Лекция 4. ИНТЕГРАЛЫ ЭЙЛЕРА

1. Определение и свойства гамма функции.
2. Определение и свойства бета-функция.

1. Определение и свойства гамма функции.

Определение 1. Функция

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx, \qquad s>0, \qquad (1)$$

называется ***гамма-функцией,*** а ее значение – ***эйлеровым*** интегралом.

Гамма-функция является непрерывной функцией аргумента s.

Ниже приводятся **свойства** гамма-функции.

1. $\Gamma(s)>0$ для любого $s>0$.

2. $\Gamma(1)=1$

3. $\Gamma(s+1)=s\cdot\Gamma(s)$.

► $\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty} x^s e^{-x}dx=\begin{bmatrix} u=x^s,\, dv=e^{-x}dx, \\ du=s\cdot x^{s-1},\, v=-e^{-x} \end{bmatrix}=$

$=-x^s e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx=s\cdot\Gamma(s)$. ◄

4 (формула понижения). Для любого $n\in \boldsymbol{N}$ справедливо равенство

$$\Gamma(n)=(n-1)!.$$

► $\Gamma(n)=\Gamma((m-1)+1)=[\text{св.}3]=(n-1)\Gamma(n-2+1)=...=(n-1)!$ ◄

5. Гамма-функция имеет непрерывные производные любого порядка k, $k\in \boldsymbol{N}$, и справедливо равенство

$$\Gamma^{(k)}(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}(\ln x)^k\,dx.$$

6. $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$.

Интеграл Эйлера-Пуассона $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

7 (формула дополнения). Если $0<p<1$, то

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin \pi p}.$$

8 (формула Стирлинга). При $s\to+\infty$ справедливо

$$\Gamma(s+1)\approx\sqrt{2\pi s}\cdot\left(\frac{s}{e}\right)^s.$$

2. Определение и свойства бета-функция.

Определение 2. Функция

$$\mathrm{B}(p;q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \quad p>0, \quad q>0 \qquad (2)$$

называется ***бета-функцией,*** а ее значение – ***эйлеровым*** интегралом.

Бета-функция является непрерывной функцией и обладает частными производными любого порядка.

Ниже приводятся **свойства** бета-функции.

1. Для любых $p>0$ и $q>0$ справедливо равенство

$$\mathrm{B}(p;q)=\mathrm{B}(q;p).$$

► $\mathrm{B}(p;q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\begin{bmatrix} t=1-x, \\ dx=-dt \end{bmatrix}=$

$=-\int_1^0 (1-t)^{p-1}t^{q-1}dt=\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt=\mathrm{B}(q;p)$. ◄

2. Для любых $p>0$ и $q>0$ справедливы равенства

$$\mathrm{B}(p;q)=\frac{q-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p;q-1),$$

$$\mathrm{B}(p;q)=\frac{p-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p-1;q).$$

$$► \mathrm{B}(p;q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\left[\begin{array}{l} u=(1-x)^{q-1},\ dv=x^{p-1}dx, \\ du=(q-1)(1-x)^{q-2}dx,\ v=\dfrac{x^p}{p}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{x^p}{p}\cdot(1-x)^{q-1}\Big|_0^1-(q-1)\int_0^1(1-x)^{q-2}\frac{x^p}{p}dx=\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}dx=$$

$$=\left[\begin{array}{l} x^p(1-x)^{q-2}=(1-(1-x))\cdot x^{p-1}(1-x)^{q-2}= \\ =x^{p-1}(1-x)^{q-2}-x^{p-1}(1-x)^{q-1}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}dx-\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=$$

$$=\frac{q-1}{p}\mathrm{B}(p;q-1)-\frac{q-1}{p}\mathrm{B}(p;q).$$

Тогда

$$\left(1+\frac{q-1}{p}\right)\mathrm{B}(p;q)=\frac{q-1}{p}\mathrm{B}(p;q-1).$$

Отсюда

$$\mathrm{B}(p;q)=\frac{q-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p;q-1). ◄$$

3. $\mathrm{B}(p;1)=\dfrac{1}{p}$.

$$► \mathrm{B}(p;1)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^0dx=\frac{x^p}{p}\Big|_0^1=\frac{1}{p}. ◄$$

4. Для любого $p>0$ и любого $n\in \boldsymbol{N}$ справедливо равенство

$$\mathrm{B}(p;n)=\mathrm{B}(n;p)=\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)}{p\cdot(p+1)\cdot\ldots\cdot(p+n-1)}.$$

5. Для любых $n\in \boldsymbol{N}$ и $m\in \boldsymbol{N}$ справедливо равенство

$$\mathrm{B}(m;n)=\frac{(m-1)!\cdot(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

6. Бета-функцию можно представить в виде

$$\mathrm{B}(p;q)=\int_0^{+\infty}\frac{z^{p-1}}{(1+z)^{p+q}}dz.$$

7. $\mathrm{B}(p;1-p)=\dfrac{\pi}{\sin \pi p}$.

8 (связь гамма- и бета- функций). Для любых $p>0$ и $q>0$ имеет место равенство

$$\mathrm{B}(p;q)=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$.

Решение. Имеем

$$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx=\left[\begin{array}{l} x=2\sqrt{t},\ t>0, \\ dx=\dfrac{dt}{\sqrt{t}}, \\ x=0\Rightarrow t=0, \\ x=2\Rightarrow t=1\end{array}\right]=\int_0^1 4t\cdot\frac{\sqrt{4-4t}}{\sqrt{t}}dt=$$

$$=8\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}\cdot(1-t)^{\frac{1}{2}}dt=8\cdot\mathrm{B}\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)=8\cdot\frac{\Gamma(3/2)\cdot\Gamma(3/2)}{\Gamma(3)}=$$

$$=8\cdot\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)}=8\cdot\frac{\frac{1\cdot\sqrt{\pi}}{2^1}\cdot\frac{1\cdot\sqrt{\pi}}{2^1}}{2!}=\pi.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение гамма-функции. Перечислите свойства гамма-функции.
2. Дайте определение бета-функции. Перечислите свойства бета-функции.