Лекция 5. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости.
2. Полный дифференциал функции многих переменных и его геометрический смысл.
3. Дифференцирование сложной функции.
4. Инвариантность формы первого дифференциала.

1. Необходимое и достаточное условия дифференцируемости.

Напоминание. Функция $y = f(x)$ называется ***дифференцируемой*** в точке x_0, если приращение функции представимо в виде $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$. Необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции $y = f(x)$ в точке x_0 является существование производной $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A(x_0)$.

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$. Пусть $z = f(x, y)$ определена в окрестности $U(\delta; P_0)$ точки $P_0(x_0; y_0)$.

Определение 1. Функция $z = f(x, y)$ называется ***дифференцируемой*** в точке $P_0(x_0; y_0)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A(x_0, y_0)\Delta x + B(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \tag{1}$$

где A и B – некоторые постоянные, зависящие от x_0 и y_0; $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ – бесконечно малые функции от Δx и Δy: $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y) = 0$, $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0$.

Данное равенство выражает *условие дифференцируемости* функции $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0; y_0)$.

Определение 2. Функция $z = f(x, y)$, дифференцируемая в каждой точке множества G, называется ***дифференцируемой на множестве*** G.

Пример. Доказать, что функция $z = xy^2$ дифференцируема на всей плоскости Oxy.

Решение. Действительно, полное приращение данной функции в любой точке $P(x; y) \in \boldsymbol{R}^2$ имеет вид

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y)^2 - xy^2 =$$
$$= y^2\Delta x + 2xy\Delta y + \left(2xy\Delta y + \Delta y^2\right)\Delta x + x(\Delta y)^2.$$

Положив $y^2 = A$, $2xy = B$, $2xy\Delta y + \Delta y^2 = \alpha$, $x\Delta y = \beta$, получим представление Δz в виде условия дифференцируемости, так как A и B в фиксированной точке $P_0(x_0; y_0)$ являются постоянными, а $\alpha \to 0$ и $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Пусть $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ – расстояние между точками $P_0(x_0; y_0)$ и $P(x; y)$. Очевидно, что если $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, то $\rho \to 0$, и наоборот, если $\rho \to 0$, то $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, а следовательно, α и β стремятся к нулю.

Тогда сумму $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ можно переписать в виде

$$\alpha\Delta x + \beta\Delta y = \left(\alpha \cdot \frac{\Delta x}{\rho} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\rho}\right) \cdot \rho = \varepsilon \cdot \rho = o(\rho),$$

так как $\left|\dfrac{\Delta x}{\rho}\right| \le 1$, $\left|\dfrac{\Delta y}{\rho}\right| \le 1$ и $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon = \lim\limits_{\rho \to 0}\left(\alpha \dfrac{\Delta x}{\rho} + \beta \dfrac{\Delta y}{\rho}\right) = 0$.

С учетом этого условие дифференцируемости функции в точке $P_0(x_0; y_0)$ можно записать в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \tag{2}$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ – расстояние между точками $P_0(x_0; y_0)$ и $P(x; y)$, $\lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{o(\rho)}{\rho} = 0$.

Условия дифференцируемости (1) и (2) функции $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0; y_0)$ эквивалентны.

В равенствах (1), (2) слагаемое $A\Delta x + B\Delta y$, линейное относительно Δx и Δy, называется ***главной частью приращения функции***, так как оставшееся слагаемое $\alpha\Delta x + \beta\Delta y = o(\rho)$ является бесконечно малой функцией более высокого порядка малости, чем $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Теорема 1 (связь дифференцируемости и непрерывности). *Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0; y_0)$, то она и непрерывна в этой точке.*

► Действительно, по определению функции, дифференцируемой в точке $P_0(x_0; y_0)$, ее приращение представимо в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

где $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha = 0$; $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta = 0$; A, B – некоторые числа, не зависящие от Δx и Δy.

Следовательно,

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y) = 0,$$

а это означает, что функция $z = f(x, y)$ непрерывна в точке $P_0(x_0; y_0)$. ◄

Теорема 2 (необходимое условие дифференцируемости функции). *Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0; y_0)$, то она имеет в этой точке частные производные $f'_x(x_0, y_0)$ и $f'_y(x_0, y_0)$, причем $f'_x(x_0, y_0) = A$, $f'_y(x_0, y_0) = B$.*

► Пусть функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0; y_0)$, тогда ее приращение представимо в виде (1). Положив в формуле (1) $\Delta y = 0$, имеем $\Delta_x z = A\Delta x + \alpha\Delta x$. Разделив это равенство на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A = f'_x(x_0, y_0).$$

Следовательно, в точке $P_0(x_0; y_0)$ существует частная производная $f'_x(x, y_0)$.

Аналогично доказывается существование частной производной $f'_y(x_0, y_0) = B$ в точке $P_0(x_0; y_0)$. ◄

Замечание. Утверждения, обратные утверждениям теорем 1 и 2 неверны, т.е. из непрерывности функции, а также существования ее частных производных, еще не следует дифференцируемость функции.

Пример. Доказать, что функция $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ непрерывна в точке $O(0;0)$, но не имеет в этой точке частных производных.

Решение. Действительно,

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(0 + \Delta x) + 0 - 0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Функция $\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ не имеет предела при $\Delta x \to 0$. Следовательно, $f'_x(0,0)$ не существует.

Аналогично доказывается, что не существует $f'_y(0,0)$.

Теорема 3 (достаточное условие дифференцируемости функции). *Если функция $z = f(x, y)$ имеет частные производные в некоторой окрестности точки $P_0(x_0; y_0)$, непрерывные в самой этой точке, то она дифференцируема в точке $P_0(x_0; y_0)$.*

► Представим полное приращение функции в следующем виде:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$
$$= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Выражение $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)$ является приращением функции по переменной x. Тогда по теореме Лагранжа

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) = f'_x(\xi, y_0 + \Delta y)\Delta x,$$

где $x_0 < \xi < x_0 + \Delta x$.

Аналогично $f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f'_y(x_0, \eta)\Delta y$, где $y_0 < \eta < y_0 + \Delta y$.

Следовательно,

$$\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(\xi, y_0 + \Delta y)\Delta x + f'_y(x_0, \eta)\Delta y.$$

По условию теоремы частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны в точке $P_0(x_0; y_0)$. Тогда

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f'_x(\xi, y_0+\Delta y) = f'_x(x_0, y_0),$$

$$\lim_{\Delta y\to 0} f'_y(x_0, \eta) = f'_y(x_0, y_0).$$

Из последних равенств, согласно определению предела, следует, что:

$$f'_x(\xi, y_0+\Delta y) = f'_x(x_0, y_0)+\alpha,$$

$$f'_y(x_0, \eta) = f'_y(x_0, y_0)+\beta,$$

где α, β – бесконечно малые функции при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$. Подставляя выражения для $f'_x(\xi, y_0+\Delta y)$, $f'_y(x_0, \eta)$ в формулу, имеем:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y.$$

Значит, функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0; y_0)$. ◄

Функции с непрерывными частными производными называются ***непрерывно дифференцируемыми***.

Пример. Функция $z = x^2 e^{xy}$ непрерывно дифференцируема в любой точке $P(x; y)\in \boldsymbol{R}^2$, так как ее частные производные $z'_x = (2x + x^2 y)e^{xy}$ и $z'_y = x^3 e^{xy}$ всюду непрерывны.

2. Полный дифференциал функции нескольких переменных и его геометрический смысл.

Если функция $z = f(x; y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0; y_0)$, то ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y.$$

Сумма первых двух слагаемых есть главная линейная (относительно Δx и Δy) часть приращения функции.

Определение 3. Если функция $z = f(x; y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0; y_0)$, то главная линейная относительно приращения аргументов часть ее полного приращения называется ***полным дифференциалом*** функции.

Обозначается:

$$dz\big|_{P(x_0;y_0)} = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

или

$$df(x_0; y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Пример. Если $z = x^2 y$, то $dz = 2xy\Delta x + x^2\Delta y \quad \forall P(x; y)\in \boldsymbol{R}^2$.

Приращения независимых переменных Δx и Δy называются ***дифференциалами независимых переменных*** x и y и *обозначаются* соответственно dx и dy.

Тогда полный дифференциал функции запишется в виде:

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}dy.$$

Выражения $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}dx$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}dy$ называются ***частными дифференциалами*** функции $z = f(x; y)$.

Обозначаются: $d_x z$ и $d_y z$.

Таким образом,

$$dz = d_x z + d_y z.$$

Геометрический смысл дифференциала. Учитывая, что $\Delta x = x - x_0 = dx$, $\Delta y = y - y_0 = dy$, уравнение касательной плоскости можно записать в виде

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}dy.$$

Правая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$, а левая его часть $z - z_0$ – приращение аппликаты касательной плоскости в точке касания: $z - z_0 = df(x_0, y_0)$.

Поэтому полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0; y_0)$ представляет собой отрезок AB.

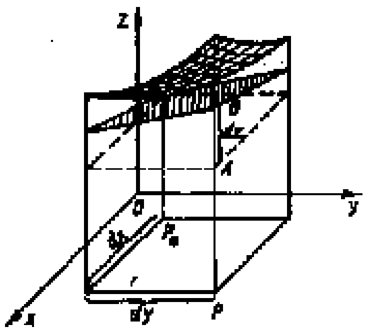

Рис.1.

Замечание. Определение дифференцируемости функции и ее дифференциала обобщаются на случай функции многих переменных $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Условие дифференцируемости запишется в виде

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + ... + (\Delta x_n)^2}$.

Дифференциал функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет вид

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n .$$

4. Дифференцирование сложной функции.

Пусть $z = f(u; v)$ – функция двух переменных u и v, каждая из которых, в свою очередь, является функцией независимых переменных x и y, т.е. $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Тогда $z = f(u(x, y), v(x, y)) = F(x, y)$ – сложная функция двух независимых переменных x и y, а переменные u и v – промежуточные переменные.

Теорема 4. *Если функция $z = f(u; v)$ дифференцируема в точке $M_0(u_0; v_0)$, а функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ дифференцируемы в точке $P_0(x_0; y_0)$, то сложная функция $z = F(x; y)$, где $u = u(x, y)$; $v = v(x, y)$, дифференцируема в точке $P_0(x_0; y_0)$, причем ее частные производные вычисляются по формулам:*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

►Докажем первую из формул. В точке $P_0(x_0; y_0)$ переменной x дадим приращение Δx, сохранив y_0 постоянной. Тогда функции u и v получат частные приращения $\Delta_x u$, $\Delta_x v$, а функция z – полное приращение Δz (так как $\Delta_x u$ и $\Delta_x v$ – приращения по обоим промежуточным аргументам). Функция $z = f(x; y)$ дифференцируема в точке $M_0(u_0; v_0)$, поэтому ее приращение в этой точке представимо в виде:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial z}{\partial v}\Delta_x v + \alpha\Delta_x u + \beta\Delta_x v .$$

Разделим данное равенство на $\Delta x \neq 0$:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta x}\alpha\Delta_x u + \frac{1}{\Delta x}\beta\Delta_x v .$$

Если $\Delta x \to 0$, то $\Delta_x u \to 0$ и $\Delta_x v \to 0$ в силу непрерывности функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$,

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{1}{\Delta x}\alpha\,\Delta_x u = \alpha\frac{\Delta_x u}{\Delta x}, \quad \frac{1}{\Delta x}\beta\,\Delta_x v = \beta\frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу и учитывая, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\alpha\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = 0$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\beta\frac{\Delta_x v}{\Delta x} = 0$, имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Аналогично доказывается $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$. ◄

Замечание. Для функции трех переменных $w=f(u,v,t)$, каждая из которых, в свою очередь, является функцией независимых переменных x, y, z т.е. $u=u(x,y,z)$, $v=v(x,y,z)$, $t=t(x,y,z)$ и $w=f(u(x,y,z),v(x,y,z),t(x,y,z))=F(x,y,z)$ частные производные вычисляются по формулам

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y},$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial z}.$$

Аналогично для функции n, $n>3$, переменных.

Частные случаи задания сложной функции $w=f(u,v,t)$.

1. Пусть $w=f(u,v,t)$, $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$, $t=t(x,y)$.

Тогда $w=f(u(x,y),v(x,y),t(x,y))=F(x,y)$, является сложной функцией только двух аргументов, и, значит, имеем две частные производные $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$.

2. Пусть $z=f(x,y,u)$, $y=y(x)$, $u=u(x)$.

Тогда $z=f(x,y(x),u(x))=F(x)$ – функция одной переменной x. Найдем z'_x по общей формуле дифференцирования сложной функции:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Так как $y=y(x)$ и $u=u(x)$ – функции только одной переменной x, то их частные производные обращаются в обыкновенные производные. Кроме того, $\frac{\partial x}{\partial x}=1$.

Следовательно,

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}.$$

Производная $\frac{dz}{dx}$ сложной функции $z=f(x,y(x),u(x))$ называется ***полной производной***.

Между частной $\frac{\partial z}{\partial x}$ и полной $\frac{dz}{dx}$ производными имеется существенное различие. Полная производная $\frac{dz}{dx}$ – это обыкновенная производная от z как функции x, а $\frac{\partial z}{\partial x}$ есть частная производная от z по переменной x, входящей в выражение функции непосредственно, т.е. при условии, что другие переменные (y и u зависящие от x, при дифференцировании остаются постоянными).

Примеры.

1. Вычислить частные производные сложной функции двух переменных $f(u,v)=u\cdot\ln v$, где $u=3x-y$; $v=x^2+y^2$.

Решение. Имеем $u'_x=3$, $v'_x=2x$, $u'_y=-1$, $v'_y=2y$, $f'_u=\ln v$, $f'_v=\frac{u}{v}$.

Следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=3\ln v+2x\frac{u}{v}=3\ln\left(x^2+y^2\right)+2x\frac{3x-y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-\ln v+2y\frac{u}{v}=-\ln\left(x^2+y^2\right)+2y\frac{3x-y}{x^2+y^2}.$$

2. Найти полную производную сложной функции $z=x\sin v\cos w$, где $v=\ln\left(x^2+1\right)$; $w=-\sqrt{1-x^2}$.

Решение. По формуле имеем

$$\frac{dz}{dx}=\sin v\cos w+x\cos v\cos w\frac{2x}{x^2+1}-x\sin v\sin w\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4. Инвариантность формы первого дифференциала функции нескольких переменных.

Найдем полный дифференциал сложной функции

$z=f(u(x,y),v(x,y))$ в точке $P_0(x_0;y_0)$. Подставим выражения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, определяемые равенствами

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

в формулу полного дифференциала сложной функции двух переменных $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$.

Получим

$$dz=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy$$

или

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right).$$

Так как $\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=du$, $\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=dv$, то

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Видно, что форма записи полного дифференциала функции двух переменных не зависит от того, являются ли u и v независимыми переменными, или функциями других независимых переменных. В этом и заключается ***инвариантность формы первого дифференциала функции нескольких переменных***.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение дифференцируемости функции в точке. Как связаны непрерывность и дифференцируемость функции $z=f(x,y)$?
2. Сформулируйте и докажите необходимое условие дифференцируемости функции $z=f(x,y)$.
3. Сформулируйте и докажите достаточное условие дифференцируемости функции $z=f(x,y)$.
4. Что называется полным дифференциалом функции многих переменных? В чем состоит геометрический смысл?
5. Сформулируйте правило дифференцирования сложной функции.
6. В чем заключается инвариантность формы первого дифференциала?