Лекция 5. ФОРМУЛЫ ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА И СТОКСА

1. Формула Остроградского-Гаусса.
2. Формула Стокса.

1. Формула Остроградского-Гаусса.

Формула Остроградского-Гаусса устанавливает связь между поверхностными интегралами второго рода по замкнутой поверхности и тройными интегралами по пространственной области, ограниченной этой поверхностью.

Теорема 1. *Пусть*

1) Q - элементарная относительно оси Oz замкнутая область, ограниченная поверхностью Ω;

2) функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в области Q.

Тогда справедлива формула Остроградского-Гаусса

$$\iint_{\Omega} Pdydz + Qdzdx + Rdxdz = \iiint_{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz \quad (1)$$

► Пусть Q ограничена снизу поверхностью Ω_1, уравнение которой $z = z_1(x;y)$, сверху – поверхностью Ω_2, уравнение которой $z = z_2(x;y)$, сбоку цилиндрической поверхностью Ω_3, образующие которой параллельны оси Oz (рис.1). Функции $z = z_1(x;y)$, $z = z_2(x;y)$ непрерывны в замкнутой области G_{xy} – проекции V на плоскость Oxy, причем $z_1(x;y) \le z_2(x;y)$.

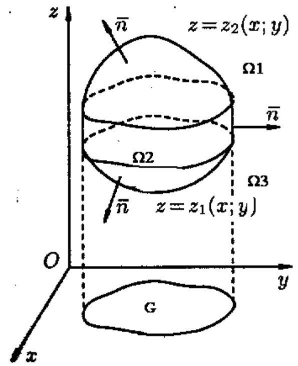

Рис.1.

Преобразуем тройной интеграл $\iiint_{Q}\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz$ в поверхностный. Для этого сведем его к повторному интегралу и по формуле Ньютона-Лейбница выполним интегрирование по z. Получим

$$\iiint_{Q}\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz = \iint_{G_{xy}}dxdy\int_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)}\frac{\partial R}{\partial z}dz =$$

$$= \iint_{G_{xy}}R(x;y;z_2(x;y))dxdy - \iint_{G_{xy}}R(x;y;z_1(x;y))dxdy.$$

Двойные интегралы заменим равными им поверхностными интегралами, взятыми по внешней стороне поверхностей Ω_1 и Ω_2 соответственно

$$\iiint_{Q}\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz = \iint_{\Omega_2}R(x;y;z)dxdy - \iint_{\Omega_1}R(x;y;z)dxdy.$$

Меняя в интеграле по Ω_1 сторону поверхности, получаем

$$\iiint_{Q}\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz = \iint_{\Omega_2}R(x;y;z)dxdy + \iint_{\Omega_1}R(x;y;z)dxdy.$$

Интеграл по цилиндрической поверхности Ω_3 равен нулю, т.е. $\iint\limits_{\Omega_3} R(x;y;z)dxdy = 0$. Добавляя его в предыдущее равенство, получим

$$\iiint\limits_{Q} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz =$$

$$= \iint\limits_{\Omega_2} R(x;y;z)dxdy + \iint\limits_{\Omega_1} R(x;y;z)dxdy + \iint\limits_{\Omega_3} R(x;y;z)dxdy .$$

Отсюда

$$\iiint\limits_{Q} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \oiint\limits_{\Omega} R(x;y;z)dxdy , \qquad (2)$$

где Ω – поверхность, ограничивающая область Q.

Аналогично доказываются формулы

$$\iiint\limits_{Q} \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \oiint\limits_{\Omega} Q(x;y;z)dzdx , \qquad (3)$$

$$\iiint\limits_{Q} \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \oiint\limits_{\Omega} P(x;y;z)dydz . \qquad (4)$$

Складывая почленно равенства (2), (3), (4), получаем формулу Остроградского-Гаусса (1). ◄

Замечания. 1. Формула Остроградского-Гаусса (1) справедлива для любой области Q, которую можно разбить на конечное число элементарных областей.

2. Формулу Остроградского-Гаусса можно использовать для вычисления поверхностных интегралов второго рода по замкнутым поверхностям.

Пример. Вычислить интеграл $\oiint\limits_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy$, где Ω – внешняя сторона пирамиды, ограниченной плоскостями $x + y + z - 1 = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Решение. Используя формулу Остроградского-Гаусса, имеем

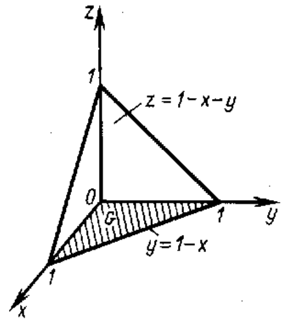

Рис.2.

$$\oiint\limits_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy = \iiint\limits_{V} (1+1+1)dxdydz = 3\iiint\limits_{V} dxdydz =$$

$$= 3\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = 3\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(z\Big|_0^{1-x-y} \right) dy = 3\int_0^1 \left(y - xy - \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{1-x} \right) dx =$$

$$3\int_0^1 \left(1 - x - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2} .$$

2. Формула Стокса.

Формула Стокса устанавливает связь между поверхностными интегралами и криволинейными интегралами.

Теорема 2. *Пусть 1)* Ω *– элементарная относительно оси* Oz *поверхность, заданная уравнением* $z = z(x;y)$, *где функции* $z(x;y)$, z_x, z_y *– непрерывны в замкнутой области* G, *проекции* Ω *на* Oxy;

2) Γ *– контур, ограничивающий область* Ω, Γ_1 *– его проекция на плоскость* Oxy, *являющаяся контуром, ограничивающим область* G;

3) функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ *непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка на выбранной стороне поверхности* Ω.

Тогда имеет место формула Стокса

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_{\Omega^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx .$$

► Преобразуем криволинейный интеграл вида $\oint_{\Gamma} P(x;y;z)dx$ в интеграл по поверхности согласно схеме $\oint_{\Gamma} \to \oint_{\Gamma_1} \to \iint_{G} \to \iint_{\Omega^+}$.

Шаг 1: $\oint_{\Gamma} \to \oint_{\Gamma_1}$.

Так как контур Γ лежит на поверхности Ω, то координаты его точек удовлетворяют уравнению $z = z(x;y)$. Поэтому значения функции $P(x;y;z)$ в точках контура Γ, равны значениям функции $P(x;y;z(x;y))$ в соответствующих точках контура Γ_1, являющегося проекцией Γ. Проекции же соответствующих участков разбиения контуров Γ и Γ_1 на ось Ox совпадают.

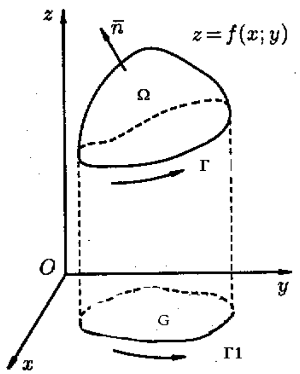

Рис.3.

Значит, совпадают также интегральные суммы для криволинейных интегралов второго рода от функции P по контурам Γ и Γ_1. Следовательно, равны и интегралы

$$\oint_{\Gamma} P(x;y;z)dx = \oint_{\Gamma_1} P(x;y;z(x;y))dx .$$

Шаг 2: $\oint_{\Gamma_1} \to \iint_{G}$.

Применяя формулу Грина, перейдем к двойному интегралу по области G. Так как подынтегральная функция равна частной производной y от сложной функции, получающейся из $P(x;y;z)$ после подстановки $z(x;y)$ вместо z, то получаем

$$\oint_{\Gamma_1} P(x;y;z(x;y))dx = -\iint_{G} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot z_y' \right) dxdy .$$

Шаг 3: $\iint_{G} \to \iint_{\Omega}$.

Поскольку Ω^+ – верхняя сторона поверхности, т. е. $\cos\gamma > 0$ (γ — острый угол между нормалью и осью Oz), то вектор нормали имеет координаты $\vec{N} = (-z_x; -z_y; 1)$. Так как направляющие косинусы нормали пропорциональны соответствующим проекциям:

$$\cos\alpha = -\frac{z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} , \ \cos\beta = -\frac{z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} ,$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} ,$$

то $\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \dfrac{-z_y'}{1} = -z_y'$.

Поэтому

$$-\iint_{G} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot z_y' \right) dxdy = -\iint_{G} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \right) dxdy .$$

Учитывая, что $dxdy = \cos\gamma\, dS$, получим

$$-\iint_{G} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \right) dxdy = -\iint_{G} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \cos\gamma - \frac{\partial P}{\partial z} \cos\beta \right) dS .$$

Поскольку $\cos\gamma\, dS = dxdy$ и $\cos\beta\, dS = dzdx$, то

$$-\iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma - \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta \right) dS = -\iint_{\Omega^+} \frac{\partial P}{\partial y} dxdz - \frac{\partial P}{\partial z} dzdx =$$

$$= \iint_{\Omega^+} \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy .$$

или

$$\oint_\Gamma P(x;y;z)dx = \iint_{\Omega^+} \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy .$$

Аналогично доказываются при соответствующих условиях равенства

$$\oint_\Gamma Q(x;y;z)dy = \iint_{\Omega^+} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z} dydz ,$$

$$\oint_\Gamma R(x;y;z)dz = \iint_{\Omega^+} \frac{\partial R}{\partial y} dydz - \frac{\partial R}{\partial x} dzdx .$$

Складывая почленно три последних равенства, получаем формулу Стокса. ◄

Следствие. *Если* $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, *то*

1) $\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0$.

2) подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(z;y;z)$, *для которой:*

$$Pdx + Qdy + Rdz = dU .$$

Без доказательства.

Замечания. 1. Формула Стокса справедлива для любой области, которую можно разбить на конечное число простых областей указанного вида.

2. Формулу Стокса можно записать в виде

$$\oint_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_{\Omega^+} \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\cos\gamma + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)\cos\beta \right] dS$$

и легко запомнить, используя для подынтегрального выражения определитель

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

а также $\cos\gamma\, ds = dxdy$, $\cos\beta\, ds = dzdx$ и $\cos\alpha\, ds = dydz$.

Пример. Вычислить интеграл $\oint_\Gamma x^2 y^3 dx + dy + zdz$, используя формулу Стокса, где

$$\Gamma = \left\{ (x;y;z) \middle| x^2 + y^2 = R^2,\ z = 0 \right\},$$

взяв в качестве поверхности полусферу

$$\Omega = \left\{ (x;y;z) \middle| z = +\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right\}.$$

Решение.

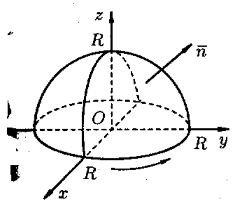

Рис.4.

Так как

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -3x^2y^2,\ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0,$$

по формуле Стокса, получаем

$$\oint_{\Gamma^+} x^2 y^3 dx + dy + zdz = -3\iint_{\Omega^+} x^2 y^2 dxdy = -3\iint_G x^2 y^2 dxdy =$$

$$= \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ 0 \le r \le R, 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ |J| = r. \end{bmatrix} = -3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^5 \sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi \, dr =$$

$$= -3\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi \, d\varphi \int_0^R r^5 dr = -\frac{R^6}{2} \cdot \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi \, d\varphi =$$

$$= -\frac{R^6}{8} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4\varphi) \, d\varphi = -\frac{R^6}{16} \varphi\Big|_0^{2\pi} + 0 = -\frac{\pi R^6}{8}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Напишите формулу Остроградского-Гаусса и сформулируйте условия, при которых эта формула верна.
2. Напишите формулу Стокса и сформулируйте условия, при которых эта формула верна.