Тема 5
ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Лекция 1. СКАЛЯРНЫЕ ПОЛЯ

1. Понятие о задачах векторного анализа и теории поля.
2. Определение скалярного поля.
3. Градиент скалярного поля.

1. Понятие о задачах векторного анализа и теории поля.

При изучении многих процессов и явлений рассматривают величины, значения которых определяются выбранной точкой пространства и моментом времени. Если такая величина принимает числовые значения, то, с математической точки зрения, задана скалярная функция точки и времени, если векторные – векторная функция точки и времени

$$U = U(P,t),\ \vec{a} = \vec{a}(P,t),\ P \in Q \subset \boldsymbol{R}^3,\ t \in [t_0;t_1]. \quad (1)$$

Раздел математики, в котором изучаются функции вида (1), называют *векторным анализом*. В физике, электротехнике, теориях тепло- и массопереноса, упругости и пластичности методы векторного анализа используются для изучения ***скалярных*** и ***векторных полей***, которые рассматриваются в качестве математических моделей конкретных процессов и явлений. Если процесс не зависит от времени (***стационарный***), то характеризующая его функция (1) не зависит от параметра t. В данной лекции рассматриваются только стационарные процессы.

2. Определение скалярного поля.

Определение 1. ***Стационарным скалярным полем*** называется пространство $\boldsymbol{R}^n$ (или его часть – область Q), в каждой точке P которого определена скалярная функция

$$U = U(P) = U(x_1, x_2, ..., x_n) = U(\vec{r}), \quad (2)$$

где ($\vec{r}$ – радиус-вектор точки $P(x_1, x_2, ..., x_n)$). Эту функцию, независимо от ее физического смысла, называют ***потенциалом*** скалярного поля.

Пример. Скалярными полями являются поле давлений, поле

освещенности, поле температур, поле плотностей зарядов.

Основными характеристиками скалярного поля являются: поверхности (линии) уровня, производная по направлению и градиент.

Определение 2. ***Поверхностью уровня*** скалярного поля (2) называется множество точек, в каждой из которых его потенциал $U(P)$ сохраняет постоянное значение.

Уравнение поверхности уровня в $\boldsymbol{R}^3$ записывается в виде

$$U(x_1, x_2, x_3) = C. \quad (3)$$

Постоянная величина C принимает такие значения, при которых равенство (3) имеет геометрический смысл. Величины x_1, x_2, x_3 определяются выбором системы координат

Если скалярное поле плоское $\boldsymbol{R}^2$, то рассматривают ***линии уровня***, уравнения которых имеют вид

$$U(x_1, x_2) = C. \quad (4)$$

Исследование скалярного поля с помощью введенных геометрических характеристик в некоторых случаях дает достаточно наглядное описание соответствующего поля.

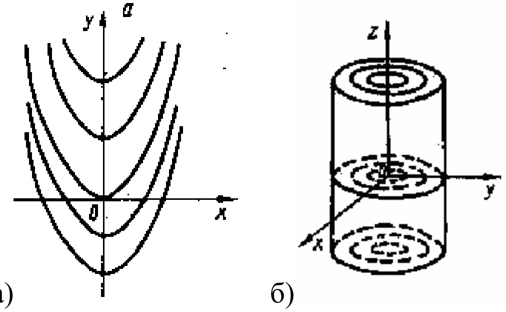
Пример. Если потенциал поля задает уровень точек земной поверхности по отношению к уровню моря, то линии (4) – *горизонтали* топографической карты: они соединяют точки с одинаковыми высотами земной поверхности и наглядно описывают рельеф местности. На синоптических картах линии, соединяющие точки с одинаковым давлением, называются *изобарами*, линии равных температур – *изотермами*.

Пример. Найти линии и поверхности уровня следующих полей 1) $U(x,y) = x^2 - 2y$; 3) $U(x,y,z) = x^2 + y^2$.

Решение. 1) Функция, задающая потенциал поля, зависит от двух переменных. Следовательно, уравнения линий уровня поля (4) имеют вид $x^2 - 2y = C$. С геометрической точки зрения, это множество парабол (рис.1,а), определенное на всей плоскости Oxy.

2) Заданный потенциал определяет скалярное поле во всем пространстве $\boldsymbol{R}^3$. Согласно соотношению (3), уравнения экви-

потенциальных поверхностей имеют вид $x^2+y^2=C$, $C>0$. С геометрической точки зрения, это множество круговых цилиндров (рис.1,б).



а) б)

Рис.1.

3. Градиент скалярного поля.

Производная по направлению скалярного поля. Пусть в области Q задано скалярное поле $U=U(P)$. Рассмотрим точку $P_0\in Q$ и какое-либо фиксированное направление, определяемое единичным вектором $\vec{\tau}^{\,0}$. Через точку P_0 проведем прямую l, параллельную вектору $\vec{\tau}^{\,0}$, и выберем на ней точку P (рис.2).

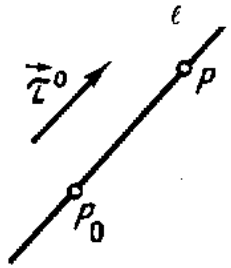


Рис.2.

Средняя скорость изменения потенциала $U(P)$ в направлении $\vec{\tau}^{\,0}$ может быть представлена как отношение приращения потенциала к соответствующей величине перемещения:

$$\frac{\Delta U}{|P_0P|}=\frac{U(P)-U(P_0)}{|P_0P|}.$$

Определение 3. ***Производной*** функции $U=U(P)$ в точке P_0 ***по направлению вектора*** $\vec{\tau}^{\,0}$ называется предел (если он существует) отношения приращения функции ΔU к величине перемещения $|P_0P|$, когда последнее стремится к нулю.

Если перемещение в направлении $\vec{\tau}^{\,0}$ происходит по прямой l, то производная по направлению обозначается $\dfrac{\partial U}{\partial l}$ и

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial l}=\lim_{|P_0P|\to 0}\frac{\Delta U}{|P_0P|}. \qquad (5)$$

Величина $\dfrac{\partial U(P_0)}{\partial l}$ характеризует скорость изменения скалярного поля $U(P)$ в точке P_0 по выбранному направлению. Если $\dfrac{\partial U(P_0)}{\partial l}>0$, то скалярное поле в точке P_0 возрастает, в противном случае – убывает.

Производная по направлению выражается через декартовы координаты в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ как

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial l}=\frac{\partial U(P_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial U(P_0)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial U(P_0)}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (6)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы (рис.3) вектора $\vec{\tau}^{\,0}$.

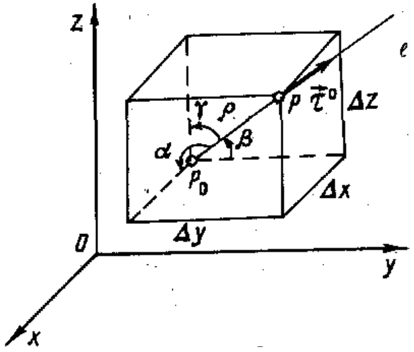


Рис.3.

В случае плоского скалярного поля ($U = U(x, y)$) имеем

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial l} = \frac{\partial U(P_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U(P_0)}{\partial y}\sin\alpha . \qquad (7)$$

Замечание. Частные производные от потенциала поля $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ являются производными функциями $U = U(x, y, z)$ по направлению координатных осей Ox, Oy, Oz соответственно.

Пример. Найти производную скалярного поля $u = xyz$ в точке $P_0(1;-1;1)$ по направлению вектора $\overrightarrow{P_0P_1}$, если точка $P_1(2;3;1)$.

Решение. Найдем направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{P_0P_1} = (1;4;0)$, длина которого $\left|\overrightarrow{P_0P_1}\right| = \sqrt{17}$. Имеем $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$, $\cos\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$, $\cos\gamma = 0$.

Вычислим значения частных производных функции $U = xyz$ в точке $P_0(1;-1;1)$:

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial x} = yz\big|_{P_0} = -1, \quad \frac{\partial U(P_0)}{\partial y} = xz\big|_{P_0} = 1, \quad \frac{\partial U(P_0)}{\partial z} = xy\big|_{P_0} = -1 .$$

По формуле (6) получаем

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial l} = -\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}} - 1\cdot 0 = \frac{3}{\sqrt{17}} .$$

Определение 4. ***Градиентом*** скалярного поля $U(P)$ в случае $P \in \boldsymbol{R}^3$ в точке P_0 называется вектор $\mathrm{grad}\,U(P_0)$, проекциями которого на оси декартовой прямоугольной системы координат являются частные производные функции $U(P)$ по соответствующим переменным, т.е.

$$\mathrm{grad}\,U(P_0) = \frac{\partial U(P_0)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U(P_0)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U(P_0)}{\partial z}\vec{k} . \qquad (8)$$

Поскольку

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma =$$

$$= \left(\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right), \left(\cos\alpha\cdot\vec{i} + \cos\beta\cdot\vec{j} + \cos\gamma\cdot\vec{k}\right)\right) = \qquad (9)$$

$$= \left(\mathrm{grad}\,U, \vec{\tau}^{\,0}\right) = \left|\mathrm{grad}\,U\right|\cdot\left|\vec{\tau}^{\,0}\right|\cos\left(\mathrm{grad}\,U \,\hat{,}\, \vec{\tau}^{\,0}\right) =$$

$$= \left|\mathrm{grad}\,U\right|\cos\left(\mathrm{grad}\,U \,\hat{,}\, \vec{\tau}^{\,0}\right) = \text{пр}_{\vec{\tau}^{\,0}}\,\mathrm{grad}\,U = \text{пр}_l\,\mathrm{grad}\,U ,$$

то производная по направлению, заданная формулой (6), равна проекции вектора $\mathrm{grad}\,U$ на это направление.

Из соотношения (9) следует, если $\frac{\partial U}{\partial l}$ достигает наибольшего значения, то правая часть равенства (9) принимает наибольшее положительное значение, что имеет место, когда вектор $\vec{\tau}^{\,0}$ направлен так же, как и $\mathrm{grad}\,U$. Следовательно, *направление градиента является направлением, наибыстрейшего возрастания скалярного поля в данной точке*. Отметим, что *модуль градиента равен наибольшей скорости возрастания потенциала скалярного поля* $U(P)$ *в данной точке*, поскольку максимальное значение проекции вектора равно его модулю:

$$\frac{\partial U}{\partial l_{\max}} = \left|\operatorname{grad} U\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} \qquad (10)$$

Определение 4. ***Градиентом*** скалярного поля называется вектор, имеющий направление наибольшего возрастания потенциала поля в данной точке и модуль, равный значению производной от потенциала поля по этому направлению.

Пример. Найти градиент поля $U = x^2 + xyz$ в точке $P_0(1;-1;2)$ и наибольшую скорость изменения потенциала в этой точке.

Решение. Воспользуемся формулами (8) и (10), определив предварительно значения частных производных функции $U = x^2 + xyz$ в заданной точке:

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial x} = (2x + yz)\big|_{P_0} = 0, \quad \frac{\partial U(P_0)}{\partial y} = xz\big|_{P_0} = 2,$$

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial z} = xy\big|_{P_0} = -1.$$

Тогда

$$\operatorname{grad} U(P_0) = 2j - k, \quad \frac{\partial U}{\partial l_{\max}} = \sqrt{5}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какие поля называются скалярными?
2. Что называется поверхностью и линией уровня скалярного поля?
3. Как определяется производная по направлению скалярного поля?
4. Что называется градиент скалярного поля?