Лекция 8. ТЕОРЕМА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Формула Тейлора для функции двух переменных.
2. Формула Маклорена.

1. Формула Тейлора для функции двух переменных.

Напоминание. Формулу Тейлора для функции одной переменной $y = f(x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа можно записать через дифференциалы этой функции:

$$f(x) = $$
$$= f(x_0) + df(x_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(\xi).$$

Теорема 1 (Тейлора). *Пусть функция двух переменных* $z = f(x,y)$ *непрерывна со всеми частными производными до* $(n+1)$ *порядка включительно в некоторой* δ*-окрестности точки* $P_0(x_0; y_0) \in D(f)$. *Тогда справедлива формула формулой Тейлора для функции двух переменных*

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0,y_0) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0,y_0) + R_n, \qquad (1)$$

где $R_n = \dfrac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(\xi,\eta)$, $x_0 < \xi < x$; $y_0 < \eta < y$.

► Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x; y_0 + t\Delta y),\ 0 \le t \le 1,$$

которая является сложной функцией независимой переменной t и имеет $(n+1)$-ю производную по t на отрезке $[0;1]$.

Согласно формуле Тейлора для функции одной переменной с остаточным членом в форме Лагранжа имеем

$$F(t) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} t + \frac{F''(0)}{2!} t^2 + \ldots + \frac{F^n(0)}{n!} t^n + \frac{F^{n+1}(\theta t)}{(n+1)!} t^{n+1}, \qquad (2)$$

где $0 < \theta < 1$.

Отсюда при $t = 1$ получим

$$F(1) = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) =$$
$$= F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + \frac{F''(0)}{2!} + \ldots + \frac{F^{n-1}(0)}{(n-1)!} + \frac{F^n(\theta)}{n!},$$

где $0 < \theta < 1$.

Найдем производные функции $F(t)$. Так как $\dfrac{dx}{dt} = \Delta x$ и $\dfrac{dy}{dt} = \Delta y$, то первая производная есть:

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y =$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right) f(x_0 + t\Delta x; y_0 + t\Delta y),$$

вторая –

$$F''(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Delta x + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Delta y =$$
$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{dy}{dt}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{dt}\right)\Delta y =$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2 =$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 f(x_0 + t\Delta x; y_0 + t\Delta y).$$

По индукции получаем:

$$F^{(k)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^k f(x_0 + t\Delta x; y_0 + t\Delta y),\ k = 0,1,\ldots,n,$$

$$F^{(n+1)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n+1} f(x_0 + t\Delta x; y_0 + t\Delta y).$$

Тогда

$$F(0) = f(x_0; y_0),$$

$$F'(0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)f(x_0;y_0)=df(x_0;y_0),$$

$$F''(0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 f(x_0;y_0)=d^2 f(x_0;y_0),$$

…………………………………………………

$$F^n(0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n f(x_0;y_0)=d^n f(x_0;y_0),$$

$$F^{n+1}(0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n+1} f(x_0+\theta\Delta x;y_0+\theta\Delta y)=$$

$$=d^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x;y_0+\theta\Delta y).$$

Подставляя в формулу (2), имеем

$$F(1)-F(0)=f(x,y)-f(x_0,y_0)=df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)+\ldots$$

$$+\frac{1}{n!}d^n f(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(\xi,\eta),$$

где $(x_0+\theta\Delta x;y_0+\theta\Delta y)=(x;y)$.◄

Следствие. *При условиях теоремы 1 имеет место формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^n f(x_0,y_0)+o(\rho^n). \quad (3)$$

► Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа для функции $z=f(x,y)$

$$R_n(\xi;\eta)=\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(\xi,\eta)$$

является при $(x;y)\to(x_0;y_0)$ бесконечно малой величиной более высокого порядка малости по сравнению с $\rho^n(P,P_0)$, где $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. Поэтому остаточный член $R_n(\xi;\eta)$ можно представить в форме Пеано

$$R(x,y)=o(\rho^n).\ ◄$$

2. Формула Маклорена.

Если в формуле (1) положить $x_0=y_0=0$, получается ***формула Маклорена*** для функции двух переменных $z=f(x,y)$:

$$f(x,y)=f(0,0)+df(0,0)+\frac{1}{2!}d^2f(0,0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^n f(0,0)+R_n.$$

Пример. Записать формулу Тейлора при $n=2$ с остаточным членом в форме Пеано для функции $f(x,y)=2^{xy}$ в точке $P_0(1;1)$.

Решение. Для любых x, $y\in U(\varepsilon;P_0)$ имеет место формула Тейлора второго порядка:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)+o(\rho^2)$$

или в краткой записи

$$f(P)=f(P_0)+df(P_0)+\frac{1}{2!}d^2f(P_0)+o(\rho^2).$$

Вычислим:

$f(P_0)=2$,

$df(P_0)=\left(f'_x(P_0)dx+f'_y(P_0)dy\right)=$

$=\left(y\cdot 2^{xy}\ln 2\cdot(x-1)+x\cdot 2^{xy}\ln 2\cdot(y-1)\right)\Big|_{P_0}=$

$=2\ln 2\cdot(x-1)+2\ln 2\cdot(y-1)$,

$d^2f(P_0)=f''_{xx}(P_0)dx^2+2f''_{xy}(P_0)dxdy+f''_{yy}(P_0)dy^2=$

$=\left(y^2\cdot 2^{xy}\ln^2 2(x-1)^2+2\left(2^{xy}\ln 2+xy\cdot 2^{xy}\ln^2 2\right)(x-1)(y-1)\right)+$

$+x^2\cdot 2^{xy}\ln 2\cdot(y-2)^2\Big|_{P_0}=$

$=2\ln^2 2\cdot(x-1)^2+2\left(\ln 2+2\ln^2 2\right)(x-1)(y-1)+2\ln 2\cdot(y-1)^2$.

Следовательно,

$$2^{xy}=2+2\ln 2\cdot(x-1)+2\ln 2\cdot(y-1)+\ln^2 2\cdot(x-1)^2+$$
$$+(1-2\ln 2)\ln 2\cdot(x-1)(y-1)+\ln 2\cdot(y-1)^2+o(\rho^2),$$

где $\rho^2=(x-1)^2+(y-1)^2$.

С помощью формулы Тейлора для функции двух независимых переменных можно находить приближенные значения функции в точке, а также исследовать функции двух переменных на экстремум.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте теорему Тейлора для функции двух переменных.

2. Какой вид имеет формула Маклорена для функции двух переменных?