Лекция 3. ЦИРКУЛЯЦИЯ И РОТОР ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

1. Циркуляция векторного поля и ее физический смысл.
2. Ротор векторного поля.
3. Теорема Стокса.

1. Циркуляция векторного поля и ее физический смысл.

Рассмотрим область $Q \subset \boldsymbol{R}^3$, ориентированную линию Γ и векторную функцию $\vec{a} = \vec{a}(M)$, определенную на Γ. И пусть $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной к дуге Γ.

Определение 1. ***Циркуляцией*** C векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ вдоль замкнутой ориентированной кривой Γ называется число, равное значению интеграла:

$$C = \oint_{\Gamma} (a \cdot \vec{\tau}) dl . \qquad (1)$$

Учитывая, что

$$\vec{a} = \vec{a}(M) = X(x,y,z) \cdot \vec{i} + Y(x,y,z) \cdot \vec{j} + Z(x,y,z) \cdot \vec{k} ;$$

и $\vec{r} = \vec{r}(t)$ – векторное уравнение линии Γ, то

$$C = \oint_{\Gamma} (a \cdot \vec{\tau}) dl = \oint_{\Gamma} \text{пр}_{\vec{\tau}} \vec{a}\, dl = \oint_{\Gamma} (\vec{a} \cdot d\vec{r}) = \int_{\Gamma} Xdx + Ydy + Zdz .$$

Физический смысл циркуляции. Рассмотрим векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$ как поле $\vec{V} = \vec{V}(M)$ линейных скоростей движущейся жидкости.

Поместим в поток круглую пластинку с лопастями, расположенными по ее ободу – окружности Γ (рис.1).

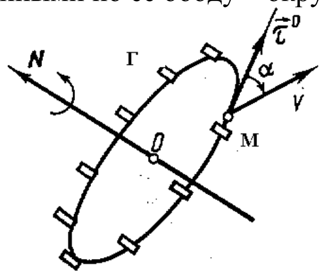

Рис.1.

Частицы жидкости, действуя на лопасти, создают вращательные моменты, суммарное действие которых приводит пластинку во вращение вокруг оси N. Ось N перпендикулярна к плоскости, в которой она расположена, и проходит через центр пластинки. Вращательный момент поля в каждой точке M характеризуется проекцией вектора $\vec{V}(M)$ на вектор $\vec{\tau}(M)$ касательной к окружности Γ, т.е. скалярным произведением $\vec{V} \cdot \vec{\tau} = \text{пр}_{\vec{\tau}} \vec{V}$. Суммирование вращательных моментов по всему контуру пластинки есть циркуляция вектора $\vec{V}(M) = \vec{a}(M)$. Абсолютная величина циркуляции определяет угловую скорость вращения пластинки вокруг оси N, проходящей через центр окружности Γ. Знак циркуляции показывает, в какую сторону осуществляется вращение относительно ориентации линии Γ. Так как под знаком интеграла (1) стоит скалярное произведение, то C зависит не только от модулей вектора $\vec{a}(M)$, но и от углов α (см. рис.1) между векторным полем и касательными к кривой Γ: чем меньше углы, тем больше циркуляция. Если во всех точках замкнутого контура Γ вектор $\vec{a}(M)$ ортогонален к Γ, то циркуляция равна нулю и вращательного движения вокруг этого контура не будет. Циркуляция может обращаться в нуль и за счет того, что на одной части контура Γ значение линейного интеграла (1) положительно, а на другой – отрицательно, и эти величины равны по модулю.

Если замкнутый контур Γ есть векторная линия поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$, то $\text{пр}_{\vec{\tau}} \vec{a} = |\vec{a}|$ и

$$C = \oint_{\Gamma} \text{пр}_{\vec{\tau}} \vec{a}\, dl = \oint_{\Gamma} |\vec{a}|\, dl \neq 0$$

при $\vec{a} \neq 0$.

Значит, *циркуляция поля* $\vec{a} = \vec{a}(M)$, $M \in Q$, *равная нулю по любому замкнутому контуру* $\Gamma \subset Q$, *является достаточным условием отсутствия в поле замкнутых векторных линий*.

Итак, дивергенция является локальной скалярной характеристикой векторного поля, устанавливающей наличие и характеризующей интенсивность источников (стоков) в данной точке.

Пример. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)=\vec{a}(x,y,z)=xy\cdot\vec{i}+yz\cdot\vec{j}+xz\cdot\vec{k}$ вдоль линии $\Gamma=\{(x;y;z)|x^2+y^2=1,\ x+y+z=1\}$.

Решение. Согласно формуле (1), имеем

$$C=\oint_\Gamma \vec{a}\cdot d\vec{r}=\oint_\Gamma Xdx+Ydy+Zdz=\oint_\Gamma xydx+yzdy+xzdz\ .$$

Линия Γ – эллипс, полученный в результате пересечения цилиндра $x^2+y^2=1$ и плоскости $x+y+z=1$. Параметрические уравнения Γ можно получить с учетом того, что все точки Γ проектируются на плоскость Oxy в окружность $x^2+y^2=1$, параметрические уравнения которой

$$\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t, \end{cases}$$

где $t\in[0;2\pi]$, и те же точки линии Γ лежат на плоскости $z=1-x-y$.

Следовательно, параметрические уравнения Γ имеют вид:

$$\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t, \\ z=1-\sin t-\cos t, \end{cases}$$

где $t\in[0;2\pi]$.

Тогда $dx=-\sin tdt$, $dy=\cos tdt$, $dz=(-\cos t+\sin t)dt$.

Имеем

$$C=\int_0^{2\pi}(-\sin^2 t\cos t+\sin t\cos t(1-\cos t-\sin t)+$$

$$+\cos t(1-\cos t-\sin t)(\sin t-\cos t))dt=-\pi\ .$$

2. Ротор векторного поля.

Локальной векторной характеристикой векторного поля, связанной с его вращательной способностью, является ротор (вихрь).

Плоский случай. Рассмотрим вначале плоское векторное по-

ле $\vec{a}=\vec{a}(M)$, $M\in Q\subset \boldsymbol{R}^2$, и произвольный контур $\Gamma\subset Q$, окружающий выбранную точку M_0. Площадь плоской площадки, заключенной внутри Γ, обозначим ΔS. Отношение $\frac{1}{\Delta S}\oint_\Gamma \vec{a}\cdot d\vec{r}$ представляет собой ***среднюю циркуляцию векторного поля*** $\vec{a}=\vec{a}(M)$ на выбранной площадке. Циркуляция в точке M_0 характеризуется пределом этого отношения при условии, что контур Γ стягивается в точку M_0 и $\Delta S\to 0$

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\oint_\Gamma \vec{a}\cdot d\vec{r}\ . \qquad (2)$$

Пространственный случай. В случае пространственного поля $\vec{a}=\vec{a}(M)$, $M\in Q\subset \boldsymbol{R}^3$ Рассмотрим вращательную способность векторного поля в выбранной точке M_0 и заданном направлении N. Для этого проведем через точку M_0 плоскость, перпендикулярную к N, и рассмотрим на ней произвольный положительно-ориентированный контур Γ, охватывающий точку M_0. Значение предела (2) характеризует вращательную способность поля $\vec{a}=\vec{a}(M)$ в точке M_0 в направлении N.

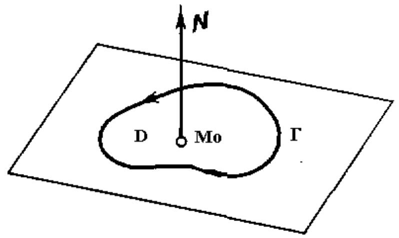

Рис.2.

О п р е д е л е н и е 2. ***Ротором (вихрем)*** векторного поля $\vec{a}=\vec{a}(M)$ в точке M_0 называется вектор, обозначаемый $\operatorname{rot}\vec{a}(M_0)$, проекция которого на любое направление N

$$\text{пр}_{\text{N}}\text{rot}\vec{a}(P_0)=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\oint_{\Gamma}\vec{a}\cdot d\vec{r}\,. \qquad (3)$$

Пусть контур Γ, уравнение которого $\vec{r}=\vec{r}(t)$, положительно ориентирован, лежит в плоскости, перпендикулярной к N, и ограничивает область, площадь которой ΔS. В правую часть равенства (3) входят величины, инвариантные относительно выбора системы координат (циркуляция векторного поля вдоль замкнутого контура и площадь плоской области). Поэтому данная формула дает инвариантное определение проекции $\text{rot}\,\vec{a}(M_0)$ в точке M_0 на направление, определяемое заданным вектором.

Теорема 1. *Если векторное поле*

$$\vec{a}(M)=X(x,y,z)\vec{i}\,+\,+Y(x,y,z)\vec{j}+Z(x,y,z)\vec{k}$$

непрерывно дифференцируемо в области Q*, то в каждой точке* $M\in Q$ *существует* $\text{rot}\vec{a}(M)$*, определяемый по формуле*

$$\text{rot}\,\vec{a}(M)=\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cdot\vec{i}+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cdot\vec{j}+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\cdot\vec{k}\,. \qquad (4)$$

►Существование $\text{rot}\,\vec{a}(M)$ в области Q следует из непрерывной дифференцируемости функции $\vec{a}=\vec{a}(M)$, $M\in Q$.

Возьмем точку $M\in Q$ и выберем декартову прямоугольную систему координат. В качестве направления N выберем ось Oz. Через точку M проведем плоскость, перпендикулярную к оси Oz, ее уравнение $z=\text{const}$. На этой плоскости возьмем произвольную положительно-ориентированную кривую Γ, окружающую выбранную точку M. Область, заключенную внутри Γ, обозначим через G, ее площадь – через ΔS (рис.3).

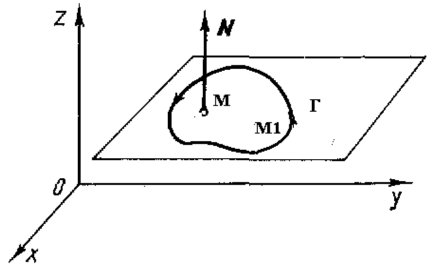

Рис.3.

Согласно формуле (3),

$$\text{пр}_z\text{rot}\,\vec{a}(M)=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\oint_{\Gamma}\vec{a}\cdot d\vec{r}\,. \qquad (5)$$

Интеграл, стоящий в правой части формулы (5), в скалярной форме имеет вид

$$\oint_{\Gamma}\vec{a}\cdot d\vec{r}=\oint_{\Gamma}Xdx+Ydy$$

(в рассматриваемой плоскости $dz=0$). В результате применения к этому интегралу формулы Остроградского – Грина, а затем теоремы о среднем значении, получим

$$\oint_{\Gamma}Xdx+Ydy=\iint_{G}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)dS=\left(\frac{\partial Y(P_1)}{\partial x}-\frac{\partial X(P_1)}{\partial y}\right)\Delta S\,,$$

где M_1 – некоторая точка, принадлежащая области G. Подставляя найденное выражение в формулу (5), имеем

$$\text{пр}_z\text{rot}\,\vec{a}(M)=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\left(\frac{\partial Y(M_1)}{\partial x}-\frac{\partial X(M_1)}{\partial y}\right)\Delta S=\frac{\partial Y(M)}{\partial x}-\frac{\partial X(M)}{\partial y}$$

.

Аналогично можно найти проекции $\text{rot}\vec{a}(P)$ на две другие оси координат:

$$\text{пр}_x\text{rot}\vec{a}(M)=\frac{\partial Z(M)}{\partial y}-\frac{\partial Y(M)}{\partial z},$$

$$\text{пр}_y\text{rot}\vec{a}(M)=\frac{\partial X(M)}{\partial z}-\frac{\partial Z(M)}{\partial x}\,. \;◄$$

Замечание. Символическая форма записи $\mathrm{rot}\,\vec{a}$ имеет вид

$$\mathrm{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

Пример. Найти ротор вектора

$$\vec{a} = \vec{a}(x, y, z) = \left(x^2 + y^2\right)\vec{i} + \left(y^2 + z^2\right)\vec{j} + +\left(z^2 + x^2\right)\vec{k}$$

в произвольной точке поля.

Решение. Заданная векторная функция непрерывно дифференцируема на всем пространстве $\boldsymbol{R}^3$. Так как

$$X = x^2 + y^2,\ Y = y^2 + z^2,\ Z = z^2 + x^2,$$

то

$$\mathrm{rot}\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + y^2 & y^2 + z^2 & x^2 + z^2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2z \cdot \vec{i} - 2x \cdot \vec{j} - 2y \cdot \vec{k} = -2\left(z \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k}\right).$$

3. Теорема Стокса.

Теорема 2 (Стокса). *Циркуляция C непрерывно дифференцируемого векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ по замкнутому положительно-ориентированному контуру Γ равна потоку ротора этого поля через любую гладкую поверхность Ω, опирающуюся на Γ*:

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \iint_{\Omega} \left(\mathrm{rot}\vec{a} \cdot \vec{n}\right) dS. \qquad (7)$$

Замечания. 1. Формулу Стокса можно записать в скалярной форме относительно декартовой прямоугольной системы координат:

$$C = \oint_{\Gamma} Xdx + Ydy + Zdz = \iint_{G} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos\alpha dS +$$

$$+\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cos\beta dS + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos\gamma dS.$$

2. Из теоремы Стокса следует, что если в поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$ на контур Γ опираются две поверхности Ω_1 и Ω_2, то потоки $\mathrm{rot}\vec{a}$ через эти поверхности равны.

3. В случае если $\vec{a} = \vec{a}(M)$ – плоское поле, формула Стокса обращается в формулу Остроградского – Грина (в качестве поверхности Ω может быть взята плоская область D, ограниченная Γ). В связи с этим формуле Остроградского – Грина можно дать следующее векторное толкование: *циркуляция плоского векторного поля равна потоку его ротора через область, лежащую внутри контура*.

Пример. Вычислить циркуляцию вектора $a = y \cdot \vec{i} + x^2 \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ по контуру Γ: $x^2 + y^2 = 4$, $z = 3$ непосредственно и с помощью формулы Стокса.

Решение. Линия Γ – окружность радиусом 2 с центром в точке $(0;0;3)$, лежащая в плоскости (рис.4). Ориентацию на Γ выберем в соответствии с рис.1.

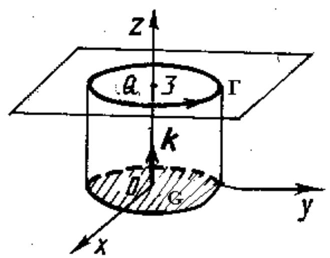

Рис.4.

Параметрические уравнения линии Γ имеют вид

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \\ z = 3, \end{cases}$$

где $t \in [0;2\pi]$.

Для вычисления циркуляции по формуле Стокса выберем какую-нибудь поверхность Ω, «натянутую» на Γ. Возьмем в качестве Ω круг, границей которого является окружность Γ. Согласно выбранной ориентации контура, в качестве нормали $\vec{n}$ к кругу Ω возьмем вектор $\vec{k}$. По формуле Стокса ротор заданного вектора $\vec{a}$:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & x^2 & -z \end{vmatrix} = (2x-1)\cdot\vec{k} = \vec{a}_1 .$$

С другой стороны

$$C = \oint\limits_{\Gamma} \vec{a}_1 \cdot d\vec{r} = \iint\limits_{\Omega} (\operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n})dS = \iint\limits_{\Omega} (2x-1)\cos\gamma\, dS = \iint\limits_{G_{xy}} (2x-1)dxdy =$$

$$= \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, J = r, \\ 0 \le r \le 2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{bmatrix} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r(2r\cos\varphi - 1)dr = -4\pi .$$

Вопросы для самоконтроля

1.Что называется циркуляцией векторного поля?
2. В чем состоит физический смысл циркуляции?
3. Что называется ротором векторного поля?
4. Сформулируйте теорему о выражении ротора через координатные функции векторного поля.
5. Сформулируйте теорему Стокса.