Лекция 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

2. Интегралы вида $\int \sin^n x \cos^m x dx$ ($m, n \in \boldsymbol{Z}$, $m \geq 0$, $n \geq 0$),

$\int \operatorname{tg}^n x dx$, $\int \operatorname{ctg}^n x dx$ ($n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$).

3. Интегралы вида $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$,

$\int \sin mx \sin nx dx$ ($m, n \in \boldsymbol{R}$).

4. Интегралы вида $\int R(e^x)dx$.

1. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

Через $R(u, v, w, ...)$ обозначается *рациональная функция* относительно $u, v, w, ...$ т.е. выражение, которое получено из любых величин $u, v, w, ...$, а также действительных чисел с помощью четырех арифметических действий.

Будем рассматривать интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x)dx,$$

при условии, что они не являются табличными.

Вычислить их можно различными методами путем преобразования подынтегрального выражения с помощью тригонометрических формул, применения методов «подведения» множителя под знак дифференциала и замены переменной или интегрирования по частям.

Для вычисления интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ существует общая универсальная схема вычисления, основанная на ***универсальной тригонометрической подстановке*** $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$. Этой подстановкой интеграл преобразуется в интеграл от рациональной функции переменной t, который, всегда выражается в элементарных функциях.

Пусть $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$. Тогда выражения для $\sin x$, $\cos x$ и dx через t следующим образом:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Подставляя в подынтегральное выражение вместо $\sin x$, $\cos x$ и dx их значения, выраженные через переменную t, имеем

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Подынтегральная функция рациональна относительно t.

С помощью универсальной подстановки удобно вычислять интегралы вида

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + C}.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$.

Решение. Подынтегральная функция рационально зависит от $\sin x$ и $\cos x$. Применяя универсальную тригонометрическую подстановку $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$, получим:

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\cdot\frac{2t}{1+t^2} + 3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} =$$

$$=2\int\frac{dx}{2t^2+8t+8}=\int\frac{d(t+2)}{(t+2)^2}=-\frac{1}{t+2}+c=\left[tg\frac{x}{2}=t\right]=$$

$$=-\frac{1}{tg\frac{x}{2}+2}+C.$$

Замечание. Хотя универсальная подстановка всегда позволяет вычислить интегралы вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$, однако ее используют сравнительно редко, так как она часто приводит к интегрированию громоздких рациональных дробей. Поэтому в ряде случаев более удобно использовать частные подстановки.

А. Если подынтегральная функция *нечетна* относительно $\sin x$:

$$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x),$$

то применяется подстановка $\cos x=t$.

Б. Если подынтегральная функция *нечетна* относительно $\cos x$:

$$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x),$$

то используют подстановку $\sin x=t$.

В. Если подынтегральная функция *четна* относительно $\sin x$ и $\cos x$:

$$R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x),$$

то применяется подстановка $\operatorname{tg} x=t$.

Пример. Вычислить интеграл $\int\frac{\sin x-\sin^3 x}{\cos 2x}dx$.

Решение. Подынтегральная функция является нечетной относительно $\sin x$. Поэтому применяем подстановку $\cos x=t$. Тогда получим

$$\int\frac{\sin x-\sin^3 x}{\cos 2x}dx=\left[\begin{array}{l}t=\cos x,\ \sin^2 x=1-t^2,\\ \cos 2x=2\cos^2 x-1=2t^2-1,\\ dt=-\sin xdx\Rightarrow dx=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}dt=\\ =-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt\end{array}\right]=$$

$$=\int\frac{\sqrt{1-t^2}-\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}{2t^2-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)dt=\int\frac{t^2-2}{2t^2-1}dt=\frac{1}{2}\int\frac{2t^2-4}{2t^2-1}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int dt-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{2t^2-1}=\frac{t}{2}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\int\frac{d\left(2\sqrt{2}t\right)}{\left(2\sqrt{2}t\right)^2-1}=\frac{t}{2}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}t-1}{\sqrt{2}t+1}\right|+C=$$

$$=[t=\cos x]=\frac{\cos x}{2}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right|+C.$$

2. Интегралы вида $\int\sin^n x\cos^m xdx$ ($m,n\in\boldsymbol{Z}$, $m\ge 0$, $n\ge 0$), $\int\operatorname{tg}^n xdx$, $\int\operatorname{ctg}^n xdx$ ($n\in\boldsymbol{N}$, $n>1$).

Интегралы вида $\int\sin^n x\cos^m xdx$ ***(***$m,n\in\boldsymbol{Z}$, $m\ge 0$, $n\ge 0$***).*** Если хотя бы одно из чисел m или n – нечетное, то, отделяя от нечетной степени один сомножитель и выражая с помощью формулы $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ оставшуюся четную степень через кофункцию, приходим к табличному интегралу.

Если же m и n – *четные* числа, то степени понижаются посредством перехода к двойному аргументу с помощью тригонометрических формул:

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},\ \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\ \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

Пример. Вычислить интегралы

$$1)\int\cos^2 x\sin xdx;\qquad 2)\int\cos^2 x\sin^2 xdx.$$

Решение.

1) $\int \cos^2 x \sin x dx = -\int \cos^2 x d(\cos x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + C$.

2) $\int \cos^2 x \sin^2 x dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x) dx =$

$= \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x dx = \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$.

Интегралы вида $\int \mathrm{tg}^n x dx$, $\int \mathrm{ctg}^n x dx$ ***(*** $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$***).*** Данные интегралы вычисляются подстановками $\mathrm{tg}\, x = t$ и $\mathrm{ctg}\, x = t$ соответственно.

Если $t = \mathrm{tg}\, x$, то $x = \mathrm{arctg}\, t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Тогда

$$\int \mathrm{tg}^n x dx = \int \frac{t^n}{1+t^2} dt.$$

Последний интеграл при $n \ge 2$ является интегралом от неправильной рациональной дроби, которая вычисляется по правилу интегрирования рациональных дробей.

Аналогично если $t = \mathrm{ctg}\, x$, то $x = \mathrm{arcctg}\, t$, $dx = -\frac{dx}{1+t^2}$.

Откуда

$$\int \mathrm{ctg}^n x dx = -\int \frac{t^n}{1+t^2} dt.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \mathrm{tg}^2 x dx$.

Решение. Имеем

$$\int \mathrm{tg}^2 x dx = \begin{bmatrix} \mathrm{tg}\, x = t; \\ x = \mathrm{arctg}\, t; \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{t^2 dt}{1+t^2} = \int \frac{t^2+1-1}{1+t^2} dt = \int dt - \int \frac{1}{1+t^2} dt =$$

$$= t + \mathrm{arctg}\, t + C = [t = \mathrm{tg}\, x] = \mathrm{tg}\, x + \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x) + C = \mathrm{tg}\, x + x + C.$$

3. Интегралы вида $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$ **(** $m, n \in \boldsymbol{R}$ **).**

Данные интегралы вычисляются путем разложения подынтегральной функции на слагаемые по формулам:

$$\int \sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x),$$

$$\int \cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x),$$

$$\int \sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x).$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \sin 2x \cdot \cos 5x dx$.

Решение. Имеем

$$\int \sin 2x \cdot \cos 5x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 7x + \sin(-3x)) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 7x dx - \frac{1}{2}\int \sin 3x dx = -\frac{1}{14}\cos 7x + \frac{1}{6}\cos 3x + C.$$

4. Интегралы вида $\int R(e^x) dx$**.**

Интегралы данного вида сводятся к интегралам от рациональных функций подстановкой $t = e^x$. При этом $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{e^{3x} dx}{e^{2x}+1}$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{e^{3x} dx}{e^{2x}+1} = \begin{bmatrix} t = e^x, \\ x = \ln t,\ dx = \frac{dt}{t} \end{bmatrix} = \int \frac{t^3 \cdot \frac{dt}{t}}{t^2+1} = \int \frac{t^2 dt}{t^2+1} = \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt =$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt = t - \mathrm{arctg}\, t + C = [t = e^x] = e^x - \mathrm{arctg}(e^x) + C.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Как вычисляются интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$? Какие возможны частные случаи?

2. Как вычисляются интегралы вида $\int \sin^n x \cos^m x dx$ ($m, n \in \boldsymbol{Z}$, $m \geq 0$, $n \geq 0$), $\int \operatorname{tg}^n x dx$, $\int \operatorname{ctg}^n x dx$ ($n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$)?

3. Какие формулы используются при вычислении интегралов вида $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$ ($m, n \in \boldsymbol{R}$)?

4. Какая подстановка применяется при вычислении интегралов вида $\int R(e^x)dx$.