Лекция 6. РЯДЫ ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА

1.Разложение функций в степенные ряды.
2. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена.
3. Некоторые приложения степенных рядов

1. Разложение функций в степенные ряды.

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 производные любого порядка. Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$$

$$= f(x_0)+f'(x_0)+(x-x_0)+\frac{f'(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\ldots$$

называется ***рядом Тейлора*** функции $f(x)$ в точке x_0.

Если $x_0=0$, то ряд Тейлора имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\ldots$$

и называется ***рядом Маклорена***.

Радиус сходимости R степенного ряда $\sum\limits_{k=0}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ может быть как равным нулю, так и отличным от него, причем в последнем случае сумма $S(x)$ ряда Тейлора может не совпадать с $f(x)$. Важно определить, когда в формуле

$$f(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

допустим знак равенства, т.е. когда ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$, для которой он составлен. Если $S(x)=f(x)$ на $(x_0-R;x_0+R)$, то говорят, что функция $f(x)$ ***разложима в ряд Тейлора в окрестности точки*** x_0.

Частичные суммы ряда Тейлора

$$S_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n =$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

представляют собой многочлены Тейлора $P_n(x)$ функции $f(x)$ в точке x_0. Если ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$, справедливо равенство

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)=S_n(x)+R_n(x).$$

Теорема 1 (Тейлора). *Пусть 1) функция $f(x)$ имеет в окрестности $U(R;x_0)$ точки x_0 производные любого порядка;*

2) $\forall x\in U(R;x_0)$ выполняется условие $\left|f^{(k)}(x)\right|\le M\frac{k!}{R^k}$, $k=0,1,2,\ldots$. Тогда функция $f(x)$ разлагается на множестве $U(R;x_0)$ единственным образом:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f'(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\ldots.$$

► *Разложение*. Известно, что для функции $y=f(x)$ в окрестности $U(R;x_0)$, то $\forall x\in U(R;x_0)$ при $x\to x_0$ имеет место формула Тейлора

$$f(x)=$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ – остаточный член в форме Лагранжа, $\xi\in U(R;x_0)$, или Пеано $R_{n+1}(x)=o\left((x-x_0)^{n+1}\right)$.

Согласно условию 2) теоремы 1 имеем $\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|\le M\frac{(n+1)!}{R^{n+1}}$.

Тогда

$$\left|R_{n+1}(x)\right|=\frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1}\le M\frac{(n+1)!}{R^{n+1}(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1}=$$

$$= M\left(\frac{|x-x_0|}{R}\right)^{n+1}.$$

Поскольку $|x-x_0|<R$, то $\left|\frac{x-x_0}{R}\right|<1$. Поэтому $|R_{n+1}(x)|\to 0$ при $n\to\infty$.

Аналогично с остаточным членом в виде Пеано имеем $|R_{n+1}(x)|\to 0$ при $n\to\infty$.

Переходя в формуле Тейлора к пределу при $n\to\infty$, получим

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Единственность. Пусть существует еще одно разложение в степенной ряд функции $y=f(x)$ в окрестности $U(R;x_0)$:

$$f(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+\ldots+b_n(x-x_0)^n+\ldots.$$

где хотя бы один из коэффициентов b_k отличен от $c_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Последовательно дифференцируя почленно этот ряд бесконечное число раз, получим

$$f'(x)=b_1+2b_2(x-x_0)+3b_3(x-x_0)^2+\ldots+nb_n(x-x_0)^{n-1}+\ldots,$$

$$f''(x)=2b_2+3\cdot 2b_3(x-x_0)+\ldots+n(n-1)b_n(x-x_0)^{n-2}+\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$f^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1\cdot b_n+(n+1)n(n-1)\ldots 2\cdot 1\cdot b_{n+1}(x-x_0)+\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

Полагая в этих равенствах и в исходном ряде $x=x_0$, имеем:

$$b_0=f(x_0),\ b_1=f'(x_0),\ b_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\ \ldots,\ b_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ \ldots.$$

Сравнивая найденные коэффициенты b_k с коэффициентами ряда Тейлора, заключаем, что $b_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ для $k=0,1,2,\ldots$. Отсюда следует единственность разложения. ◄

Следствие 1. *Для того чтобы бесконечно дифференцируемая в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ разлагалась в ряд Тейлора в окрестности этой точки, необходимо и достаточно, чтобы остаток в формуле Тейлора стремился к нулю:*

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0\quad\forall x\in(x_0-R;x_0+R).$$

Следствие 2. *Если для любых $x\in(x_0-R;x_0+R)$ все производные функции $f(x)$ ограничены одной и той же константой M, то ряд Тейлора $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ сходится к функции $f(x)$ в интервале $|x-x_0|<R$.*

► Согласно представлению остаточного члена формулы Тейлора в форме Лагранжа, имеем

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\le M\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}\quad\forall x\in(x_0-R;x_0+R).$$

Числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}$ сходится по признаку Д'Аламбера. Тогда на основании необходимого признака сходимости ряда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}=0.$$

Следовательно, $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0\quad\forall x\in(x_0-R;x_0+R)$.◄

2. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена.

Если в формуле Тейлора положить $x_0=0$, то имеем формулу Маклорена

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f'(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\ldots.$$

Получим разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций.

1. $f(x)=e^x$.

Имеем $f^{(n)}(x)=e^x$ и $\left|f^{(n)}(x)\right|=\left|e^x\right|<e^A$ при $|x|<A$, где A – сколь угодно большое положительное число. Тогда на основа-

нии теоремы 1 заключаем, что функция $f(x)=e^x$ разложима в ряд Маклорена, сходящийся к ней при любом $x\in\mathbf{R}$. Поскольку $a_n=\dfrac{f^n(0)}{n!}=\dfrac{1}{n!}$, то

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

2. $f(x)=\operatorname{ch}x$.

Используя разложение $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, определение функции $y=\operatorname{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ и свойство суммы сходящихся рядов, $\forall\ x\in\mathbf{R}$ имеем

$$\operatorname{ch}x=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-x)^n}{n!}\right)\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+(-1)^n\right)\frac{x^n}{n!}.$$

Отсюда $\operatorname{ch}x=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^{2k}}{(2k)!}=1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\ldots+\dfrac{x^{2k}}{(2k)!}+\ldots$

3. $f(x)=\operatorname{sh}x$.

Так как $\operatorname{sh}x=\dfrac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)=(\operatorname{ch}x)'$, то на основании теоремы о почленном дифференцировании степенного ряда, получаем разложение $x\in\mathbf{R}$

$$\operatorname{sh}x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

4. $f(x)=\sin x$.

Так как $f^{(n)}(x)=\sin^{(n)}x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}n\right)$ и $\left|f^{(n)}(x)\right|=\left|\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}n\right)\right|\le 1$ $\forall x\in\mathbf{R}$, то $\forall x\in\mathbf{R}$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Здесь используется условие

$$a_k=\frac{\sin^{(k)}(0)}{k!}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}k}{k!}=\begin{cases}0, & \text{если } k=2n,\\ \dfrac{(-1)^n}{2n+1}, & \text{если } k=2n+1.\end{cases}$$

5. $f(x)=\cos x$.

Из равенства $\cos x=(\sin x)'$ на основании теоремы о почленном дифференцировании степенного ряда получаем искомое разложение

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\quad\forall x\in\mathbf{R}.$$

6. $f(x)=\ln(1+x)$.

На основании теоремы о почленном интегрировании степенного ряда с учетом выражения для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии имеем

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t}=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1},$$

т.е. $\forall x\in(-1;1)$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

7. $f(x)=(1+x)^\alpha$, $\alpha\in\mathbf{R}$.

В данном случае оценка производных $f^{(n)}(x)$ является затруднительной.

Поэтому воспользуемся известным разложением $\forall x\in(-1;1)$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{a(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

называется ***биномиальным рядом***.

При $\alpha = n \in \mathbf{N}$ все коэффициенты данного ряда, начиная с номера $n+1$, обращаются в нуль, и степенной ряд преобразуется в бином Ньютона

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{n!}x^2 + \ldots + x^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \; .$$

3. Некоторые приложения степенных рядов.

Приближенное вычисление значений функций. Для нахождения приближенного значения функции $f(x)$ в точке x_0 с заданной точностью поступают следующим образом. Функцию $f(x)$ раскладывают в ряд по степеням $x - x_1$ в интервале сходимости, содержащим точку x_0. Точка x_1 – это точка, в которой значения функции и ее производных вычисляются точно. Переменной x придается значение x_0. В полученном числовом ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x_0 - x_1)^n$ оставляются только члены, гарантирующие заданную точность вычислений. Минимальное число n_0 таких членов ряда определяется из соответствующей оценки либо остатка $R_n(x_0)$ формулы Тейлора, либо остатка $r_n(x_0)$ ряда Тейлора, так как в случае сходимости степенного ряда функции $f(x)$ они равны между собой.

Пример. Вычислить с точностью $\varepsilon = 0{,}01$ число e.

Решение. Так как,

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{k!} + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}, \; 0 < \xi < x, \; \forall x \in \mathbf{R},$$

то из оценки

$$|R_n(1)| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} \le 0{,}01$$

следует, что $n \ge 5$, т.е. $n_0 = 5$. Полагая $x_0 = 1$, $x_1 = 0$, получим

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \approx 2 + 0{,}500 + 0{,}167 + 0{,}042 + 0{,}008 = 2{,}717 \; .$$

Приближенное вычисление интегралов. Многие определенные интегралы, не выражающиеся в элементарных функциях, могут быть вычислены с помощью рядов.

Пример. Вычислить $\int\limits_0^{1/3} e^{-x^2}dx$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

Решение. Имеем $\forall x \in \mathbf{R}$:

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$$

Тогда

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{1/3} x^{2n}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}.$$

Отсюда

$$|r_n| \le \frac{1}{(n+1)!(2n+3)3^{2n+3}} \le 0{,}001 \;\Rightarrow\; n \ge 1 \Rightarrow n_0 = 1$$

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} \approx 0{,}3333 - 0{,}0123 = 0{,}3210 \, .$$

Окончательно получаем

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2}dx \approx 0{,}321$$

с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

Интегрирование дифференциальных уравнений. Степенные ряды могут применяться также для решения дифференциальных уравнений, например, в случае, если их решения не удается найти в элементарных функциях.

Пример. Найти решение уравнения

$$yy' = \sin y \, .$$

удовлетворяющее начальному условию $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Уравнение $yy' = \sin y$ допускает разделение переменных:

$$\frac{ydy}{\sin y}=dx .$$

Однако интеграл от левой части уравнения не выражается в элементарных функциях. В окрестности $x_0=0$ уравнение удовлетворяет условиям теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши. Будем искать его в виде ряда Маклорена

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n .$$

Так как $y(0)=\frac{\pi}{2}$ и $y'=\frac{\sin y}{y}$, то $y'(0)=\frac{2}{\pi}$. Дифференцируя по x обе части равенства $y'=\frac{\sin y}{y}$, находим

$$y''=\frac{(y'\cos y)y-y'\sin y}{y^2}=\frac{y'(y\cos y-\sin y)}{y^2}.$$

Откуда $y''(0)=\frac{-y'(0)\sin(\pi/2)}{(\pi/2)^2}=-\left(\frac{2}{\pi}\right)^3$.

Дифференцируя обе части найденного равенства для y'', находим $y'''(0)$. Продолжая этот процесс, можно получить любое число членов разложения в ряд Маклорена искомого решения $y=y(x)$:

$$y=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}x-\frac{2^2}{\pi^3}x^2+\dots .$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какой степенной ряд называется рядом Тейлора для функции $y=f(x)$? Как из него получить ряд Маклорена?
2. Сформулируйте и докажите теорему Тейлора о разложении функции ряд Тейлора.
3. Получите разложения основных элементарных функций в ряд Маклорена.
4. Какие основные приложения формулы Тейлора?