов основано на следующих теоремах.

Теорема 2. *Пусть 1)* $f(z)$ *аналитична во всей комплексной плоскости, за исключением конечного числа полюсов* z_1, z_2, ..., z_n *(отличными от целых чисел), 2) функция* $f(z)$ *удовлетворяет условию* $f(z)=O\left(\frac{1}{z^2}\right)$ *при* $z\to\infty$. *Тогда справедлива формула:*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(k)=-\pi\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\left[f(z)\operatorname{ctg}(\pi z)\right].$$

Теорема 3. *Пусть 1)* $f(z)$ *аналитичнаво всей комплексной плоскости за исключением конечного числа полюсов* z_1, z_2, ..., z_n *(отличными от целых чисел), 2) функция* $f(z)$ *удовлетворяет условию*

$f(z)\le \mathrm{e}^{a|\operatorname{Im}z|}\varepsilon(|z|)$ *при* $z\to\infty$, $z\in G_\rho$, $0\le a<\pi$,

$G_\rho=\mathrm{C}\setminus\{z|\ |z-z_1|\le\rho,|z-z_2|\le\rho,...,|z-z_n|\le\rho\}$.

Тогда справедлива формула:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k f(k)=-\pi\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\frac{f(z)}{\sin(\pi z)}.$$

Пример. Найти сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+4}$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим функцию $f(z)=\frac{1}{z^2+4}$. Эта функция аналитична всюду на $\mathbf{C}$, кроме точек $z_1=-2i$ и $z_2=2i$, которые являются простыми полюсами.

Поскольку

$$f(z)=\frac{1}{z^2+4}=\frac{1}{z^2\left(1+\frac{4}{z^2}\right)},$$

то $\frac{1}{z^2+4}=O\left(\frac{1}{z^2}\right)$ при $z\to\infty$.

Применяя теорему 2, получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{k^2+4}=-\pi\left[\operatorname*{Res}_{z=-2i}\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{z^2+4}+\operatorname*{Res}_{z=2i}\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{z^2+4}\right]=$$

$$=-\pi\left[\lim_{z\to-2i}\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{2z}+\lim_{z\to2i}\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{2z}\right]=-\pi\left[\frac{\operatorname{ctg}(-2i\pi)}{-2i\cdot2}+\frac{\operatorname{ctg}(2i\pi)}{2i\cdot2}\right]=$$

$$=\frac{\pi}{2}\operatorname{cth}2\pi.$$

Ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{k^2+4}$ можно записать в виде

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{k^2+4}=\ldots+\frac{1}{(-2)^2+4}+\frac{1}{(-1)^2+4}+\frac{1}{0^2+4}+\frac{1}{1^2+4}+\frac{1}{2^2+4}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{4}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+4}.$$

Отсюда находим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+4}=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{k^2+4}-\frac{1}{8}.$$

Искомая сумма данного ряда равна

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+4}=\frac{\pi}{4}\operatorname{cth}2\pi-\frac{1}{8}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какого вида интегралы могут быть вычислены с помощью вычетов?
2. В каких случаях можно вычислить сумму ряда с помощью вычетов?