Лекция 2. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

1. Определение и сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра.
2. Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

1. Определение и сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Пусть функция $f(x;y)$ определена в области

$$\Pi_\infty = \left\{(x;y) \middle| -\infty < a \le x \le b \le +\infty,\ y \in Y\right\}.$$

И пусть функция $\Phi(y) = \int_a^b f(x;y)dx$ удовлетворяет условиям:

1) $-\infty < a < b \le +\infty$ (b может быть конечным или бесконечным),

2) для любого $y \in Y$ функция $f(x;y)$ интегрируема по переменной x на каждом отрезке $[a;\eta]$, где $a < \eta < b \le +\infty$.

Если b *конечно*, то имеем несобственный интеграл от неограниченной функции

$$\Phi(y) = \lim_{\eta \to b-0} \int_a^\eta f(x;y)dx,$$

если b *бесконечно*, то имеем несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом

$$\Phi(y) = \int_a^{+\infty} f(x;y)dx.$$

Будем рассматривать только второй случай.

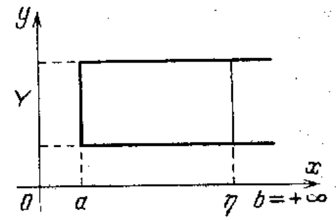

Рис.1.

Определение 1. ***Несобственным интегралом, зависящим от параметра***, называется интеграл вида

$$\Phi(y) = \int_a^{+\infty} f(x;y)dx, \qquad (1)$$

где переменная y называется ***параметром***.

Аналогично вводятся несобственные следующие интегралы, зависящим от параметра y:

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^b f(x;y)dx,\ \Phi(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dx$$

Определение 2. Несобственный интеграл, зависящий от параметра y, $\Phi(y) = \int_a^b f(x;y)dx$ называется ***сходящимся (поточечно)***, если $\forall\ y \in Y$ и $b \le +\infty$ существует конечный предел

$$\lim_{\eta \to b-0} \int_a^\eta f(x;y)dx = \int_a^b f(x;y)dx, \qquad (2)$$

т.е. $\forall\ y \in Y$ интеграл $\Phi(y) = \int_a^b f(x;y)dx$ сходится как несобственный.

Поскольку $\int_a^b f(x;y)dx = \int_a^\eta f(x;y)dx + \int_\eta^b f(x;y)dx$, то для сходящегося интеграла имеем $\lim_{\eta \to 0} \int_\eta^b f(x;y)dx = 0$.

Символическая запись:

$$\lim_{\eta\to b-0}\int_a^\eta f(x;y)dx=\int_a^b f(x;y)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \forall\ y\in Y\ \ \forall\ \varepsilon>0\ \ \exists b'(y;\varepsilon)<b:\ \forall\ \eta\in(b';b)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f(x;y)dx-\int_a^\eta f(x;y)dx\right|\le\left|\int_\eta^b f(x;y)dx\right|<\varepsilon .$$

Равномерная сходимость интеграла $\Phi(y)=\int_a^b f(x;y)dx$ будет, если $\int_\eta^b f(x;y)dx \rightrightarrows 0$ при $\eta\to b$.

О п р е д е л е н и е 3. Несобственный интеграл, зависящий от параметра, $\Phi(y)=\int_a^b f(x;y)dx$ называется ***равномерно сходящимся по параметру*** y ***на множестве*** Y, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $b'(y;\varepsilon)>0$, $a\le b'<b$, что для всех $y\in Y$ и всех η, $b'<\eta<b$, выполняется неравенство $\left|\int_{b'}^b f(x;y)dx\right|<\varepsilon$.

Обозначим $\Phi(y;\eta)=\int_a^\eta f(x;y)dx$, где $a<\eta<b\le+\infty$. Тогда интеграл $\Phi(y)=\int_a^b f(x;y)dx$ равномерно сходится, если $\Phi(y;\eta)\rightrightarrows\Phi(y)$ при $\eta\to b$.

Символическая запись:

$$\int_a^\eta f(x;y)dx \rightrightarrows \int_a^b f(x;y)dx,\ \text{при}\ \eta\to b,\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\ \varepsilon>0\ \ \exists b'(y;\varepsilon)<b:\ \forall\ y\in Y\ \text{и}\ \forall\ \eta\in(b';b)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\int_{b'}^b f(x;y)dx\right|<\varepsilon .$$

Пример. Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos xydx,\ \ y\in \boldsymbol{R} .$$

Р е ш е н и е . Возьмем $\forall\ \varepsilon>0$.

Покажем, что существует $b'=b'(y;\varepsilon)$.

Имеем

$$\left|\int_\eta^{+\infty} e^{-x}\cos xydx\right|\le\int_\eta^{+\infty}e^{-x}dx=e^{-\eta}\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon .$$

Положим $b'(y;\varepsilon)=\ln\frac{2}{\varepsilon}$. Тогда $\forall\ \eta\in[b';+\infty)$ выполняется неравенство

$$\left|\int_\eta^{+\infty} e^{-x}\cos xydx\right|<\varepsilon .$$

Значит, интеграл сходится равномерно по параметру y на $\boldsymbol{R}$.

Теорема 1 (критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла по параметру). *Для того чтобы несобственный интеграл* $\Phi(y)=\int_a^b f(x;y)dx$ *сходился равномерно по параметру* y *на множестве* $Y\in \boldsymbol{R}$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists b'\in[a,b)$ *такое, что* $\forall\ \eta,\eta'\in[b';b)$ *и* $\forall\ y\in Y$ *выполнялось неравенство*

$$\left|\int_\eta^{\eta'} f(x;y)dx\right|<0 .$$

►*Необходимость*. Пусть $\int_a^b f(x;y)dx$ равномерно сходится по параметру y на множестве Y. Тогда $\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists b'\in[a,b)$ такое, что $\forall\ \eta\in[b';b)$ и $\forall\ y\in Y$ выполнялось неравенство

$$\left|\int_\eta^b f(x;y)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $\eta,\eta\xi'\in[b';b)$ и $\forall\ y\in Y$.

Тогда

$$\left|\int_\eta^{\eta'} f(x;y)dx\right|=\left|\int_\eta^b f(x;y)dx-\int_{\eta'}^b f(x;y)dx\right|\le$$

$$\le\left|\int_\eta^b f(x;y)dx\right|+\left|\int_{\eta'}^b f(x;y)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Достаточность. Пусть $\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists b'\in[a,b)$ такое, что $\forall\ \eta,\eta'\in[b';b)$ и $\forall\ y\in Y$ выполнено неравенство

$$\left|\int_\eta^{\eta'} f(x;y)dx\right|<0.$$

Тогда, в силу критерия Коши сходимости несобственных интегралов, $\int_a^b f(x;y)dx$ сходится при $\forall\ y\in Y$. В силу произвольности η', переходя к пределу при $\eta'\to b-0$, получаем, что $\forall\ \eta\in[b';b)$ и $\forall\ y\in Y$ выполнено неравенство $\left|\int_\eta^b f(x;y)dx\right|<\varepsilon$.

Отсюда следует, что интеграл $\int_a^b f(x;y)dx$ сходится равномерно по параметру y на множестве Y. ◄

Следствие. *Если* $\exists\varepsilon_0>0$ *такое, что* $\forall\, b'\in[a,b)$ $\exists\eta_0,\eta_0'\in[b';b)$ *и* $\exists\, y_0\in Y$ *такие, что*

$$\left|\int_{\eta_0}^{\eta_0'} f(x;y)dx\right|\ge\varepsilon_0,$$

то интеграл $\int_a^b f(x;y)dx$ *не сходится равномерно по параметру* y y *на множестве* Y.

Пример. Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty} ye^{-xy}dx,\ \ y\in[0;+\infty).$$

Решение. Возьмем $\varepsilon=\frac{1}{e}$. Тогда $\forall\ \ b'\in(0;+\infty)\ \ \exists\eta=b'$ и $y=\frac{1}{b'}$ такие, что

$$\int_\eta^{+\infty} ye^{-xy}dx=\int_{b'}^{+\infty} ye^{-xy}dx=\left[\begin{array}{l} t=xy,\\ y=\dfrac{t}{x},\\ x=\dfrac{t}{y},dx=dt\end{array}\right]=$$

$$=\int_{b'\cdot y}^{+\infty} e^{-t}dt=\int_1^{+\infty} e^{-t}dt=e^{-1}=\varepsilon.$$

Следовательно, интеграл $\int_0^{+\infty} ye^{-xy}dx$ сходится неравномерно по параметру y на множестве $Y=[0;+\infty)$.

2. Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Теорема 2 (признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла по параметру). *Пусть существует функция* $g(x)\ge 0$*, удовлетворяющая условиям*

1) $g(x)$ *определена на* $[a;b)$ *и интегрируема на* $[a;\eta]$*,* $a<\eta<b\le+\infty$*;*

2) $|f(x;y)|\le g(x)$ *для* $\forall x\in[a;b)$ *и* $\forall y\in Y$*;*

3) $\int\limits_a^b g(x)dx$ *сходится.*

Тогда интеграл $\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x;y)dx$ *сходится абсолютно и равномерно на* Y.

► Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Тогда из сходимости $\int\limits_a^b g(x)dx$, согласно критерию Коши сходимости интегралов, следует, что существует такое число $\eta(\varepsilon)>0$, $a\le\eta(\varepsilon)<b$, что для всех η' и η'', $\eta(\varepsilon)<\eta'<b$, $\eta(\varepsilon)<\eta''<b$, выполнялось неравенство $\left|\int\limits_{\eta'}^{\eta''} g(x)dx\right|<\varepsilon$.

Тогда $\left|\int\limits_{\eta'}^{\eta''} f(x;y)dx\right|\le\int\limits_{\eta'}^{\eta''}|f(x;y)|dx\le\int\limits_{\eta'}^{\eta''}|g(x)|dx<\varepsilon$. ◄

Пример. Исследовать на равномерную сходимость интегралы 1) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx$ по параметру α при $\alpha\in[0;+\infty)$,

2) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+y^2+1}$, $y\in\boldsymbol{R}$.

Решение.

1. Для интеграла $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx$ возможны два случая.

Случай 1. Пусть $0<\alpha_0\le\alpha$. Так как $e^{-\alpha x^2}\le e^{-\alpha_0 x^2}$ и $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x^2}dx$ сходится, то по признаку Вейерштрасса интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx$ сходится равномерно по параметру α на множестве $[\alpha_0;+\infty)$.

Случай 2. Пусть $\alpha\in(0;+\infty)$. Покажем, что на $(0;+\infty)$ интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx$ сходится неравномерно. Воспользуемся следствием из критерия Коши.

Возьмем $\varepsilon=\frac{1}{e}$, $\forall\, b>0$ возьмем $\eta_0=b$, $\eta_0'=b+1$, $\alpha_0=\frac{1}{(b+1)^2}$. Тогда

$$\int\limits_{\eta_0}^{\eta_0'}\varepsilon^{-\alpha_0 x^2}dx=\int\limits_b^{b+1}e^{-\alpha_0 x^2}dx\ge e^{-\alpha_0(b+1)^2}\int\limits_b^{b+1}dx=\frac{1}{e}=\varepsilon_0\,.$$

Следовательно, интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx$ сходится неравномерно по параметру α на множестве $[\alpha_0;+\infty)$.

2. Подынтегральная функция есть $f(x;y)=\frac{1}{x^2+y^2+1}$.

Возьмем функцию $g(x)=\frac{1}{x^2+1}$, для которой

$$f(x;y)=\frac{1}{x^2+y^2+1}\le\frac{1}{x^2+1}=g(x).$$

Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$ и является сходящимся для всех $x \in [0;+\infty)$.

Тогда интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+y^2+1}$ сходится равномерно согласно признаку Вейерштрасса.

Замечание. Пусть интеграл $\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x;y)dx$ (равномерно) сходится на множестве Y. И пусть последовательность (η_n), $n = 1,2,3,...$, $a \le \eta_n < b$, $\eta_0 = a$, сходится к b. Тогда последовательность функций $\Phi_n(y) = \int\limits_a^{\eta_n} f(x;y)dx$ (равномерно) сходится на множестве Y к функции $\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x;y)dx$.

Теорема 3 (признак Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла по параметру). *Пусть 1)* $\forall y \in Y$ *функции* $f(x;y)$, $g(x;y)$ *и* $\frac{\partial g}{\partial x}$ *непрерывны как функции* x *на полуинтервале* $[a;+\infty)$;

2) функция $F(x;y)$, *являющаяся при любом* $y \in Y$ *первообразной по* x *функции* $f(x;y)$, *ограничена при* $y \in Y$, $x \in [a;+\infty)$;

3) $\frac{\partial g}{\partial x} \le 0$ *при* $y \in Y$, *и* $x \in [a;+\infty)$;

4) существует непрерывная на $[a;+\infty)$ *функция* $\psi(x)$ *такая, что* $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = 0$ *и* $|g(x;y)| \le \psi(x)$ *для* $y \in Y$ *и* $x \in [a;+\infty)$.

Тогда интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x;y)g(x;y)dx$$

сходится равномерно по параметру y *на множестве* Y.

► По признаку Дирихле (для несобственных интегралов) несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x;y)g(x;y)dx$ сходится при любом $y \in Y$. Покажем, что он сходится равномерно по параметру y на множестве Y.

Так как по условию 4 функция $\psi(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists a' > a$ такое, что $\forall$ $\eta \in [a';+\infty)$ выполнено неравенство

$$\psi(x) < \frac{\varepsilon}{2C},$$

где C есть постоянная, ограничивающая, в силу условия 2, первообразную $F(x;y)$.

Пусть $y \in Y$ и $\eta \in [a';+\infty)$.

Воспользовавшись формулой интегрирования по частям и тем, что $g(x;y) \to 0$ при $x \to +\infty$ получаем

$$\int\limits_\eta^{+\infty} f(x;y)g(x;y)dx = F(\eta;y)g(\eta;y) - \int\limits_\eta^{+\infty} F(x;y)\frac{\partial g(x;y)}{\partial x}dx.$$

Так как по условию теоремы $|F(x;y)| \le C$ и $\frac{\partial g}{\partial x} \le 0$, $|g(x;y)| \le \psi(x)$, то получаем, что $\forall$ $\eta \in [a';+\infty)$ выполнено неравенство

$$\left|\int\limits_\eta^{+\infty} f(x;y)g(x;y)dx\right| \le C\psi(x) + \int\limits_\eta^{+\infty} C\left|\frac{\partial g(x;y)}{\partial x}\right|dx =$$

$$= C\psi(x) - \int\limits_\eta^{+\infty} C\frac{\partial g(x;y)}{x}dx = C\psi(x) + Cg(\eta;y) \le 2C\psi(x) < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x;y)g(x;y)dx$ сходится равномерно по параметру y на множестве Y. ◄

Замечание. Если $+\infty$ единственная особая точка сходящегося интеграла $\int_a^{+\infty} f(x;y)g(x;y)dx$, то интеграл сходится равномерно по параметру y на множестве Y в том и только в том случае, когда при любом $a'>a$ интеграл $\int_{a'}^{+\infty} f(x;y)g(x;y)dx$ сходится равномерно по параметру y на множестве Y. Поэтому для справедливости утверждения теоремы 2 достаточно, чтобы условия 1—4 выполнялись на некотором промежутке $[a';+\infty)\subset[a;+\infty)$.

Пример. Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx$$

по параметру y при $y\in[0;+\infty)$.

Р е ш е н и е.

Пусть $f(x;y)=\sin x$, $g(x;y)=\dfrac{e^{-xy}}{x}$.

Функция $\sin x$ имеет ограниченную первообразную $F(x)=-\cos x$.

При $x\geq 1$, $y\geq 0$ для функции $g(x;y)=\dfrac{e^{-xy}}{x}$ выполнены следующие неравенства:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-xy}}{x}\right)=-\frac{e^{-xy}}{x^2}(1+xy)<0,$$

$$\frac{e^{-xy}}{x}<\frac{1}{x}=\psi(x),\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Значит, согласно признаку Дирихле, данный интеграл сходится равномерно по параметру y на множестве $Y=[0;+\infty)$.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение несобственного интеграла, зависящего от параметра.
2. Дайте определение а) поточечной сходимости, б) равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.
3. Сформулируйте и докажите критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.
4. Сформулируйте и докажите признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.
5. Сформулируйте и докажите признак Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.