Лекция 3. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ, НЕПРЕРЫВНЫЕ НА МНОЖЕСТВАХ

1. Непрерывность функции на компактах.
2. Функции, непрерывные на линейно связных множествах.
3. Равномерная непрерывность функций. Теорема Кантора.

1. Непрерывность функции на компактах.

Определение 1. Функция $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, называется ***непрерывной на множестве*** G, если в каждой предельной точке множества x_0, $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$. выполнено условие

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in G}} f(x) = f(x_0).$$

Другими словами, функция $u = f(x)$ называется ***непрерывной на множестве*** G, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Теорема 1 (Вейерштрасса). *Функция* $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, *непрерывная на компакте* $G \in \boldsymbol{R}^n$ *ограничена и принимает на этом компакте свои наибольшее и наименьшее значения:*

$$f(x_1) = \sup_{x \in G} f(x), \quad f(x_2) = \inf_{x \in G} f(x).$$

► Пусть $G \in \boldsymbol{R}^n$ компакт, т.е. ограниченное и замкнутое множество. И пусть функция $u = f(x)$ непрерывна на G и $M = \sup_{x \in G} f(x)$. Выберем числовую последовательность $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ такую, что $\lim_{m \to \infty} y_m = M$ и $y_m < M$, $m = 1,2,...$.

По определению верхней грани существуют такие точки $x_m = (x_1^m; x_2^m; ...; x_n^m) \in G$, $m = 1,2,...$,

$$y_m < f(x_m) \le M .$$

Поэтому $\lim_{m \to \infty} f(x_m) = M$

Поскольку G компакт, то из последовательности точек $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ можно выделить сходящуюся к некоторой точке $x_0 \in G$

подпоследовательность $(x_{m_k})_{k=1}^{\infty}$ такую, что $\lim_{k \to \infty} x_{m_k} = x_0$. В силу непрерывности функции $u = f(x)$ в точке x_0, имеем:

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{m_k}) = f(x_0).$$

Однако $\lim_{k \to \infty} f(x_{m_k}) = M$.

Таким образом, $f(x_0) = M$. Это означает, что $M < +\infty$, т.е. функция $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, ограничена сверху и принимает наибольшее значение на множестве G .

Аналогично доказывается ограниченность функция $u = f(x)$ снизу и достижение ее нижней грани. ◄

Примеры.

1. Рассмотрим функцию $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$, область определения которой есть

$$D(f) = \{(x; y) | (0 < x \le 1) \cap (0 < y \le 1)\}.$$

Множество $D(f)$ ограничено, но не замкнуто. Если $x \to 0$ и $y \to 0$ одновременно, то $z \to \infty$, т.е. функция $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ не ограничена:

$$\forall A \ \exists M(x; y) : |f(M)| > A .$$

2. Рассмотрим функцию $z = \dfrac{1}{e^{x^2 + y^2}}$.

Область определения этой функции $D(f) = \boldsymbol{R}^2$. Очевидно, что $\sup z = 1$, $\inf z = 0$, причем точная верхняя грань достигается в точке $M(0;0)$, а точная нижняя грань не достигается ввиду неограниченности множества $D(f)$

2. Функции, непрерывные на связных множествах.

В случае функций многих переменных аналогом того, что всякая непрерывная на некотором промежутке функция, принимая какие-либо значения, принимает и любое промежуточное, является следующая теорема.

Теорема 2. *Функция, непрерывная на линейно связном множестве, принимая какие-либо два значения, принимает и любое промежуточное между ними.*

► Пусть G — линейно связное множество, $G \in \boldsymbol{R}^n$, функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ непрерывна на G. И пусть $M_1 = (x_1^1; x_2^1; ...; x_n^1)$, $M_1 = (x_1^2; x_2^2; ...; x_n^{21}) \in G$ и $f(M_1) = a$, $f(M_2) = b$. В силу связности множества G существует такая кривая

$$\Gamma = \{x_1 = x_1(t); x_2 = x_2(t); ...; x_n = x_n(t), \alpha \le t \le \beta\},$$

лежащая в G, что M_1 является ее началом, M_2 – ее концом.

Функция $u = f(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) = f(t)$, непрерывна на отрезке $[\alpha; \beta]$ как сложная функция непрерывных функций $f(M)$ и $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$. Кроме того,

$$f(\alpha) = f(x_1(\alpha), x_2(\alpha), ..., x_n(\alpha)) = a,$$
$$f(\beta) = f(x_1(\beta), x_2(\beta), ..., x_n(\beta)) = b.$$

Поэтому, в силу теоремы о промежуточных значениях непрерывных на отрезке функций, существует такое $t_0 \in [\alpha; \beta]$, что $f(t_0) = f(x_1(t_0), x_2(t_0), ..., x_n(t_0)) = c$.

Полагая $M_0(x_1(t_0), x_2(t_0), ..., x_n(t_0))$, получим $f(M_0) = c$. ◄

Следствие. *Функция, непрерывная на замыкании линейно связного множества, принимая какие-либо два значения, принимает и любое промежуточное между ними.*

Без доказательства.

Из теоремы 2, в частности, следует, что если M_1 и M_2 – точки множества G и $f(M_1) < 0$, а $f(M_2) > 0$, то на множестве G существует по крайней мере одна точка M_0, такая, что $f(M_0) = 0$.

3. Равномерная непрерывность функций. Теорема Кантора.

О п р е д е л е н и е 2. Функция $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, называется ***равномерно-непрерывной*** на множестве G, $G \in \boldsymbol{R}^n$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для любых двух точек $x' = (x_1'; x_2'; ...; x_n')$ и $x'' = (x_1''; x_2''; ...; x_n'')$ множества

G, находящихся на расстоянии, меньшем δ, выполняется неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' \in G \ \ \rho(x', x'') < \delta \quad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Замечание. Функция, непрерывная на множестве, не обязательно будет равномерно непрерывной на этом множестве.

Построим отрицание: функция $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, *не является равномерно-непрерывной* на множестве G, если $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall \delta > 0$ существуют элементы $x' = (x_1'; x_2'; ...; x_n')$ и $x'' = (x_1''; x_2''; ...; x_n'')$ множества G такие, что $\rho(x', x'') < \delta$, но $|f(x') - f(x'')| \ge \varepsilon$.

Пример. Показать, что функция $y = x^2$ не является равномерно непрерывной на интервале $(0; +\infty)$.

Р е ш е н и е. Пусть $\varepsilon_0 = 1$.

Для любого $\delta > 0$ возьмем $M_1 = \dfrac{1}{\delta}$ и $M_2 = \dfrac{1}{\delta} + \dfrac{\delta}{2}$.

Тогда $\rho(M_1, M_2) = \left| \dfrac{1}{\delta} - \left(\dfrac{1}{\delta} + \dfrac{\delta}{2} \right) \right| = \dfrac{\delta}{2} < \delta$.

При этом

$$|f(M_1) - f(M_2)| = \left| \left(\frac{1}{\delta} \right)^2 - \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right)^2 \right| = \left| \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta} - \frac{\delta}{2} \right) \right| =$$

$$= \frac{\delta}{2} \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right) \ge 1.$$

Значит, функция $y = x^2$ не является равномерно непрерывной.

Теорема 3 (Кантора). *Функция* $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, *непрерывная на компакте* G, $G \in \boldsymbol{R}^n$, *равномерно-непрерывна на этом компакте.*

► Доказываем методом от противного.

Пусть функция $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, непрерывна на компакте G, но не равномерно непрерывна на этом компакте.

Рассмотрим последовательность точек $(x_m)_{m=1}^{\infty}$, $x_m = (x_1^m; x_2^m; ...; x_n^m) \in G$. Тогда $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall \delta > 0$ найдутся точки x_m и $x_l \in A$ такие, что $\rho(x_m, x_l) < \frac{1}{m}$, но $|f(x_m) - f(x_l)| \geq \varepsilon_0$.

Так как G – компакт, то из последовательности $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ можно выделить подпоследовательность $(x_{m_k})_{k=1}^{\infty}$, сходящуюся к некоторой точке $x_0 \in G$, $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Используя неравенство треугольника, получаем

$$0 \leq \rho(x_{m_k}, x_0) \leq \rho(x_{m_k}, x_{m_k}) + \rho(x_{m_k}, x_0) < \frac{1}{m_k} + \rho(x_{m_k}, x_0) \to 0$$

при $k \to \infty$.

Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{m_k}) = x_0$.

Поскольку функция $u = f(x)$ непрерывна в точке x_0, то $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{m_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{l_k}) = x_0$.

Полагая $m = m_k$, получаем $\left|f(x_{m_k}) - f(x_l)\right| \geq \varepsilon_0$.

Переходя в неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получаем противоречие:

$$0 = |f(M_0) - f(M_0)| \geq \varepsilon_0 > 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что функция $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, должна быть равномерно непрерывной на множестве G. ◄

О п р е д е л е н и е 3. ***Колебанием*** $\omega(f; G)$ функции $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in G$, называется верхняя грань всевозможных разностей значений функции f:

$$\omega(f; G) = \sup_{x; x' \in G} \left|f(x') - f(x)\right|,$$

где $x' = (x_1'; x_2'; ...; x_n') \in G$.

О п р е д е л е н и е 4. ***Диаметром*** множества G называется верхняя грань расстояний между точками множества $G \in \boldsymbol{R}^n$.

Обозначается: $\operatorname{diam} G = \sup\limits_{x; x' \in G} \rho(x'; x)$ или $\mathrm{d}(G) = \sup\limits_{x; x' \in G} \rho(x'; x)$.

Равномерная непрерывность функции $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, на множестве $G \in \boldsymbol{R}^n$ означает, что колебание функции на любом множестве достаточного малого диаметра сколь угодно мало.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определение непрерывности функции на компактах.
2. Какие функции непрерывны на линейно связных множествах.
3. Сформулируйте определение равномерной непрерывности функции. В чем суть теоремы Кантора?