Лекция 4. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

1. Сходимость функциональных последовательностей.
2. Функциональные ряды и их сходимость.
3. Признаки равномерной сходимости функциональных рядов.
4. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

1. Сходимость функциональных последовательностей.

Пусть на множестве X задана последовательность функций

$$(f_n(x))_{n=1}^{\infty} = (f_1(x); f_2(x); f_3(x); ...),$$

принимающих числовые значения в точках $x \in X$.

Определение 1. Последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ называется ***ограниченной***, если существует такое число $M > 0$, что $\forall n \in \mathbf{N}$ во всех точках $x \in X$ выполняется неравенство

$$|f_n(x)| \le M .$$

Символическая запись:

$$(f_n(x))_{n=1}^{\infty} - \textit{ограничена} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{N} \text{ и } \forall x \in X \quad |f_n(x)| \le M .$$

Определение 2. Последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ называется ***поточечно сходящейся*** к функции $f(x)$ на множестве X, если при любом фиксированном $x \in X$ числовая последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ сходится к $f(x)$, т.е. $\forall x \in X \ \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Символическая запись:

$$f_n(x) \to f(x)$$

$$\Leftrightarrow \ \forall \ \varepsilon > 0 \ \ \forall \ x \in X \ \ \exists \ N(\varepsilon): \ \forall \ n > N(\varepsilon) \ \Rightarrow \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon .$$

Пример. Последовательность функций $(x^n)_{n=1}^{\infty} = (1; x; x^2; ...)$ задана на множестве $X = [0;1]$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 1 \text{ при } x = 1, \\ 0 \text{ при } 0 \le x < 1. \end{cases}$$

Определение 3. Функциональная последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ называется ***равномерно сходящейся*** к функции $f(x)$

на множестве X, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех $n > N(\varepsilon)$ и всех точек $x \in X$ имеет место неравенство:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon .$$

Символическая запись:

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$$

$$\Leftrightarrow \ \forall \ \varepsilon > 0 \ \ \exists \ N(\varepsilon): \ \forall \ n > N(\varepsilon) \text{ и } \forall \ x \in X \Rightarrow$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon .$$

Лемма 1. *Для того чтобы последовательность функций $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходилась на множестве X к функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_X |f_n(x) - f(x)| = 0 .$$

Без доказательства.

Обозначим $r_n = \sup\limits_X |f_n(x) - f(x)|$.

Тогда последовательность $(r_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\sup\limits_X |f_n(x) - f(x)|\right)_{n=1}^{\infty}$ является числовой последовательностью.

Пример. Доказать, что функциональная последовательность $(x^n)_{n=1}^{\infty} = (1; x; x^2; ...)$, заданная на множестве $X = \left[0; \frac{1}{2}\right]$, является равномерно сходящейся на этом множестве.

Решение. Предел существует и $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0 = f(x)$ для всех $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$. Так как $\sup\limits_{\left[0;\frac{1}{2}\right]} |x^n - 0| = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\left[0;\frac{1}{2}\right]} |x^n - 0| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 .$$

Согласно лемме 1, последовательность $(x^n)_{n=1}^{\infty} = (1; x; x^2; ...)$

сходится равномерно к нулю на отрезке $X=\left[0;\frac{1}{2}\right]$: $x^n \underset{\left[0;\frac{1}{2}\right]}{\rightrightarrows} 0$.

Теорема 1 (критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности). *Для того чтобы последовательность функций $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходилась на множестве X к функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовал такой номер $N=N(\varepsilon)$, что всех точек $x\in X$, всех $n>N$ и всех $p\in \mathbf{Z}_+$ выполнялось неравенство*

$$\left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|<\varepsilon .$$

Без доказательства.

Символическая запись:

$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \Leftrightarrow$

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N(\varepsilon): \forall\ x\in X, \forall\ n>N\ \forall\ p\in \mathbf{Z}_+ \quad \left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|<\varepsilon$.

2. Функциональные ряды и их сходимость

Пусть $u_1(x)$, $u_2(x)$, …, $u_n(x)$, … – последовательность функций, определенных на некотором множестве X.

Определение 4. Ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_k(x)+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x),$$

членами которого являются функции $u_k(x)$, называется ***функциональным***.

Каждому значению $x_0\in X$ соответствует числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x_0)$. Этот числовой ряд может быть сходящимся или расходящимся. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ сходится, то x_0 называется ***точкой сходимости*** функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$. Множество всех точек сходимости функционального ряда называется его ***областью сходимости***. Обозначим ее через D. Очевидно, что $D\subseteq X$. Если множество D пусто, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ расходится в каждой точке множества X.

Определение 5. ***n-й частичной суммой*** $S_n(x)$ ряда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ называется конечная сумма

$$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x).$$

Ряд $r_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_{n+k}(x)$ называется ***n-м остатком*** ряда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$.

Определение 6. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ называется ***сходящимся поточечно*** к функции $S(x)$ на множестве X, если последовательность его частичных сумм $(S_n(x))_{n=1}^{\infty}$ сходится к $S(x)$ на X, т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)=S(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)\ \forall x\in X .$$

Функция $S(x)$ называется ***суммой*** ряда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$.

Очевидно, что для сходящегося на множестве X ряда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ его остаток

$$r_n(x)=S(x)-S_n(x)\to 0\ \ \forall x\in X \text{ при } n\to\infty .$$

О п р е д е л е н и е 7. Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется ***абсолютно сходящимся*** на множестве $D_1 \subset X$, если в каждой точке этого множества сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$.

Так как из абсолютной сходимости ряда в точке следует его сходимость, то $D_1 \subset D$, где D – область сходимости функционального ряда.

Пример. Найти область сходимости ряда

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2} + \ldots + \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{n-1}} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{k-1}}.$$

Р е ш е н и е. Члены исходного ряда при $x \neq 0$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{1+x^2} < 1$, а при $x = 0$ все обращаются в нуль. Тогда

$$S(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x = 0, \\ 1 + x^2, \text{если } x \neq 0. \end{cases}$$

Следовательно, областью сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{k-1}}$ является вся числовая ось $\mathbf{R}$. При этом, хотя все члены ряда непрерывны на $\mathbf{R}$, сумма $S(x)$ разрывна в точке $x = 0$.

Для определения области абсолютной сходимости функционального ряда используются признаки Коши и Д'Аламбера, для которых в рассматриваемом случае предел L, вообще говоря, будет функцией переменной x.

Пример. Найти область абсолютной сходимости функционального ряда

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}.$$

Р е ш е н и е. Зафиксируем точку x. Применим для полученного числового ряда признак Д'Аламбера:

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{x^k}{x^{k-1}} \right| = |x|.$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |x|^{k-1}$ сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| \geq 1$.

Таким образом, областью абсолютной сходимости функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}$ является интервал $(-1;1)$.

О п р е д е л е н и е 8. Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется ***равномерно сходящимся*** на множестве X к функции $S(x)$, если последовательность частичных сумм $\left(S_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно к $S(x)$ на X:

$$\forall\ x \in X \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \rightrightarrows S(x) \ \Leftrightarrow\ S_n(x) \rightrightarrows S(x).$$

Если $r_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}(x)$ n-й остаток ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, условие равномерной сходимости ряда можно записать в виде

$$r_n(x) \rightrightarrows 0.$$

Замечание. Различие определений *поточечной* и *равномерной* сходимостей функционального ряда состоит лишь в том, что в первом случае номер $N(\varepsilon)$ зависит от ε и $x \in X$, т.е. $N = N(\varepsilon; x)$, а во втором – только от ε, т.е. $N = N(\varepsilon)$. *Поточечную* сходимость называют также ***неравномерной***.

Пример. Показать, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{k-1}}$ в области $X = \mathbf{R}$ сходится неравномерно.

Р е ш е н и е. Пусть $0 < \varepsilon < 1$ и $x \neq 0$. Тогда

$$S_n(x) = (1+x^2)\left(1 - \frac{1}{(1+x^2)^n}\right),$$

и неравенство

$$|S(x) - S_n(x)| = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} < \varepsilon$$

выполняется при $n > N(\varepsilon, x) = 1 - \left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln(1+x^2)}\right]$.

Действительно,

$$\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} < \varepsilon \Rightarrow (1+x^2)^{n-1} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow (n-1)\ln(1+x^2) > -\ln\varepsilon \Rightarrow$$

$$n > 1 - \frac{\ln\varepsilon}{\ln(1+x^2)}.$$

Отсюда $N(\varepsilon, x) = 1 - \left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln(1+x^2)}\right]$.

Поскольку $N(\varepsilon, x) \to +\infty$ при $x \to 0$ и $0 < \varepsilon < 1$, то при выбранном ε не существует конечного номера $N(\varepsilon)$, который не зависит от x, такого, чтобы выполнялось неравенство $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon \ \ \forall n > N(\varepsilon), \ \forall x \in \mathbf{R}$.

Значит, сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^{k-1}}$ на $\mathbf{R}$ неравномерная.

Теорема 2 (критерий Коши равномерной сходимости ряда). *Для того чтобы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно сходился на множестве X к функции $S(x)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $N(\varepsilon)$, что всех $n > N(\varepsilon)$, всех $p \in \mathbf{Z}_+$ и всех точек $x \in X$ выполнялось неравенство*

$$|u_n(x) + u_{n+1}(x) + .. + u_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

Без доказательства.

3. Признаки равномерной сходимости функциональных рядов.

Теорема 3 (признак Вейерштрасса). *Пусть 1) члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ удовлетворяют неравенствам:*

$$|u_k(x)| \le a_k \quad \forall k \in \mathbf{N}, \ \forall x \in X;$$

2) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_n \ge 0$, сходится.

Тогда функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве X.

► Так как числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то его остаток $r_n \to 0$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): \ \forall n > N(\varepsilon) \quad r_n < \varepsilon.$$

Тогда $\forall n > N(\varepsilon)$

$$|r_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = r_n < \varepsilon \quad \forall x \in X.$$

По определению это и означает равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ на множестве X. ◄

О п р е д е л е н и е 9. Числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, члены которого удовлетворяют неравенствам $|u_k(x)| \le a_k \ \ \forall k \in \mathbf{N}, \ \forall x \in X$, называется ***мажорантным*** рядом или ***мажорантой*** для функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, а сам функциональный ряд в этом случае называется ***мажорируемым*** на множестве X.

Пример. Найти область равномерной сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^3}$.

Решение. Так как

$$\frac{\cos kx}{k^3}\le\frac{1}{k^3}\quad\forall k\in\mathbf{N},\ \forall x\in X$$

и ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$ сходится, то на основании признака Вейерштрасса заключаем, что областью равномерной сходимости заданного ряда является вся числовая ось $\mathbf{R}$.

Теорема 4 (признак Дирихле). *Пусть 1) последовательность функций* $\left(a_k(x)\right)_{k=1}^{\infty}$ *равномерно сходится к нулю на множестве* X*; 2)* $\left(a_k(x)\right)_{k=1}^{\infty}$ *в каждой точке* $x\in X$ *монотонна; 3) последовательность частичных сумм* $\left(B_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$, $B_n(x)=\sum_{k=1}^{n}b_k(x)$, *ограничена на* X. *Тогда ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x)b_k(x)$ *равномерно сходится на* X.

Без доказательства.

Теорема 5 (признак Абеля). *Пусть 1) последовательность функций* $\left(a_k(x)\right)_{k=1}^{\infty}$ *ограничена на множестве* X*; 2)* $\left(a_k(x)\right)_{k=1}^{\infty}$ *в каждой точке* $x\in X$ *монотонна; 3) ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}b_k(x)$ *равномерно сходится на* X. *Тогда ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x)b_k(x)$ *равномерно сходится на множестве* X.

4. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

Теорема 6 (непрерывность). *Если на множестве* X *функциональный ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ *с непрерывными членами сходится равномерно, то его сумма* $S(x)$ *непрерывна на* X.

► В силу равномерной сходимости ряда на множестве X для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех $n\ge N(\varepsilon)=N$

$$\left|r_N(x)\right|=\left|S(x)-S_N(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3}\quad\forall x\in X.$$

Поскольку функция $S_N(x)=\sum_{n=1}^{N}u_n(x)$ непрерывна на X, то $\forall\ x_0\in X$ существует $\lim\limits_{x\to x_0}S_n(x)=S(x_0)$. По определению предела $\forall\ \varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что $\forall\ x\in X$ удовлетворяющих неравенству $\left|x-x_0\right|<\delta$ выполняется неравенство $\left|S_N(x)-S_N(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$.

Учитывая, что $S(x)=S_N(x)+r_N(x)$, для любого $\varepsilon>0$ и $\forall\ x\in X$ удовлетворяющих неравенству $\left|x-x_0\right|<\delta$ получим:

$$\left|S(x)-S(x_0)\right|=\left|S_N(x)+r_N(x)-S_N(x_0)-r_N(x_0)\right|\le$$

$$\le\left|S_N(x)-S_N(x_0)\right|+\left|r_N(x)\right|+\left|r_N(x_0)\right|\le\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Значит, функция $S(x)$ непрерывна в произвольной точке $x_0\in X$. ◄

Следствие. *В равномерно сходящемся ряде возможен почленный переход к пределу, т.е.*

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}u_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x_0)\quad\forall x_0\in X.$$

► Действительно, в силу непрерывности суммы $S(x)$

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)=\lim_{x\to x_0}S(x)=S(x_0)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x_0)=\sum_{k=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}u_k(x).\ ◄$$

Теорема 7 (почленное интегрирование). *Если функциональный ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ *с непрерывными членами сходится к функции*

$S(x)$ равномерно на отрезке $[a;b]$, то его можно почленно интегрировать на любом отрезке $[x_0;x]\subset[a;b]$ и справедливо равенство:

$$\int_{x_0}^{x} S(t)dt = \int_{x_0}^{x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\right)dt = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x} u_k(t)dt,$$

причем ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x} u_k(t)dt$ сходится равномерно на $[a;b]$.

► В силу равномерной сходимости ряда

$$\forall\varepsilon>0\,\exists N(\varepsilon):\ \forall n>N(\varepsilon)\ \forall x\in[a;b]\quad |S(x)-S_n(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Тогда $\forall x\in[a;b]$ и $\forall n>N(\varepsilon)$

$$\left|\int_{x_0}^{x} S(t)dt-\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x} u_k(t)dt\right| = \left|\int_{x_0}^{x}\left(S(t)-\sum_{k=1}^{n} u_k(t)\right)dt\right| \le$$

$$\le\left|\int_{x_0}^{x} |S(t)-S_n(t)|dt\right| \le \frac{\varepsilon}{b-a}|x-x_0|<\varepsilon.$$

А это означает, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x} u_k(t)dt$ сходится равномерно на отрезке $[a;b]$ к функции $\int_{x_0}^{x} S(t)dt$. ◄

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{x}{k}$.

Решение. Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+x^2}$.

Так как

$$\frac{1}{k^2+x^2}\le\frac{1}{k^2}\quad\forall x\in\mathbf{R},$$

а ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ сходится, то согласно признаку Вейерштрасса

исходный ряд сходится равномерно на $\mathbf{R}$. Интегрируя его почленно на отрезке $[0;x]$, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{0}^{x}\frac{1}{k^2+t^2}dt=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{x}{k}.$$

В силу теоремы 7 ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{x}{k}$ сходится равномерно на множестве $\mathbf{R}$.

Теорема 8 (почленное дифференцирование). *Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ с непрерывно дифференцируемыми на отрезке $[a;b]$ членами сходится к функции $S(x)$ а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$ сходится равномерно на этом отрезке, то исходный ряд сходится равномерно на $[a;b]$, его сумма $S(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция и справедливо равенство*

$$S'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x).$$

► Обозначим через $\delta(x)=\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$. Интегрируя это равенство на отрезке $[x_0;x]\subset[a;b]$, получаем

$$\int_{x_0}^{x}\delta(t)dt=\int_{x_0}^{x}\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(t)dt=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x} u'_k(t)dt=\sum_{k=1}^{\infty}(u_k(x)-u_k(x_0))=S(x)-S(x_0)$$

или

$$\int_{x_0}^{x}\delta(t)dt=S(x)-S(x_0).$$

Левая часть равенства дифференцируема по x. Следовательно, дифференцируема по x и правая его часть. Получим: $\delta(x)=S'(x)$.

Тогда справедливо равенство

$$S'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k'(x).$$

Равномерная сходимость на $[a;b]$ ряда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ следует из теоремы 7. ◄

Пример. Найти сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}$.

Решение. Очевидно, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty}x^k$ сходится при $|x|<1$ и его сумма равна $\frac{1}{1-x}$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}$, полученный почленным дифференцированием ряда сходится равномерно при $|x|\le q<1$ на основании признака Вейерштрасса, так как он мажорируется числовым рядом $\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}$, сходящимся по признаку Д'Аламбера. На основании теоремы 8

$$\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2},$$

т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2}\quad \forall x\in(-1;1),$$

поскольку для любого x из указанного интервала всегда найдется такое q, что выполняется неравенство $|x|\le q<1$.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение ограниченной функциональной последовательности.
2. Какая функциональная последовательность называется поточечно сходящейся на множестве X?
3. Дайте определение равномерно сходящейся функциональной последовательности. Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости последовательности.
4. Дайте определение функционального ряда, его области сходимости.
5. Сформулируйте определения поточечной и равномерной сходимости функционального ряда.
6. Сформулируйте и докажите признак Вейерштрасса равномерной сходимости рядов.
7. Перечислите свойства равномерно сходящихся рядов.