Лекция 6. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Интегрируемость непрерывных и монотонных функций.
2. Основные свойства определенного интеграла.
3. Интегральная теорема о среднем.

1. Интегрируемость непрерывных и монотонных функций.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке, т.е. существует интеграл* $\int\limits_a^b f(x)d(x)$.

►Ограниченность $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ следует из теоремы Вейерштрасса.

По теореме Кантора эта функция равномерно непрерывна на отрезке $[a;b]$. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых x и x', принадлежащих отрезку $[a;b]$, из неравенства $|x - x'| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Возьмем такое разбиение τ_n отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1};x_k]$, $k = 1,2,...,n$, чтобы $\lambda < \delta$. Тогда $\forall x, x' \in [x_{k-1};x_k]$ из неравенства $|x - x'| < \delta$ выполняется неравенство

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Отсюда следует, что $|M_k - m_k| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.

С учетом этого

$$0 \le S_n - s_n = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k < \sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k =$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a) = \varepsilon.$$

Значит, $\lim\limits_{\lambda \to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k = 0$ и $f(x) \in \mathrm{R}_{[a;b]}$ ◄

Следствие 1. *Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$ и непрерывна на нем всюду, кроме конечного числа точек разрыва первого рода, то она интегрируема на этом отрезке.*

Теорема 2. *Функция $f(x)$, монотонная на отрезке $[a;b]$, то интегрируема на этом отрезке.*

► Ограниченность $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ следует из свойств непрерывных функций.

Пусть $f(x)$ возрастает на отрезке $[a;b]$, т.е. $f(a) < f(x) < f(b)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Возьмем такое разбиение τ_n отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1};x_k]$, $k = 1,2,...,n$, чтобы

$$\lambda < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$

В силу монотонности $f(x)$ имеем

$$\Delta x_k = |x_k - x_{k-1}| < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \text{ и } M_k - m_k = f(x_k) - f(x_{k-1}).$$

Тогда

$$S_n - s_n = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k < \sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1}))\frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}\cdot(f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \ldots + f(x_n) - f(x_{n-1})) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}\cdot(f(x_n) - f(x_0)) = \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim\limits_{\lambda \to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k = 0$. В силу критерия Дарбу $f(x) \in \mathrm{R}_{[a;b]}$ ◄

2. Основные свойства определенного интеграла.

Определенный интеграл обладает следующими свойствами.

1. *Если нижний и верхний пределы интегрирования равны $(a = b)$, то интеграл равен нулю*:

$$\int_a^b f(x)dx = 0 .$$

Это свойство следует из определения интеграла.

2. *Если* $f(x)=1$*, то* $\int_a^b dx = b-a$.

►Действительно, так как $f(x)=1$, то

$$\int_a^b dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} 1\cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = b-a . \blacktriangleleft$$

3. *При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный*:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx .$$

► Данное утверждение следует из того, что в случае $b<a$ все числа $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ в разбиении $\tau_n = \{a = x_0 > x_1 > \ldots > x_n = b\}$ будут отрицательными (при $a<b$ все $\Delta x_k > 0$). ◄

Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ был определен для случая $a<b$. Если $a>b$, свойство 3 рассматривается как дополнение к определению определенного интеграла. Его можно интерпретировать следующим образом: определенные интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_b^a f(x)dx$ являются пределами интегральных сумм, различающихся лишь знаком.

4. *Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла*:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \quad \forall c\in \mathbf{R} .$$

► Действительно,

$$\int_a^b cf(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} cf(\xi_k)\Delta x_k = c\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = c\int_a^b f(x)dx . \blacktriangleleft$$

5. *Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа интегрируемых на* $[a;b]$ *функций* $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$ *равен алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых*:

$$\int_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)\right)dx =$$

$$= \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int_a^b f_n(x)dx .$$

Доказательство этого свойства аналогично приведенному выше.

Замечание. Совокупность свойств 4 и 5 называются свойством **линейности**: *если* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *интегрируемы на* $[a;b]$, *то любая их линейная комбинация* $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$, c_1, $c_2 \in \mathbf{R}$, *также интегрируема на* $[a;b]$:

$$\int_a^b \left(c_1 f_1(x) \pm c_2 f_2(x)\right)dx = c_1\int_a^b f_1(x)dx \pm c_2\int_a^b f_2(x)dx .$$

6 (аддитивность определенного интеграла). *Если существуют интегралы* $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$, *то существует также интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *и для любых чисел* a, b, c

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

►Действительно, предел интегральной суммы не зависит от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки и от выбора ξ_k. Это позволяет при составлении интегральной суммы включить точку c в число точек разбиения. Пусть $c = x_m$, т.е.

$$[a;b]=[a;c]\cup[c;b]=([a;x_1]\cup[x_1;x_2]\cup\ldots\cup[x_{m-1};x_m])\cup$$
$$\cup([x_m;x_{m+1}]\cup\ldots\cup[x_{n-1};b]).$$

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k=\sum\limits_{k=1}^{m} f(\xi_k)\Delta x_k+\sum\limits_{k=m}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$.

Переходя к пределу при $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i\to 0$, имеем

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx\,. \blacktriangleleft$$

Геометрический смысл свойства 6 состоит в том, что площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;b]$ равна сумме площадей криволинейных трапеций с основаниями $[a;c]$ и $[c;b]$ (рис.1.)

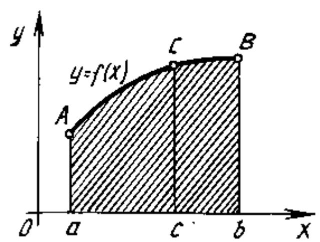

Рис. 1.

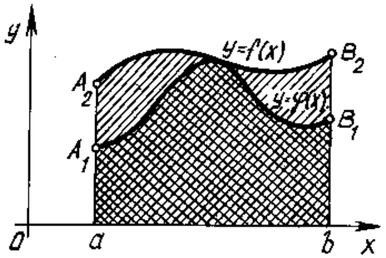

Рис.2.

7 (интегрирование неравенств). *Если* $f(x)\ge 0 \quad \forall x\in[a;b]$, *то* $\int_a^b f(x)dx\ge 0$, $a<b$.

►Действительно, так как $f(\xi_k)\ge 0$ и $\Delta x_k\ge 0$, то интегральная сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\ge 0$. Переходя к пределу в последнем равенстве, имеем

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k=\int_a^b f(x)dx\ge 0\,. \blacktriangleleft$$

8 (монотонность определенного интеграла). *Если интегрируемые функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *удовлетворяют неравенству* $f(x)\ge\varphi(x) \;\; \forall x\in[a;b]$, *то*

$$\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b \varphi(x)dx\,,\; a<b\,.$$

►Действительно, так как $f(x)-\varphi(x)\ge 0 \quad \forall x\in[a;b]$, то, согласно свойствам 5 и 7, имеем

$$\int_a^b (f(x)-\varphi(x))dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b \varphi(x)dx\ge 0\,.$$

Следовательно $\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b \varphi(x)dx$.◄

На рис.2. дана **геометрическая** интерпретация свойства 8. Так как $f(x)\ge\varphi(x)$, то площадь криволинейной трапеции aA_2B_2b не меньше площади криволинейной трапеции aA_1B_1b.

Замечание. Так как $-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)| \;\; \forall x\in[a;b]$, то

$$-\int_a^b |f(x)|dx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b |f(x)|dx\,.$$

Отсюда $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b f(x)dx$.

3. Интегральная теорема о среднем.

Терема 3 (о среднем). *Пусть 1) функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы на отрезке* $[a;b]$, *2) для любого* $x\in[a;b]$ *справедливо неравенство* $m\le f(x)\le M$, *3) функция* $g(x)$ *не меняет знак на* $[a;b]$. *Тогда существует такое число* μ, $m\le\mu\le M$ *, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx\,.$$

►По условию $m\le f(x)\le M \quad \forall x\in[a;b]$.

Умножим неравенство на $g(x)$.

Если $g(x)\geq 0$, получим $mg(x)\leq f(x)g(x)\leq Mg(x)$.

Если $g(x)\leq 0$, получим $Mg(x)\leq f(x)g(x)\leq mg(x)$.

Интегрируя эти неравенства, имеем

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx$$

или $M\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq m\int_a^b g(x)dx$.

В случае, когда $\int_a^b g(x)dx = 0$, то $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ и теорема доказана.

В случае, когда $\int_a^b g(x)dx \neq 0$, то при $g(x)\geq 0$ имеем $\int_a^b g(x)dx > 0$, а при $g(x)\leq 0$ имеем $\int_a^b g(x)dx < 0$.

Разделим обе части двойных неравенств на $\int_a^b g(x)dx$. В обоих случаях получим одно и то неравенство

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M .$$

Полагая

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx},$$

получим $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx$.◄

Следствие 1. *Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$, непрерывной на $[a;b]$, то*

$$m(b-a)\leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \quad \forall x\in[a;b].$$

►По условию $m\leq f(x)\leq M \quad \forall x\in[a;b]$. Применяя свойство 8 к этим неравенствам, имеем

$$m\int_a^b dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\int_a^b dx .$$

Согласно свойству 2, $\int_a^b dx = b-a$, следовательно,

$$m(b-a)\leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).◄$$

На рисунке 3 дана **геометрическая** интерпретация следствия 1 в случае, когда $f(x)\geq 0 \quad \forall x\in[a;b]$. Площадь прямоугольника aA_1B_1b равна $m(b-a)$, площадь прямоугольника aA_2B_2b – $M(b-a)$. Из неравенства $m(b-a)\leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ следует, что площадь криволинейной трапеции $aABb$ не меньше площади первого прямоугольника и не больше площади второго.

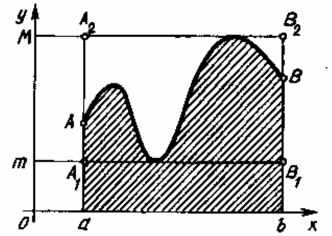

Рис.3.

Следствие 2. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то существует такая точка $\xi\in[a;b]$, что*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

►Известно, что непрерывная функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ достигает своего наименьшего m и наибольшего M значений, т.е. $m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a;b]$. Из данного неравенства на основании следствия 1 имеем

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Разделив все члены двойного неравенства на $b-a>0$, получим

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M.$$

Другими словами, число $\lambda = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ находится между наименьшим и наибольшим значениями функции $f(x)$. Поскольку непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ принимает все промежуточные значения, лежащие между m и M, в том числе и значение λ, то существует $\xi \in [a;b]$, такое, что $f(\xi) = \lambda$.

Значит, $f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$.

Отсюда $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$. ◄

Число $f(\xi)$, называется ***интегральным средним значением функции*** $f(x)$ ***на отрезке*** $[a;b]$.

Геометрически данное следствие означает, что, определенный интеграл от непрерывной функции равен

произведению значения подынтегральной функции в некоторой промежуточной точке ξ отрезка интегрирования $[a;b]$ и длины $b-a$ этого отрезка.

На рисунке 4 дана геометрическая интерпретация следствия 2 в случае, когда $f(x)>0 \quad \forall x \in [a;b]$. Так как значение $f(\xi)(b-a)$ численно равно площади прямоугольника с основанием $b-a$ и высотой $f(\xi)$, то теорема о среднем утверждает, что существует прямоугольник, равновеликий криволинейной трапеции $aABb$.

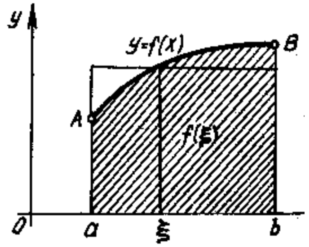

Рис.4.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте и докажите теорему об интегрируемости непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции.
2. Является монотонная на отрезке $[a;b]$ функция интегрируемой?
3. Перечислите основные свойства определенного интеграла.
4. В чем заключается смысл теоремы о среднем?