Лекция 3.
ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЕЙ

1. Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \ldots\right)dx$ (m_1, n_1, m_2, n_2 – целые числа).

2.Интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right)dx$ (m_1, n_1, m_2, n_2, … – целые числа).

3. Интегралы вида $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $I_2 = \int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $I_3 = \int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

4. Интеграл от дифференциального бинома $\int x^m \left(a+bx^n\right)^p dx$ ($m, n, p \in \mathbf{Q}$, a, $b \in \mathbf{R}$).

1. Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \ldots\right)dx$ (m_1, n_1, m_2, n_2, … – целые числа).

В данных интегралах подынтегральная функция рациональна относительно переменной интегрирования и радикалов от x. Они вычисляются подстановкой $x = t^s$, где s – общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$, …. При такой замене переменной все отношения $\frac{m_1}{n_1} = r_1$, $\frac{m_2}{n_2} = r_2$, … являются целыми числами, т.е. интеграл приводится к рациональной функции от переменной t:

$$\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \ldots\right)dx = \int R\left(t^s, t^{r_1}, t^{r_2}, \ldots\right) s t^{s-1} dt .$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$.

Решение. Имеем:

$$\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx = \left[\begin{array}{l} x = t^4, \\ dx = 4t^3 dt \end{array}\right] = \int \frac{1+t}{t^4+t^2} 4t^3 dt = 4\int \frac{t^2+t}{t^2+1} dt =$$
$$= 4\int\left(1 + \frac{t-1}{t^2+1}\right)dt = 4\int\left(1 + \frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1}\right) = 4t + 2\ln\left(t^2+1\right) -$$
$$-4\operatorname{arctg} t + C = \left[t = \sqrt[4]{x}\right] = 4\sqrt[4]{x} + 2\ln\left(\sqrt[2]{x}+1\right) - 4\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x} + C .$$

2. Интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2/n_2}, \ldots\right)dx$ (m_1, n_1, m_2, n_2, … – целые числа).

Данные интегралы подстановкой

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^s ,$$

где s – общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$, …, сводятся к рациональной функции от переменной t.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^3} - \sqrt{2x+1}}$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^3} - \sqrt{2x+1}} = \left[\begin{array}{l} 2x+1 = t^6, \\ x = \frac{1}{2}\left(t^6-1\right), \\ dx = 3t^5 dt \end{array}\right] = \int \frac{3t^5 dt}{t^4 - t^3} = 3\int \frac{t^2 dt}{t-1} =$$
$$= 3\int \frac{t^2-1+1}{t-1}dt = 3\int\left(t+1-\frac{1}{t-1}\right)dt =$$
$$= \frac{3}{2}t^2 + 3t + 3\ln|t-1| + C = \left[t = \sqrt[6]{2x+1}\right] =$$
$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1} + 3\sqrt[6]{2x+1} + 3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1} - 1\right| + C .$$

3. Интегралы вида $I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $I_2=\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $I_3=\int\frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

1) Для вычисления интеграла I_1 выделяется полный квадрат под знаком радикала:

$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{2a^2}\right)\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right)$$

и применяется подстановка

$$x+\frac{b}{2a}=u,\ dx=du.$$

В результате этот интеграл сводится к табличному:

$$I_1=\int\frac{du}{\sqrt{u^2\pm k^2}}.$$

2) В числителе интеграла I_2 выделяется дифференциал выражения, стоящего под знаком радикала, и этот интеграл представляется в виде суммы двух интегралов:

$$I_2=\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{A}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\left(B-\frac{A}{2a}\right)I_1=$$

$$\frac{A}{2a}\int\frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1=$$

$$=\frac{A}{2a}\sqrt{\left(ax^2+bx+c\right)}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1,$$

где I_1 – вычисленный выше интеграл.

3) Вычисление интеграла I_3 сводится к вычислению интеграла I_1 подстановкой:

$$x=\frac{1}{u},\ dx=-x=\frac{1}{u^2}du.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Имеем

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}=\begin{bmatrix}x-1=\frac{1}{t},\\ dx=-\frac{1}{t^2}dt\end{bmatrix}=\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{1-\left(\frac{1}{t}+1\right)^2}}=$$

$$=-\int\frac{\sqrt{t^2}\,dt}{t\sqrt{-1-2t}}=-\int\frac{|t|dt}{t\sqrt{-1-2t}}=\begin{bmatrix}|x|<1\Rightarrow x-1<0\\ \Rightarrow\ t<0\end{bmatrix}=$$

$$=-\int\frac{-t\,dt}{t\sqrt{-1-2t}}=\int\frac{dt}{\sqrt{-1-2t}}=\int(-1-2t)^{-\frac{1}{2}}dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\int(-1-2t)^{-\frac{1}{2}}d(-1-2t)=-(-1-2t)^{\frac{1}{2}}+C=\left[t=\frac{1}{x-1}\right]=$$

$$=-\left(-1-2\frac{1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}+C=C-\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

4. Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$.

Частные случаи вычисления интегралов данного вида рассмотрены в предыдущем пункте. Иногда для вычисления данного интеграла используются тригонометрические подстановки.

Квадратный трехчлен ax^2+bx+c путем выделения полного квадрата и замены переменной можно представить в виде $u^2\pm k^2$. Таким образом, достаточно ограничиться рассмотрением трех видов интегралов:

$$I_1=\int R\left(u,\sqrt{k^2-u^2}\right)du,$$

$$I_2=\int R\left(u,\sqrt{k^2+u^2}\right)du,$$

$$I_3=\int R\left(u,\sqrt{u^2-k^2}\right)du.$$

Интеграл $I_1=\int R\left(u,\sqrt{k^2-u^2}\right)du$ подстановкой $u=k\sin t$ (или $u=k\cos t$) сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin t$ и $\cos t$.

Интеграл $I_2=\int R\left(u,\sqrt{k^2+u^2}\right)du$ подстановкой $u=k\,\mathrm{tg}\,t$ (или $u=k\,\mathrm{ctg}\,t$) сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin t$ и $\cos t$.

Интеграл $I_3=\int R\left(u,\sqrt{u^2-k^2}\right)du$ подстановкой $u=k\sec t$ (или $u=k\,\mathrm{cosec}\,t$) сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin t$ и $\cos t$.

Пример. Вычислить интеграл $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$.

Решение. Имеем

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\begin{bmatrix}x=a\cos t;\\ dx=-a\sin tdt\end{bmatrix}=\int\sqrt{a^2-a^2\cos^2 t}(-a)\sin tdt=$$

$$=-a^2\int\sqrt{1-\cos^2 t}\sin t=a^2\int\sin^2 tdt=\frac{a^2}{2}\int(1-\cos 2t)dt=$$

$$=\left[t=\arccos\frac{x}{a}\right]=\frac{a^2}{2}\left(\arccos\frac{x}{a}-\frac{1}{4}2\sin\left(\arccos\frac{x}{a}\right)\cos\left(\arccos\frac{x}{a}\right)\right)+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a}-\frac{a^2x}{2a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

5. Интегралы вида $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ ($m,n,p\in\boldsymbol{Q}$, a, $b\in\boldsymbol{R}$).

Интегралы вида $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ ($m,n,p\in\boldsymbol{Q}$, a, $b\in\boldsymbol{R}$), называются ***интегралами от дифференциального бинома*** $x^m\left(a+bx^n\right)^p$. Эти интегралы выражаются через элементарные функции только в следующих трех случаях:

1) если $p\in\boldsymbol{Z}$, то используется подстановка

$$x=t^s,$$

где s – общий знаменатель дробей m и n;

2) если $\frac{m+1}{n}\in\boldsymbol{Z}$, то используется подстановка

$$a+bx^n=t^s,$$

где s – знаменатель дроби $p=\frac{k}{s}$;

3) если $\frac{m+1}{n}+p\in\boldsymbol{Z}$, то используется подстановка

$$ax^{-n}+b=t^s,$$

где s – знаменатель дроби $p=\frac{k}{s}$.

Во всех остальных случаях, как было показано П.Л. Чебышевым, интегралы от дифференциального бинома не выражаются через элементарные функции.

Пример. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$.

Решение. Имеем

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}=\begin{bmatrix}p=-\frac{3}{2}\notin\mathbf{Z};m=-2;n=2;\\ \frac{m+1}{n}=-\frac{1}{2}\notin\mathbf{Z};\frac{m+1}{n}+p=-2\in\mathbf{Z};\\ t^2=x^{-2}+1;x=\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{2}};dx=-\frac{1}{2}\left(t^2-1\right)^{-\frac{3}{2}}2tdt\end{bmatrix}=$$

$$=-\int\left(t^2-1\right)\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(t^2-1\right)^{-\frac{3}{2}}tdt=-\int\frac{t^2-1}{t^2}dt=-\int dt+\int t^{-2}dt=$$

$$= -t - \frac{1}{t} + c = \left[t = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right] = -\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} + C.$$

Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции. Элементарные функции, интегралы от которых выражаются через элементарные функции, образуют *класс интегрируемых в конечном виде функций.* Известно, что любая непрерывная на множестве X функция $f(x)$ имеет первообразную, т.е. существует такая функция $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$. Однако не всякую первообразную $F(x)$ можно выразить через конечное число элементарных функций. Ниже приводятся примеры интегралов, которые не выражаются через элементарные функции:

$\int e^{-x^2} dx$ *– интеграл Пуассона,*

$\int \frac{\sin x}{x} dx$ *– интегральный синус,*

$\int \frac{\cos x}{x} dx$ *– интегральный косинус,*

$\int \frac{dx}{\ln x}$ *– интегральный логарифм,*

$\int \cos(x^2) dx$, $\int \sin(x^2) dx$ *– интегралы Френеля,*

$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}$ *– эллиптический интеграл первого рода,*

$\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}\, dx$ *– эллиптический интеграл второго рода.*

Каждый из приведенных выше интегралов представляет собой функцию, не являющуюся элементарной.

Вопросы для самоконтроля

1. Как интегрируются интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \ldots\right) dx$, где m_1, n_1, m_2, n_2 – целые числа?

2. Какая используется подстановка при интегрировании интегралов вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right) dx$ (m_1, n_1, m_2, n_2, … – целые числа)?

3. Как интегрируются следующие интегралы $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, $I_2 = \int \frac{(Ax + B)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, $I_3 = \int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}}$?

4. В каких случаях можно вычислить интеграл от дифференциального бинома $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ ($m, n, p \in \mathbf{Q}$, a, $b \in \mathbf{R}$)?

5. Существуют ли интегралы, которые не выражаются через элементарные функции?