Лекция 5. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

1.Определение и сходимость степенного ряда.
2. Радиус сходимости и интервал сходимости.
3.Свойства степенных рядов.

1. Определение и сходимость степенного ряда.

Определение 1. Ряд вида

$$a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_k(x-x_0)^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k,$$

где a_k, x, x_0 – действительные числа, членами которого являются степенные функции, называется ***степенным рядом*** по степеням $(x-x_0)$, а числа a_k – ***коэффициентами*** степенного ряда.

При $x_0 = 0$ имеем ***степенной ряд по степеням*** x

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

Поскольку заменой $x - x_0 = X$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ можно свести к ряду $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, то будем рассматривать ряды $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ всегда сходится в точке $x=0$. При $x \neq 0$ степенной ряд может как сходиться, так и расходиться.

Теорема 1 (Абеля). *Если степенной ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится в точке* $x_0 \neq 0$, *то он сходится абсолютно в интервале* $-|x_0| < x < |x_0|$ *и сходится равномерно на отрезке* $-q \le x \le q$, *где* $0 < q < |x_0|$.

► Так как по условию теоремы числовой ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$ сходится, то $\lim\limits_{k\to\infty} a_k x_0^k = 0$. Следовательно, последовательность

$\left(a_k x_0^k\right)_{k=0}^{\infty}$ ограничена. По определению ограниченной последовательности имеем

$$\forall k \in \mathbf{N} \ \ \exists\, M > 0: \left|a_k x_0^k\right| < M.$$

Отсюда

$$|a_k| \le \frac{M}{|x_0|^k}.$$

Пусть $|x| < |x_0|$.

Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|a_k x^k\right| = \sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\cdot|x|^k \le \sum_{k=0}^{\infty} M\left|\frac{x}{x_0}\right|^k.$$

Члены ряда $\sum_{k=0}^{\infty} M\left|\frac{x}{x_0}\right|^k$ – образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$. Поэтому этот ряд сходится. Следовательно, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ в точке $x \neq 0$ сходится абсолютно.

Если $|x| \le q < |x_0|$, то $\left|\frac{x}{x_0}\right| \le \frac{q}{|x_0|} < 1$. Тогда ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum_{k=0}^{\infty} M\left(\frac{q}{|x_0|}\right)^k$. По признаку Вейерштрасса, он сходится равномерно на отрезке $[-q;q]$. ◄

Следствие. *Если в точке* $x_1 \neq 0$ *степенной ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *расходится, то он расходится во всех точках* x, *таких, что* $|x| > |x_1|$.

► Действительно, если бы ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходился в точке x, то по теореме Абеля он сходился бы абсолютно в точке x_1, что противоречит условию. ◄

2. Радиус сходимости и интервал сходимости.

Из теоремы Абеля и следствия вытекает, что если степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходится хотя бы в одной точке $x \neq 0$, то всегда существует число $R > 0$, такое, что степенной ряд сходится (абсолютно) для всех $x \in (-R;R)$ и расходится для всех $x \in (-\infty;-R) \cup (R;+\infty)$.

При $x = \pm R$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Определение 2. Число $R \geq 0$ называется ***радиусом*** сходимости степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, если степенной ряд сходится в каждой точке интервала $(-R;R)$ и расходится при $|x| > R$. Интервал $(-R;R)$ называется ***интервалом сходимости***.

Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходится только в точке $x = 0$, то $R = 0$; если же он сходится для всех $x \in \mathbf{R}$, то $R = \infty$.

Для нахождения радиуса сходимости степенного ряда используют признаки Д'Аламбера и Коши.

Теорема 2. *Пусть для коэффициентов ряда* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *существует предел* $\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k|} \neq 0$. *Тогда радиус сходимости находится по формуле Коши-Адамара*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k|}}.$$

► Пусть $\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k|} = L \neq 0$. Тогда $\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k x^k|} = L|x|$ и по признаку Коши при $L|x| < 1$ ряд сходится абсолютно, а при $L|x| > 1$ расходится. Следовательно,

$$R = \frac{1}{L} = \frac{1}{\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k|}}.$$

Если $\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k|} = L > 1$, то расходится не только числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$, но и ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, так как нарушается необходимый признак его сходимости:

$$L > 1 \;\Rightarrow\; |a_k| \to \infty \;\Rightarrow\; a_k \not\to 0. ◄$$

Замечание 1. Аналогично, если существует предел $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = L$, то применяя признак Д'Аламбера, получим

$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_k + 1}\right|.$$

Пример. Найти радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} k!x^k$.

Решение. Имеем

$$R = \lim_{k\to\infty}\frac{k!}{(k+1)!} = 0.$$

Значит, ряд сходится в единственной точке $x = 0$.

Замечание 2. Степенной ряд общего вида $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ заменой $x - x_0 = X$ сводится к ряду $\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$. Пусть R радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$. Тогда ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ сходится абсолютно при $|x - x_0| < R$ и расходится при $|x - x_0| > R$. Здесь число $R \geq 0$ называют ***радиусом сходимости***, а интервал $(x_0 - R; x_0 + R)$ – ***интервалом сходимости*** степенного ряда..

Пример. Найти область сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-3)^k}{k\cdot 5^k}$.

Решение. Имеем

$$R=\lim_{k\to\infty}\frac{\dfrac{1}{k\cdot 5^k}}{\dfrac{1}{(k+1)\cdot 5^{k+1}}}=5\,.$$

Значит, интервал сходимости $-5<x-3<5$ или $-2<x<8$. В точке $x=-2$ получаем условно сходящийся ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$, а в точке $x=8$ – расходящийся гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$. Таким образом, область сходимости ряда есть полуинтервал $[-2;8)$.

3. Свойства степенных рядов.

Не ограничивая общности будем рассматривать ряд $\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$.

Теорема 3. *Если радиус сходимости степенного ряда* $\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ *отличен от нуля, то его сумма* $S(x)$ *непрерывна на интервале сходимости* $(-R;R)$.

► Пусть x – произвольная точка интервала сходимости. Всегда существует такое число $q>0$, что $|x|<q<R$. По теореме 1 степенной ряд сходится равномерно на отрезке $[-q;q]\subset(-R;R)$. Тогда, согласно теореме о непрерывности суммы равномерно сходящегося функционального ряда, $S(x)$ непрерывна на отрезке $[-q;q]$. Следовательно, и в точке x. В силу произвольности выбора точки $x\in(-R;R)$ получаем непрерывность функции $S(x)$ на $(-R;R)$. ◄

Теорема 4. *Операции почленного дифференцирования и интегрирования на любом промежутке* $[x_0;x]\subset(-R;R)$ *степенного ряда* $\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ *не изменяют его радиуса сходимости.*

► Ограничимся рассмотрением случая, когда существует $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$. Обозначим через R_1 радиус сходимости почленно продифференцированного ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k x^k\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}k a_k x^{k-1}\,.$$

Тогда

$$R_1=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k a_k}{(k+1)a_{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=R\,.$$

Аналогично пусть R_2 – радиус сходимости ряда, полученного почленным интегрированием ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{x_0}^{x}a_k t^k dt\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a_k}{k+1}x^{k+1}-\frac{a_k}{k+1}x_0^{k+1}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k+1}x^{k+1}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k+1}x_0^{k+1}\,.$$

Числовой ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k+1}x_0^{k+1}$ сходится абсолютно по признаку сравнения в силу неравенства $\left|\frac{a_k}{k+1}x_0^{k+1}\right|\le\left|a_k x_0^{k+1}\right|$, $k=0,1,\ldots$, и сходимости ряда $|x_0|\sum_{k=0}^{\infty}\left|a_k x_0^k\right|$, так как $x_0\in(-R;R)$.

Значит,

$$R_2=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k(k+2)}{(k+1)a_{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=R\,.\ ◄$$

Теорема 5. *Если радиус сходимости степенного ряда* $\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ *отличен от нуля, то степенной ряд можно почленно дифферен-*

цировать на интервале сходимости и для его суммы $S(x)$ *справедливо равенство*

$$S'(x)=\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}.$$

► Пусть x – произвольная точка интервала сходимости $(-R;R)$, т.е. ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходится. Выберем такое число q, что $|x|<q<R$. На отрезке $[-q;q]\subset(-R;R)$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}$, согласно теореме 4, сходится равномерно. Следовательно, на указанном отрезке, а значит, и в точке x ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ можно почленно дифференцировать, и справедливо равенство

$$S'(x)=\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}. ◄$$

Следствие. *Степенной ряд на интервале сходимости* $(-R;R)$, $R\neq 0$, *можно почленно дифференцировать любое число раз.*

► Действительно, так как результатом почленного дифференцирования степенного ряда является степенной ряд с тем же радиусом сходимости, то к нему применима теорема 5 и т.д. ◄

Теорема 6. *Степенной ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *можно почленно интегрировать на любом отрезке* $[x_0;x]$, *принадлежащем интервалу сходимости.*

► Доказательство теоремы следует из равномерной сходимости степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ на отрезке $[x_0;x]\subset(-R;R)$ и теоремы о почленном интегрировании функционального ряда. ◄

Следствие. *Степенной ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *можно почленно интегрировать любое число раз на отрезке* $[x_0;x]\subset(-R;R)$.

Пример. Найти сумму ряда $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}$.

Решение. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}=1-x^2+x^4-\ldots+(-1)^k x^{2k}+\ldots,$$

полученный почленным дифференцированием исходного ряда. Так как члены этого ряда образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $(-x^2)$, то его сумма $S(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, если $|x|<1$. Интегрируя ряд $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}$ почленно на отрезке $[0;x]\subset(-1;1)$, получаем

$$\operatorname{arctg} x=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k}dt=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int_0^x t^{2k}dt=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}=\operatorname{arctg} x,\ |x|<1.$$

Таким образом, функция $y=\operatorname{arctg} x$ является суммой исходного ряда.

Вопросы для самоконтроля

1. Какой ряд называется степенным?
2. Сформулируйте и докажите теорему Абеля.
3. Что называется радиусом сходимости и интервалом сходимости степенного ряда?
4. Перечислите свойства степенных рядов.