Лекция 3. ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ И ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

1. Знакочередующиеся ряды.
2. Абсолютно сходящиеся ряды.
3. Условно сходящиеся ряды.
4. Признаки Дирихле и Абеля.

1. Знакочередующиеся ряды.

Определение 1. ***Знакочередующимся*** называется ряд, все члены которого поочередно меняют знак:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{k-1}a_k + \ldots,$$

где a_k, $k = 1,2,\ldots$, – числа одного знака.

Теорема 1 (признак Лейбница). *Пусть члены знакочередующегося ряда* $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$ *удовлетворяют условиям:*

1) $a_k \geq a_{k+1}$ $\forall k \in \mathbf{N}$;

2) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$ *сходится, а его сумма* S *не превосходит первого члена, т.е.* $S \leq a_1$.

► Рассмотрим четную частичную сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$:

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}).$$

Так как все выражения в круглых скобках неотрицательны, то последовательность четных частичных сумм (S_{2n}) ряда неубывающая.

С другой стороны, S_{2n} можно записать в виде:

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1.$$

Таким образом, последовательность $(S_{2n})_{n=1}^{\infty}$ не убывает и ограничена сверху, а, следовательно, она сходится. Обозначим

$\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$.

Из соотношения

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S,$$

следует, что $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k = S$.

Из неравенства $S_{2n} \leq a_1$ заключаем, что $S \leq a_1$. ◄

Ряд, удовлетворяющий условиям теоремы 1 называется ***рядом Лейбница***.

Следствие. *Остаток* $r_n = (-1)^n(a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots)$ *ряда Лейбница удовлетворяет неравенству* $|r_n| \leq a_{n+1}$.

► Действительно, ряд Лейбница

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-n-1}a_k = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \ldots$$

только знаком отличается от остатка r_n ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$$

и не превосходит своего первого члена a_{n+1}. ◄

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

Решение. Так как $\frac{1}{k^2} > \frac{1}{(k+1)^2}$ $\forall k \in \mathbf{N}$ и $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k^2} = 0$, то данный ряд сходится.

2. Абсолютно сходящиеся ряды.

Определение 2. Ряды, содержащие как положительные, так и отрицательные члены, называются ***знакопеременными***.

Примеры. Знакопеременными рядами являются:

1. $1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + \ldots + (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}$;

2. $\sin\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} + \ldots + \frac{\sin k\alpha}{k} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\alpha}{k}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}m$, $m \in \mathbf{N}$.

Очевидно, что знакочередующиеся ряды являются частным случаем знакопеременных рядов.

О п р е д е л е н и е 3. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется ***абсолютно сходящимся***, если знакоположительный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ сходится.

Теорема 2 (критерий Коши абсолютной сходимости ряда). *Для того чтобы ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *абсолютно сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовало такое число* $N(\varepsilon)$, *что для всех* $n > N(\varepsilon)$ *и всех целых* $p \ge 0$ *имело место неравенство*

$$\left| a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p} \right| < \varepsilon .$$

► Доказательство следует из определения абсолютно сходящегося ряда и критерия Коши сходимости ряда. ◄

Теорема 3. *Если ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *абсолютно сходится, то он сходится.*

► Из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ по свойству 3 линейных операций над рядами следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} 2|a_k|$.

Поскольку $0 \le a_k + |a_k| \le 2|a_k| \quad \forall k \in \mathbf{N}$, то из признака сравнения следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k + |a_k| \right)$.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ можно представить в виде разности сходящихся рядов: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k + |a_k| \right) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_k|$.

Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. ◄

Замечание. Обратное утверждение в общем случае не имеет места.

Пример. Исследовать на сходимость ряды:

1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^k}$, 2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Р е ш е н и е. 1. Ряд, составленный из абсолютных величин исходного ряда, имеет вид $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ и является сходящимся. Значит, ряд исходный является абсолютно сходящимся.

2. По признаку Лейбница ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ сходится. С другой стороны, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ является расходящимся гармоническим рядом. Значит, исходный ряд не является абсолютно сходящимся.

3. Условно сходящиеся ряды.

О п р е д е л е н и е 4. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ расходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется ***условно сходящимся***.

Пример. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ сходится условно.

Для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ обозначим через a_1^+, a_2^+, …, a_k^+,… и a_1^-, a_2^-, …, a_k^-, … соответственно его неотрицательные и отрицательные члены, взятые в том же порядке, в котором они расположены в ряде $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Рассмотрим ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$, члены которых неотрицательны.

Теорема 4. *Если ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *условно сходится, то оба ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ *расходятся.*

Без доказательства.

Теорема 5 (Римана). *Если ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *условно сходится, то, каково бы ни было действительное число* s, *можно так переставить члены его ряда, что сумма получившегося ряда будет равна* s.

Без доказательства.

Пример. Так как $\lim_{k\to\infty}(-1)^{k-1} \neq 0$, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} = 1-1+1-1+1-\ldots$$

является расходящимся.

Ряды

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots$$

и

$$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\ldots,$$

полученные из него путем объединения его членов, сходятся. Причем

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots = 0,$$

$$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\ldots = 1.$$

4. Признаки Дирихле и Абеля.

Лемма 1 (Абеля). *Пусть 1)для всех* $i = 1,2,\ldots,n-1$ *выполняется неравенства* $a_i \le a_{i+1}$ *или* $a_i \ge a_{i+1}$, *2)для всех* $k = 1,2,\ldots,n$ *выполняются неравенства*

$$|b_1 + b_2 + \ldots + b_k| \le B.$$

Тогда $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le B(|a_1| + 2|a_n|)$.

Без доказательства.

Теорема 6 (признак Дирихле). *Пусть 1) последовательность* $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ *монотонна и* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, *2)последовательность сумм* $(B_n)_{n=1}^{\infty}$, $B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, *ограничена. Тогда ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *сходится.*

► Из ограниченности последовательности $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ следует, что существует $B > 0$ такое, что $\forall n \in \mathbf{N}$ выполняются неравенства $|B_n| \le B$. Следовательно, $\forall n \ge 2$ и $\forall p \in \mathbf{Z}_+$ выполняются неравенства

$$\left|\sum_{k=0}^{n} b_{n+k}\right| = |B_{n+p} - B_{n-1}| \le |B_{n+p}| + |B_{n-1}| \le 2B.$$

В силу условия 1)

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0 \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon):\ \forall\ n > N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n| < \frac{\varepsilon}{6B}.$$

Тогда для всех $n > N(\varepsilon)$ и всех целых $p \ge 0$ имеем

$$\left|\sum_{k=0}^{p} a_{n+k} b_{n+k}\right| \le 2B(|a_n| + 2|a_{n+p}|) < 2B\left(\frac{\varepsilon}{6B} + \frac{2\varepsilon}{6B}\right) = \varepsilon.$$

Согласно критерию Коши сходимости рядов, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится. ◄

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\alpha}{k}$.

Решение. Последовательность $(a)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{k}\right)_{n=1}^{\infty}$ монотонно убывающая и $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$.

Рассмотрим последовательность

$$\left(B_n\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha\right)_{n=1}^{\infty}.$$

При $\alpha \neq 2m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$, имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha =$$

$$= \frac{2\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2} + 2\sin 2\alpha\sin\frac{\alpha}{2} + \ldots + 2\sin n\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{3\alpha}{2} + \cos\frac{3\alpha}{2} - \ldots + \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\alpha}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Поэтому

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha\right| \leq = \frac{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| + \left|\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\alpha}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}.$$

При $\alpha \neq 2m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$, все рассматриваемые суммы ограничены. В силу признака Дирихле ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\alpha}{k}$ сходится.

При $\alpha = 2m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$, все члены ряда обращаются в нуль и ряд также сходится.

Теорема 7 (признак Абеля). *Пусть 1) последовательность $\left(a_k\right)_{k=1}^{\infty}$ ограничена и монотонна, 2) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.*

► Из ограниченности и монотонности последовательности $\left(a_k\right)_{k=1}^{\infty}$ существование предела $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$. Поэтому можно записать $a_k = a + \alpha_k$, где последовательность $\left(\alpha_k\right)_{k=1}^{\infty}$ монотонна и $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0$.

Из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ следует, что последовательность его частичных сумм $\left(B_n\right)_{n=1}^{\infty}$, $B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, ограничена.

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a + \alpha_k\right) b_k = a\sum_{k=1}^{\infty} b_k + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k b_k$$

есть сумма двух сходящихся рядов (1-й по условию, 2-й по признаку Дирихле).◄

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\alpha}{k} \cos\frac{\pi}{k}.$$

Решение. Последовательность $\left(a_k\right)_{k=1}^{\infty} = \left(\cos\frac{\pi}{k}\right)_{k=1}^{\infty}$ ограничена и монотонна. Ряд сходится по признаку Дирихле. Согласно признаку Абеля ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\alpha}{k} \cos\frac{\pi}{k}$ сходится.

Вопросы для самоконтроля

1. Какой ряд называется знакочередующимся?
2. Сформулируйте и докажите признак Лейбница.
3. Какой ряд называется знакопеременным, абсолютно сходящимся?
4. Сформулируйте критерий Коши абсолютной сходимости ряда.

5. Какими свойствами обладают условно сходящиеся ряды?
6. Сформулируйте и докажите признак Дирихле.
7. Сформулируйте и докажите признак Абеля.