Лекция 2. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

1. Пространство кусочно-непрерывных функций.
2. Основная тригонометрическая система функций.

1. Пространство кусочно-непрерывных функций.

При изучении возможности представления функции рядом Тейлора в точке x_0 предполагалось, что $f(x)$ бесконечно дифференцируема в окрестности этой точки. Множество бесконечно дифференцируемых функций достаточно узко. Представление же функций рядами Фурье допускает более широкий класс кусочно-непрерывных функций.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется ***кусочно-непрерывной*** на отрезке $[a;b]$, если она непрерывна на этом отрезке, за исключением, быть может, конечного числа точек, где она имеет разрывы первого рода.

Пример. Функция

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{если } 0\le x<1, \\ 0{,}5x^2, & \text{если } 1\le x<2, \\ 0{,}5(x+1), & \text{если } 2\le x\le 4, \end{cases}$$

является кусочно-непрерывной на отрезке $[0;4]$ (рис.1).

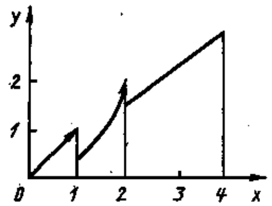

Рис.1.

Пусть $f(x)$ – кусочно-непрерывная на $[a;b]$ функция. В любой точке разрыва $x_0\in[a;b]$ такой функции существуют односторонние пределы $f(x_0\pm 0)$. Поэтому на каждом участке непрерывности существуют определенные интегралы Римана

$\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b f^2(x)dx$. Значит, кусочно-непрерывная на $[a;b]$ функция $f(x)$ интегрируема вместе со своим квадратом на $[a;b]$. Функция $f(x)$ в этом случае называется *функцией с интегрируемым квадратом*.

Так как на множестве кусочно-непрерывных функций определены линейные операции, удовлетворяющие аксиомам линейного пространства, то это множество образует линейное пространство. Введем на нем операцию скалярного произведения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Определение 2. ***Скалярным произведением*** функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется число

$$(\varphi,\psi)=\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx. \qquad (1)$$

На рассматриваемом множестве скалярное произведение функций (1) существует и обладает следующими свойствами:

1) $(\varphi,\psi)=(\psi,\varphi)$;
2) $(\varphi_1+\varphi_2,\psi)=(\varphi_1,\psi)+(\varphi_2,\psi)$;
3) $(\lambda\varphi,\psi)=\lambda(\varphi,\psi)\ \ \forall\lambda\in \boldsymbol{R}$;
4) $(\varphi,\varphi)\ge 0$, $(\varphi,\varphi)=0\Leftrightarrow \varphi=0$,

т.е. удовлетворяет аксиомам евклидова пространства.

Множество всех кусочно-непрерывных на $[a;b]$ функций со скалярным произведением, определенным по формуле (1), обозначается $L_2[a;b]$ и называется ***пространством*** L_2. Пространство L_2 – бесконечномерное.

Пример. Вычислить скалярное произведение функций $\varphi(x)=x$ и $\psi(x)=x^2$ на отрезке $[0;1]$.

Решение. Имеем

$$(\varphi,\psi)=\int_0^1 xx^2dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1=\frac{1}{4}.$$

Определение 3. Неотрицательное число

$$\|\varphi\| = \sqrt{\int_a^b \varphi^2(x)dx}$$

называется ***нормой*** функции $\varphi(x)$ в пространстве $L_2[a;b]$.

Учитывая, что $\int_a^b \varphi^2(x)dx = (\varphi,\varphi)$, норму функции можно записать в виде

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi,\varphi)}\,. \qquad (2)$$

Функция $\varphi(x)$ называется ***нормированной***, если ее норма равна единице.

Пример. Вычислить норму функции $\varphi(x) = \sin x$ в $L_2[0;\pi]$.

Решение. Так как

$$\|\varphi\|^2 = \int_0^\pi \sin^2 x dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi}{2},$$

то $\|\varphi\| = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

Определение 4. Две функции $\varphi(x) \in L_2[a;b]$ и $\psi(x) \in L_2[a;b]$ называются ***ортогональными*** на отрезке $[a;b]$, если их скалярное произведение на $[a;b]$ равно нулю, т.е.

$$(\varphi,\psi) = \int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0\,.$$

Пример. Функции $\varphi(x) = x$ и $\psi(x) = x^2$ являются ортогональными на отрезке $[-1;1]$, так как

$$(\varphi,\psi) = \int_{-1}^1 xx^2 dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_{-1}^1 = 0\,.$$

Заметим, что эти функции уже не являются ортогональными на отрезке $[0;1]$, поскольку $(\varphi,\psi) \neq 0$ на $[0;1]$.

Определение 5. Система функций

$$(\varphi_n(x)) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots)$$

(конечная или бесконечная) называется ***ортогональной*** на отрезке $[a;b]$, если все функции этой системы попарно ортогональны на $[a;b]$, т.е.

$$(\varphi_m, \varphi_n) = 0\,,\ \forall m \neq n\,,\ m,n \in \boldsymbol{N}\,.$$

Определение 6. Ортогональная система функций ($\varphi_n(x)$) на отрезке $[a;b]$ называется ***ортонормированной***, если

$$\|\varphi\|^2 = (\varphi_n, \varphi_n) = \int_a^b \varphi_n^2(x)dx = 1 \quad \forall n \in \boldsymbol{N}\,.$$

Любую ортогональную на $[a;b]$ систему функций ($\varphi_n(x)$) с $\|\varphi\| \neq 0 \ \ \forall n \in \boldsymbol{N}$ можно нормировать. Для этого достаточно разделить каждую функцию системы ($\varphi_n(x)$) на ее норму. В результате получим ортонормированную систему функций $\left(\dfrac{\varphi_n(x)}{\|\varphi_n\|}\right)$.

Пример. Доказать, что бесконечная система функций

$$(\sin nx) = (\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx, \ldots)$$

является ортогональной на $[-\pi;\pi]$, и пронормировать ее.

Решение. Согласно определению, для любых $m \neq n$, $m,n \in \boldsymbol{N}$, скалярное произведение функций данной системы должно быть равным нулю.

Действительно,

$$(\varphi_n, \varphi_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n-m)x - \cos(n+m)x)dx = 0\,.$$

Норма любой функции системы отлична от нуля. В самом деле, для любого $n \in \boldsymbol{N}$

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx)dx = \pi\,.$$

Следовательно, $\|\varphi_n\| = \sqrt{\pi} > 0 \ \ \forall n \in \boldsymbol{N}$.

Если разделить каждый член ортогональной на $[a;b]$ системы ($\varphi_n(x)$) на норму $\|\varphi_n\| = \sqrt{\pi}$, то получим ортонормированную на отрезке $[-\pi;\pi]$ систему функций:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\ldots,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\ldots\right).$$

Понятие ортогональности системы функций аналогично понятию ортогональности векторов. Каждую функцию из множества кусочно-непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций ($f(x)\in L_2[a;b]$) можно рассматривать как бесконечный вектор (число координат этого вектора (его размерность) – множество всех действительных чисел отрезка $[a;b]$). Тогда введенное по формуле (1) понятие скалярного произведения двух функций, принадлежащих множеству $L_2[a;b]$, является обобщением скалярного произведения двух векторов n-мерного евклидова векторного пространства.

2. Основная тригонометрическая система функций.

Определение 7. ***Основной тригонометрической системой функций*** на отрезке $[-l;l]$ называется система

$$\left(1,\cos\frac{\pi x}{l},\sin\frac{\pi x}{l},\cos\frac{2\pi x}{l},\sin\frac{2\pi x}{l},\ldots,\cos\frac{n\pi x}{l},\sin\frac{n\pi x}{l},\ldots\right). \quad (2)$$

Теорема 1. *Основная тригонометрическая система функций (2) является ортогональной на любом отрезке длиной* $2l$*, например на отрезке* $[-l;l]$*, причем норма первого члена системы равна* $\sqrt{2l}$*, а любого другого* $\sqrt{l}$.

► Докажем вначале, что система (2) является ортогональной.

Имеем

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{(m-n)\pi x}{l}+\cos\frac{(m+n)\pi x}{l}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\cos\frac{(m-n)\pi x}{l}dx+\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\cos\frac{(m+n)\pi x}{l}dx=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\frac{l}{m-n}\sin\frac{(m-n)\pi x}{l}+\frac{1}{2}\frac{l}{m+n}\sin\frac{(m+n)\pi x}{l}\right)\Bigg|_{-l}^{l}=0 .$$

Аналогично доказывается равенство нулю остальных интегралов:

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx=0 \quad \forall\ n\in \boldsymbol{N} ,$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=0 \quad \forall\ n\in \boldsymbol{N} ,$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=0 \quad \forall m,n\notin \boldsymbol{N} ,\ m\neq n ,$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx=0 \quad \forall m,n\notin \boldsymbol{N} ,\ m\neq n ,$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=0 \quad \forall m,n\notin \boldsymbol{N} ,\ m\neq n .$$

Вычислим норму первого члена основной тригонометрической системы функций. Так как

$$\|1\|^2=\int_{-l}^{l}(1)^2\,dx=x\Big|_{-l}^{l}=2l ,$$

то $\|1\|=\sqrt{2l}$.

Найдем норму произвольного члена системы, содержащего косинусы:

$$\left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\|^2=\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{n\pi x}{l}\right)^2dx=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1+\cos\frac{2\pi nx}{l}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{1}{2}x+\frac{l}{4n\pi}\sin\frac{2\pi nx}{l}\right)\Bigg|_{-l}^{l}=l\Rightarrow\left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\|=\sqrt{l} ,\ \forall\ n\in \boldsymbol{N} .$$

Аналогично доказывается, что $\left\|\sin\frac{n\pi x}{l}\right\|=\sqrt{l} \quad \forall\ n\in \boldsymbol{N}$. ◄

Основная тригонометрическая система функций является ортогональной на любом отрезке, равном периоду $T=2l$.

В таблице 1 приведены примеры тригонометрических ортогональных систем функций и указаны нормы их элементов.

Таблица 1

№	Ортогональная система функций	Отрезок ортогональности	Нормы
1	1, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, …, $\cos nx$, $\sin nx$, …	$[-\pi;\pi]$	$\lVert 1\rVert=\sqrt{2\pi}$, $\lVert\sin nx\rVert=\lVert\cos nx\rVert=\sqrt{\pi}$
2	1, $\cos\frac{\pi x}{l}$, $\cos\frac{2\pi x}{l}$, …, $\cos\frac{n\pi x}{l}$, …	$[0;l]$	$\lVert 1\rVert=\sqrt{l}$, $\left\lVert\cos\frac{n\pi x}{l}\right\rVert=\sqrt{\frac{l}{2}}$
3	$\sin\frac{\pi x}{l}$, $\sin\frac{2\pi x}{l}$, …, $\sin\frac{n\pi x}{l}$, …	$[0;l]$	$\left\lVert\sin\frac{n\pi x}{l}\right\rVert=\sqrt{\frac{l}{2}}$
4	1, $\cos x$, $\cos 2x$, …, $\cos nx$, …	$[0;\pi]$	$\lVert 1\rVert=\sqrt{\pi}$, $\lVert\cos nx\rVert=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
5	$\sin x$, $\sin 2x$, …, $\sin nx$, …	$[0;\pi]$	$\lVert\sin nx\rVert=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Замечание. Ортогональная система функций, расположенная в первой строке таблицы 1, получается из основной тригонометрической системы функций при $l=\pi$, а ортогональные системы функций, приведенные в четвертой и пятой строках, – также при $l=\pi$ из систем функций, записанных во второй и третьей строках таблицы соответственно.

Пример. Ортогональной нетригонометрической системой функций является система ***многочленов Лежандра***, определяемая следующим образом:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-n\right)^n,\ n=0,1,...$$

Запишем несколько членов этой системы:

$$P_0(x)=1,$$
$$P_1(x)=x,$$
$$P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right),$$
$$P_3(x)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right),$$
$$P_4(x)=\frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Система многочленов Лежандра является ортогональной на отрезке $[-1;1]$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какая функция называется кусочно-непрерывной?
2. Что называется скалярным произведением функций и какими свойствами оно обладает?
3. Какая система функций называется ортогональной и ортонормированной?
4. Запишите основную тригонометрическую систему и докажите, что ее ортогональность.
5. Докажите, что система многочленов Лежандра является ортогональной.