Лекция 3. СВЕДЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА К ПОВТОРНОМУ

1. Формула вычисления двойного интеграла по прямоугольнику к повторному интегралу.
2. Сведение повторного интеграла по элементарной области.

1. Формула вычисления двойного интеграла по прямоугольнику к повторному интегралу.

Рассмотрим двойной интеграл по прямоугольнику

$$D = \{(x; y) | a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

со сторонами, параллельными осям координат.

Теорема 1. *Пусть*

1) для функции $f(x; y)$ *в прямоугольнике* D *существует двойной интеграл* $\iint\limits_D f(x; y)dxdy$ *;*

2) для каждого x *из отрезка* $[a; b]$ *существует определенный интеграл* $I(x) = \int\limits_c^d f(x; y)dy$.

Тогда существует повторный интеграл $\int\limits_a^b I(x)dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x; y)dy \right) dx$ *и справедливо равенство:*

$$\iint\limits_D f(x; y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x; y)dy \right) dx . \qquad (1)$$

► Разобьем прямоугольник D с помощью точек

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \text{ и}$$

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{k-1} < y_k = d$$

на nk частичных прямоугольников

$$D_{ij} = \{(x; y) | x_{i-1} \le x \le x_i, \ y_{j-1} \le y \le y_j\}, \ i = 1,2,\ldots,n, \ j = 1,2,\ldots,k .$$

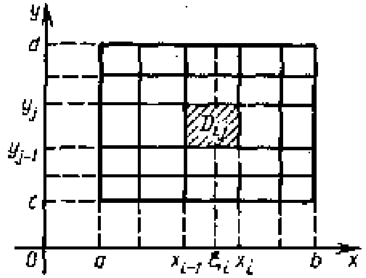

Рис.1.

Положим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$. Обозначим m_{ij} и M_{ij} наименьшее и наибольшее значения функции $f(x; y)$ в прямоугольнике D_{ij}. Тогда

$$m_{ij} \le f(x; y) \le M_{ij} \qquad (2)$$

всюду в этом прямоугольнике.

Положим в этом неравенстве $x = \xi_i$, где произвольная точка ξ_i отрезка $[x_{i-1}; x_i]$.

Проинтегрируем (2) по y в пределах от y_{j-1} до y_j:

$$m_{ij}\Delta y_j \le \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i; y)dy \le M_{ij}\Delta y_j . \qquad (3)$$

Суммируя (3) по всем j от 1 до k, получим

$$\sum_{j=1}^{k} m_{ij}\Delta y_j \le \int\limits_c^d f(\xi_i; y)dy \le \sum_{j=1}^{k} M_{ij}\Delta y_j \text{ или}$$

$$\sum_{j=1}^{k} m_{ij}\Delta y_j \le I(\xi_i) \le \sum_{j=1}^{k} M_{ij}\Delta y_j . \qquad (4)$$

Умножая (4) на Δx_i и суммируя по всем i от 1 до n, имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} m_{ij}\Delta y_j \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} I(\xi_i) \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} M_{ij}\Delta y_j \Delta x_i . \qquad (5)$$

Пусть наибольший диаметр частичных прямоугольников D_{ij} стремится к нулю, $\lambda \to 0$. Тогда и наибольшая из длин $\Delta x_i \to 0$:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} m_{ij}\Delta y_j \Delta x_i \le \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} I(\xi_i) \le \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} M_{ij}\Delta y_j \Delta x_i .$$

Крайние члены в выражении (5), представляющие собой нижнюю и верхнюю суммы Дарбу, стремятся к двойному интегралу $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$. Поэтому существует предел и среднего члена (5), равный тому же самому двойному интегралу. Но этот предел по определению определенного интеграла равен $\int\limits_a^b I(x)dx$.

Поэтому

$$\int\limits_a^b I(x)dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x;y)dy \right) dx . \blacktriangleleft$$

Замечания. 1. Повторный интеграл $\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x;y)dy \right) dx$ можно записывать в виде $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x;y)dy$.

2. Если в теореме 1 поменять ролями x и y, то существует повторный интеграл $\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x;y)dx$ и справедлива формула

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x;y)dx . \qquad (6)$$

2. Сведение двойного интеграла к повторному элементарной области.

Пусть $\varphi(x)$ $\psi(x)$ непрерывные на отрезке $[a;b]$ функции и $\varphi(x) \le \psi(x)$ $\forall x \in [a;b]$.

О п р е д е л е н и е 1. Область

$$G = \{(x;y) | a \le x \le b, \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$$

называется ***элементарной*** относительно оси Oy.

О п р е д е л е н и е 2. Область

$$G = \{(x;y) | \alpha(y) \le x \le \beta(y), c \le y \le d\}$$

называется ***элементарной*** относительно оси Ox.

Здесь функции $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ непрерывны на отрезке $[c;d]$ и $\alpha(y) \le \beta(y)$.

Поскольку граница ∂G состоит из графиков непрерывных функций, то G является измеримой по Жордану областью.

Теорема 2. *Пусть*

1) функция $z = f(x;y)$ определена в области

$$G = \{(x;y) | a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\},$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – непрерывные функции, $y_1(x) \le y_2(x)$ для любого x из отрезка $[a;b]$;

2) существует двойной интеграл $\iint\limits_G f(x;y)dxdy$;

3) для каждого x из отрезка $[a;b]$ существует определенный интеграл $I(x) = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy$.

Тогда существует повторный интеграл $\int\limits_a^b I(x)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy$ и справедливо равенство

$$\iint\limits_G f(x;y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy . \qquad (7)$$

► Положим $c = \min\limits_{[a;b]} y_1(x)$ и $d = \max\limits_{[a;b]} y_2(x)$. Заключим область G в прямоугольник $D = \{(x;y) | a \le x \le b, c \le y \le d\}$. Рассмотрим функцию

$$F(x;y) = \begin{cases} f(x;y) & \text{в точках области } G, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Данная функция удовлетворяет условиям теоремы 1. В силу аддитивности двойного интеграла, $F(x;y)$ интегрируема по всему прямоугольнику D. При этом

$$\iint_D F(x;y)dxdy = \iint_G F(x;y)dxdy + \iint_{D\backslash G} F(x;y)dxdy .$$

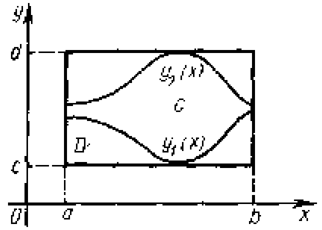

Рис.2.

Так как $\iint_{D\backslash G} F(x;y)dxdy = 0$ и $\iint_G F(x;y)dxdy = \iint_G f(x;y)dxdy$, то

$$\iint_D F(x;y)dxdy = \iint_G f(x;y)dxdy . \qquad (8)$$

Для каждого x из отрезка $[a;b]$ существует интеграл

$$\int_c^d F(x;y)dy = \int_c^{y_1(x)} F(x;y)dy + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} F(x;y)dy + \int_{y_2(x)}^{d} F(x;y)dy .$$

Первый и третий интегралы в выражении справа равны нулю. Поэтому

$$\int_c^d F(x;y)dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} F(x;y)dy . \qquad (9)$$

Функция $F(x;y)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Следовательно, двойной интеграл от этой функции по прямоугольнику D может быть сведен к повторному

$$\iint_D F(x;y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d F(x;y)dy .$$

Отсюда с учетом (8) и (9), получаем

$$\iint_G f(x;y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy . \blacktriangleleft$$

Замечания. 1. Если в теореме 2 поменять ролями x и y, то существует повторный интеграл $\int_c^d dy \int_{x_1(x)}^{x_2(x)} f(x;y)dx$ и справедлива формула

$$\iint_G f(x;y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(x)}^{x_2(x)} f(x;y)dx . \qquad (10)$$

2. Если область интегрирования не удовлетворяет условиям теоремы 2 (прямые (вертикальные или горизонтальные) пересекают ее границу более чем в двух точках), то необходимо данную область разбить на части, каждая из которых удовлетворяет условиям теоремы 2, и сводить к повторному каждый из соответствующих интегралов.

Примеры.

1. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле, если область G ограничена линиями $y = x^2$, $x = a$, $y = 0$, $a > 0$

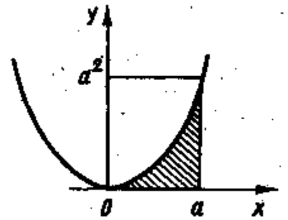

Рис.3.

Решение. Имеем:

$$\iint_G f(x,y)ds = \int_0^a dx \int_0^{x_2} f(x,y)dy = \int_0^{a^2} dy \int_{\sqrt{y}}^{a} f(x,y)dx .$$

2. Вычислить двойной интеграл $\iint_G x^2 y dxdy$ по области (G): $y = 0$, $y = 2x^3$, $x + y = 3$

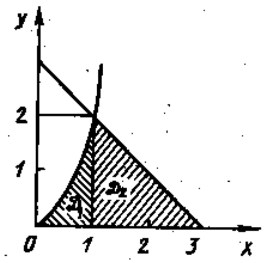

Рис. 4.

Решение. Рассмотрим различный порядок интегрирования. Сначала вычислим внешний интеграл по переменной x. В этом случае исходный интеграл сводится к вычислению двух интегралов по областям

$$D_1 = \{(x;y) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2x^3\},$$

$$D_2 = \{(x;y) | 1 \le x \le 3, 0 \le y \le 3 - x\}.$$

Тогда

$$\iint_G x^2 y dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{2x^3} x^2 y dy + \int_1^3 dx \int_0^{3-x} x^2 y dy$$

Изменив порядок интегрирования, получим:

$$G = \left\{ (x;y) \middle| 0 \le y \le 2, \sqrt[3]{\frac{1}{2} y} \le x \le 3 - y \right\}.$$

Тогда

$$\iint_G x^2 y dx dy = \int_0^2 dy \int_{\sqrt[3]{y/2}}^{3-y} x^2 y dx = \int_0^2 y dy \cdot \left(\frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{\sqrt[3]{y/2}}^{3-x} =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^2 y \left((3-y)^3 - \frac{y}{2} \right) dy = \frac{1}{3} \int_0^2 y \left(27 - 27y + 9y^2 - y^3 - \frac{y}{2} \right) dy =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{27}{2} y^2 - \frac{1}{5} y^5 + \frac{9}{4} y^4 - \frac{275}{30} y^3 \right) \Bigg|_0^2 = \frac{154}{45}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте и докажите теорему о вычислении двойного интеграла в случае прямоугольной области.
2. Сформулируйте и докажите теорему о вычислении двойного интеграла в случае произвольной области.
3. Как вычислить двойной интеграл по области, не являющейся элементарной?