Лекция 6. ТЕОРЕМА ТЕЙЛОРА

1. Формула Тейлора с остаточным членом в виде Лагранжа.
2. Формула Тейлора с остаточным членом в виде Пеано.
3. Пример разложения функции по формуле Тейлора.

1. Формула Тейлора.

В математическом анализе формула Тейлора – одна из важнейших; она имеет много теоретических приложений и является основой приближенных вычислений.

Известно, что наиболее простыми функциями в смысле вычисления их значений являются многочлены. Возникает вопрос о возможности аппроксимации функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 многочленом степени n:

$$P_n(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+\ldots+b_n(x-x_0)^n .$$

Определение 1. Функция

$$\phi(x;x_0)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n ,$$

называется ***многочленом Тейлора*** для функции $y=f(x)$.

Теорема 1 (формула Тейлора). *Если функция $y=f(x)$ определена и $n+1$ раз дифференцируема в окрестности $U(\delta;x_0)$, то при $x\to x_0$ имеет место формула*

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ *– остаточный член в форме Лагранжа,* $\xi\in U(\delta;x_0)$.

► Пусть функция $y=f(x)$, определенная в некоторой окрестности $U(\delta;x_0)$ точки x_0, имеет в этой точке $(n+1)$ производных $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $f'''(x_0)$, …, $f^{(n)}(x_0)$, $f^{(n+1)}(x_0)$.

Обозначим $R_{n+1}(x)=f(x)-\phi(x;x_0)$.

Зафиксируем $x\in U(\delta;x_0)$, причем такое, что $x>x_0$. И пусть t – переменная, изменяющаяся в пределах $x_0\le t\le x$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t)=f(x)-\phi(x;t)-\frac{(x-t)^{n+1}R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=$$
$$=f(x)-f(t)-f'(t)(x-t)-\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2-\ldots-\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n-$$
$$-\frac{(x-t)^{n+1}R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} .$$

Эта функция на отрезке $[x_0;x]$ удовлетворяет условиям теоремы Роля:

1) $F(t)$ непрерывна на $[x_0;x]$,
2) $F(t)$ дифференцируема на $(x_0;x)$,
3) $F(x_0)=F(x)$, так как

$$F(x_0)=f(x)-\phi(x;x_0)-\frac{(x-x_0)^{n+1}R_{n+1}(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}}=0 ,$$
$$F(x)=f(x)-\phi(x;x)-\frac{(x-x)^{n+1}R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=0 .$$

Следовательно, существует точка $\xi\in(x_0;x)$ такая, что $F'(\xi)=0$.

Найдем производную функции $F(t)$:

$$F'(t)=\left(f(x)-\phi(x;t)-\frac{(x-t)^{n+1}R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}}\right)_t'=$$
$$=-f'(t)-f''(t)(x-t)+f'(t)-\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2+\frac{f''(t)}{2!}(x-t)\cdot 2-\ldots$$
$$-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+\frac{(n+1)(x-t)^n R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} .$$

Отсюда

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{(n+1)(x-t)^n R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}}.$$

Тогда при $t = \xi$ получим

$$-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + \frac{(n+1)(x-\xi)^n R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = 0.$$

Разрешая относительно $R_{n+1}(x)$, имеем

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \blacktriangleleft$$

Выражение $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ называется ***остаточным членом в виде Лагранжа***.

Замечания. 1. Если положить $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$, $0<\theta<1$, то получим

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

2. В более краткой записи формула Тейлора запишется как:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

2. Формула Тейлора с остаточным членом в виде Пеано.

Положим $x - x_0 = \Delta x$. Тогда формула Тейлора запишется в виде:

$$f(x+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta\Delta x)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1}.$$

При $n=0$ получается формула Лагранжа:

$$f(x+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x.$$

Если $f^{(n+1)}(x)$ ограничена в окрестности точки x_0, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}{(x-x_0)^n} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0) = 0.$$

Значит, $R_{n+1}(x) = o((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$ или $R_{n+1}(x) = o(\Delta x^n)$.

Поэтому формулу Тейлора можно записать в виде:

$$f(x+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + o((\Delta x)^n).$$

Выражение $R_{n+1} = o((\Delta x)^n)$ называется ***остаточным членом в виде Пеано***.

В более краткой форме записи имеем

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o(\Delta x^n).$$

3. Пример разложения функции по формуле Тейлора .

Пример. Аппроксимировать функцию $y = \ln x$ многочленом n-й степени в окрестности точки $x_0 = 1$ и оценить погрешность.

Решение. Находим последовательно $n+1$ производную для данной функции:

$f(x) = \ln x$, $\quad f(1) = \ln 1 = 0$,

$f'(x) = \frac{1}{x}$, $\quad f'(1) = 1$,

$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $\quad f''(1) = -1$,

$f^{(3)}(x) = \frac{1\cdot 2}{x^3}$, $\quad f^{(3)}(x) = \frac{1\cdot 2}{1^3} = 2!$,

$f^{(4)}(x) = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4}$, $\quad f^{(4)}(x) = -3!$,

....,

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}, \qquad f^{(n)}(1)=(-1)^{n-1}(n-1)!,$$

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Тогда формула Тейлора для функции $y=\ln x$ в окрестности точки $x_0=1$ примет вид

$$\ln x = 0+1\cdot(x-1)+\frac{-1}{2}(x-1)^2+\frac{2!}{3!}(x-1)^3+\frac{-3!}{4!}(x-1)^4+\ldots$$

$$+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}(x-1)^n+R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x)=(-1)^n\frac{n!}{\xi^{n+1}}(x-1)^{n+1}$, $\xi\in U(\delta;1)$.

Преобразуя полученное выражение, имеем

$$\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}+R_{n+1}(x).$$

Для аппроксимации функции $y=\ln x$ многочленом n-й степени запишем:

$$\ln x\approx(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}.$$

Погрешность вычислений составит

$$R_{n+1}(x)=(-1)^n\frac{n!}{\xi^{n+1}}(x-1)^{n+1},$$

где $\xi=1+\theta(x-1)$, $0<\theta<1$.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте и докажите формула Тейлора с остаточным членом в виде Лагранжа.
2. Какой вид имеет формула Тейлора с остаточным членом в виде Пеано?