Лекция 10. ВЕКТОРНЫЕ ФУНКЦИИ

1. Понятие векторной функции. Годограф.
2. Предел и непрерывность векторной функции.
3. Производная и дифференциал векторной функции.
4. Геометрический и физический смысл производной вектор-функции.

1. Понятие векторной функции. Годограф .

В курсе математики и ее многочисленных приложениях часто приходится иметь дело не только с числовыми функциями, но и с функциями, у которых область определения D или множество значений E состоят из элементов другой природы, например $D \subset \mathbf{R}$, а E – подмножество множества векторов.

О п р е д е л е н и е 1. ***Векторной функцией*** действительного аргумента (***вектор-функцией скалярного аргумента***) называется отображение, которое каждому действительному числу $t \in T \subset \mathbf{R}$ ставит в соответствие один и только один вектор $\vec{a}$ трехмерного пространства $\mathbf{R}^3$.

Обозначается: $\vec{a} = \vec{a}(t)$, $t \in T$.

Различным значениям $t \in T$ соответствуют разные значения вектор-функции, т.е. вектор $\vec{a} = \vec{a}(t)$ имеет определенную длину (модуль) и определенное направление. Следовательно, вектор $\vec{a} = \vec{a}(t)$ может изменяться как по величине, так и по направлению.

Выберем общую точку приложения O векторов $\vec{a} = \vec{a}(t)$ (рис.1). При непрерывном изменении аргумента t конец вектора $\vec{a} = \vec{a}(t)$ описывает некоторую линию Γ.

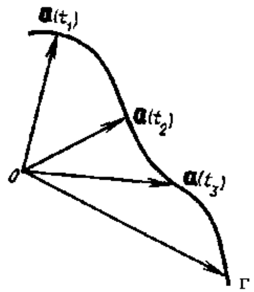

Рис.1.

О п р е д е л е н и е 2. Линия Γ описываемая в пространстве концом вектора $\vec{a}$ при непрерывном изменении аргумента $t \in T \subset \mathbf{R}$, называется ***годографом*** вектор-функции скалярного аргумента $\vec{a}(t)$.

С физической точки зрения годограф вектор-функции можно рассматривать как траекторию движущейся в пространстве материальной точки, а всякую линию Γ, в пространстве как годограф некоторой вектор-функции.

Замечания. 1. Если вектор $\vec{a} = \vec{a}(t)$ изменяется только по длине, а его направление остается постоянным, то $\{\vec{a}(t) \mid t \in T\}$ есть множество связанных векторов, расположенных на луче, выходящем из точки O . Годографом такой вектор-функции является луч Γ (рис.2), если $T = \mathbf{R}$.

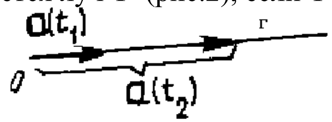

Рис.2.

2. Если при изменении t модули векторов $\vec{a} = \vec{a}(t)$ не меняются, а изменяется только направление, то векторы из множества $\{\vec{a}(t) \mid t \in T\}$ будут находиться в шаре радиусом $|\vec{a}(t)|$ с центром в точке O . Годографом такой функции является линия, принадлежащая сфере радиусом $|\vec{a}(t)|$ (рис.3).

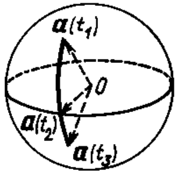

Рис.3.

Пусть в пространстве $\mathbf{R}^3$ задана прямоугольная система координат $Oxyz$. Тогда задание вектор-функции означает задание координат вектора $\vec{a}(t)$. Если начало вектора $\vec{a}(t)$ совпадает с точкой O, то $\vec{a}=\vec{a}(t)$ называется ***радиусом-вектором*** точки M и обозначается $\vec{r}(t)$ (рис.4).

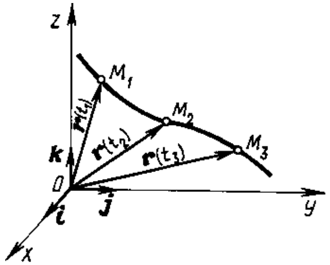

Рис.4.

Любой радиус-вектор $\vec{r}(t)=\overrightarrow{OM}$ пространства $\mathbf{R}^3$ задается своими координатами $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ (координаты вектора совпадают с координатами точки $M\in\Gamma$ (рис.4)) и может быть разложен по ортам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}.$$

Так как каждой упорядоченной тройке чисел x, y, z соответствует единственный радиус-вектор $\vec{r}=\vec{r}(t)$, то задание вектор-функции эквивалентно заданию трех числовых функций $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$:

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t),\end{cases}$$

где $t\in T$.

Поэтому исследование векторной функции скалярного аргумента сводится к исследованию трех координатных функций $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, определенных на множестве T. В координатной форме вектор-функция запишется в виде

$$\vec{r}(t)=\left(x(t);y(t);z(t)\right).$$

2. Предел и непрерывность векторной функции.

Определение 3. Вектор $\vec{a}$ называется ***пределом*** вектор-функции $\vec{r}(t)$, $t\in T$, в точке $t=t_0$ (или $t\to t_0$), если $\lim\limits_{t\to t_0}\left|\vec{r}(t)-a\right|=0$.

Обозначается: $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{a}$.

Выражение $\left|\vec{r}(t)-a\right|$ задает числовую функцию. Следовательно, понятие предела вектор-функции сводится к понятию предела скалярной функции. Поэтому можно записать:

$$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{a} \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon>0\;\exists\delta>0:\;\forall t\in U(t_0;\delta)\Rightarrow \left|\vec{r}(t)-\vec{a}\right|<\varepsilon.$$

Геометрический смысл предела вектор-функции: если начало всех векторов $\left\{\vec{r}(t)\,\middle|\; t\in T\right\}$ поместить в одну точку, то условие $\left|\vec{r}(t)-\vec{a}\right|<\varepsilon$ означает, что концы всех векторов $\vec{r}(t)$ при $t\in U(t_0;\delta)$ лежат в шаре радиуса ε с центром в конце вектора $\vec{a}$ (рис.5.).

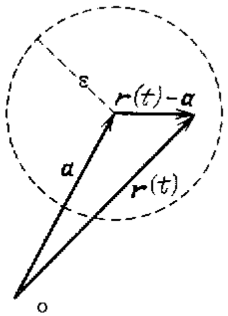

Рис.5.

Теорема 1. *Пусть* $\vec{r}(t)=(x(t);y(t);z(t))$ *и* $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$. *Для того, чтобы* $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{a}$ *, необходимо достаточно, чтобы*

$$\lim_{t\to t_0}x(t)=a_1,\ \lim_{t\to t_0}y(t)=a_2,\ \lim_{t\to t_0}z(t)=a_3.$$

► *Необходимость.*

Из равенства длины вектора

$$\left|\vec{r}(t)-\vec{a}\right|=\sqrt{(x(t)-a_1)^2+(y(t)-a_2)^2+(z(t)-a_3)^2}\ .$$

Отсюда

$$\left|x(t)-a_1\right|\le\left|\vec{r}(t)-\vec{a}\right|,$$
$$\left|y(t)-a_2\right|\le\left|\vec{r}(t)-\vec{a}\right|,$$
$$\left|z(t)-a_3\right|\le\left|\vec{r}(t)-\vec{a}\right|.$$

Если $\left|\vec{r}(t)-\vec{a}\right|\to 0$ при $t\to t_0$, то $\left|x(t)-a_1\right|\to 0$, $\left|y(t)-a_2\right|\to 0$, $\left|z(t)-a_3\right|\to 0$.

Достаточность.

Из $\left|x(t)-a_1\right|\to 0$, $\left|y(t)-a_2\right|\to 0$, $\left|z(t)-a_3\right|\to 0$ при $t\to t_0$ следует, что

$$\left|\vec{r}(t)-\vec{a}\right|=\sqrt{(x(t)-a_1)^2+(y(t)-a_2)^2+(z(t)-a_3)^2}\to 0\ .\ ◄$$

Следствие.

$$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\lim_{t\to t_0}x(t)\vec{i}+\lim_{t\to t_0}y(t)\vec{j}+\lim_{t\to t_0}z(t)\vec{k}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}\ .$$

Таким образом, для того чтобы вычислить предел вектор-функции, достаточно найти соответствующие пределы координат этой функции. Если хотя бы один из пределов координат функции $\vec{r}(t)$ не существует, то не существует и $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)$.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{t\to 2}\vec{r}(t)$, если

$$\vec{r}(t)=(3t+2)\vec{i}+(2t-1)\vec{j}+(1-t)\vec{k}\ .$$

Р е ш е н и е. Согласно определению 4

$$\lim_{t\to 2}\vec{r}(t)=\lim_{t\to 2}(3t+2)\vec{i}+\lim_{t\to 2}(2t-1)\vec{j}+\lim_{t\to 2}(1-t)\vec{k}=8\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}\ .$$

$$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{a}\ \Leftrightarrow\ \lim_{t\to t_0}x(t)=a_1,\ \lim_{t\to t_0}y(t)=a_2,\ \lim_{t\to t_0}z(t)=a_3.$$

Свойства предела векторной функции

1. Если $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{a}$, то $\lim\limits_{t\to t_0}\left|\vec{r}(t)\right|=\left|\vec{a}\right|$.

2. $\lim\limits_{t\to t_0}(\vec{r}_1(t)+\vec{r}_2(t))=\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_1(t)+\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_2(t)$.

3. $\lim\limits_{t\to t_0}(f(t)\cdot\vec{r}(t))=\lim\limits_{t\to t_0}f(t)\cdot\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)$.

4. $\lim\limits_{t\to t_0}(\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t))=\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_1(t)\cdot\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_2(t)$.

5. $\lim\limits_{t\to t_0}(\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(t))=\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_1(t)\times\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_2(t)$.

О п р е д е л е н и е 4. Вектор-функция $\vec{r}(t)$, $t\in T$, называется ***непрерывной*** в точке $t=t_0$, если $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)$.

Очевидно, что векторная функция непрерывна в некоторой точке тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывны ее координатные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

О п р е д е л е н и е 5. Вектор-функция $\vec{\alpha}(t)$, $t\in T$, называется ***бесконечно малой по сравнению со скалярной функцией*** $\beta(t)$, $t\in T$, при $t\to t_0$, если существует векторная функция $\vec{\varepsilon}(t)$, $t\in T$, такая, что в окрестности $U(\delta;t_0)$ имеет место равенство

$$\vec{\alpha}(t)=\vec{\varepsilon}(t)\cdot\beta(t),\ \lim_{t\to t_0}\vec{\varepsilon}(t)=0\ .$$

Обозначается: $\vec{\alpha}(t)=o(\beta(t))$.

О п р е д е л е н и е 6. Вектор-функция $\vec{r}(t)$, $t\in T$ называется ***линейной***, если она имеет вид

$$\vec{r}(t)=\vec{a}\cdot t+\vec{b},$$

где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ какие-либо два фиксированных вектора.

3. Производная и дифференциал векторной функции.

Введем понятие производной вектор-функции $\vec{r}(t)$, $t\in T$ в данной точке t_0. Для этого дадим аргументу t_0 приращение $\Delta t\neq 0$ и рассмотрим вектор $\Delta\vec{r}(t_0)=\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)$. Составим отношение

$$\frac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t}=\frac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

Определение 7. Если существует предел отношения приращения $\Delta\vec{r}(t_0)$ вектор-функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0 к приращению скалярного аргумента Δt при $\Delta t\to 0$, то этот предел называется ***производной вектор-функции*** $\vec{r}(t)$ в точке t_0.

Обозначается: $\vec{r}\,'(t_0)$

$$\vec{r}\,'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

Так как

$$\Delta\vec{r}(t_0)=[x(t_0+\Delta t)-x(t_0)]\vec{i}+[y(t_0+\Delta t)-y(t_0)]\vec{j}+[z(t_0+\Delta t)-z(t_0)]\vec{k}=$$

$$=\Delta x(t_0)\vec{i}+\Delta y(t_0)\vec{j}+\Delta z(t_0)\vec{k},$$

то по определению получим

$$\vec{r}\,'(t_0)=x'(t_0)\vec{i}+y'(t_0)\vec{j}+z'(t_0)\vec{k}.$$

Итак, вычисление производных от векторной функции скалярного аргумента в точке t_0 сводится к вычислению производных ее координат.

Определение 8. Вектор-функция $\vec{r}(t)$, $t\in T$ называется ***дифференцируемой*** в точке $t_0\in T$, если приращение $\Delta\vec{r}(t_0)$ в этой точке представимо в виде:

$$\Delta\vec{r}(t_0)=\vec{a}\cdot\Delta t+o(\Delta t),\ \Delta t\to 0.$$

Линейная вектор-функция $\vec{a}\cdot\Delta t$ приращения аргумента Δt называется ***дифференциалом*** функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0.

Обозначается: $d\vec{r}=\vec{a}\cdot\Delta t$.

Учитывая определение 5, приращение $\Delta\vec{r}(t_0)$ можно записать в виде

$$\Delta\vec{r}(t_0)=\vec{a}\cdot\Delta t+\vec{\varepsilon}(\Delta t)\Delta t,\ \lim_{\Delta t\to 0}\vec{\varepsilon}(\Delta t)=0.$$

Свойства дифференцируемых векторных функций

1. Если векторная функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.

2. Если векторная функция $\vec{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0, то она имеет в этой точке производную и $\vec{r}\,'(t_0)=\vec{a}$.

3. Векторная функция, имеющая в некоторой точке производную, дифференцируема в этой точке.

4. Если $t=t(\tau)$ – дифференцируемая в точке τ_0 скалярная функция, $\vec{r}(t)$ – дифференцируемая в точке $t_0=t(\tau_0)$ векторная функция, то

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau}=\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau}.$$

5. Для произвольных векторных функций имеют место формулы:

$$(\vec{r}_1\pm\vec{r}_2)'=\vec{r}_1\,'\pm\vec{r}_2\,',$$

$$(f\cdot\vec{r})'=f'\cdot\vec{r}+f\cdot\vec{r}\,',$$

$$(\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2)'=\vec{r}_1\,'\cdot\vec{r}_2+\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2\,',$$

$$(\vec{r}_1\times\vec{r}_2)'=\vec{r}_1\,'\times\vec{r}_2+\vec{r}_1\times\vec{r}_2\,'.$$

6. Если вектор-функция $\vec{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0 и векторы $\vec{r}(t)$ имеют одинаковую длину в некоторой окрестности точки t_0, то производная $\vec{r}\,'(t_0)$ ортогональна вектору $\vec{r}(t_0)$:

$$\vec{r}\,'(t_0)\cdot r(t_0)=0.$$

7. Если вектор-функция $\vec{r}(t)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема в каждой точке этого отрезка, то существует такая точка $\xi\in(a;b)$, что

$$|\vec{r}(b)-\vec{r}(a)|\le|\vec{r}\,'(\xi)|\cdot(b-a).$$

4. Геометрический и физический смысл производной вектор-функции.

Геометрический смысл производной вектор-функции. Пусть вектор-функция $\vec{r}(t)$ определена на множестве T, непрерывна в точке $t_0 \in T$ и кривая Γ, – годограф функции $\vec{r}(t)$. И пусть точке $M_0 \in \Gamma$ соответствует значение $\vec{r}(t_0)$, а точке $M_1 \in \Gamma$ – значение $\vec{r}(t_0+\Delta t)$, где $\Delta t \neq 0$. Тогда приращение вектор-функции $\Delta\vec{r}(t_0)=\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)$, представляющее собой разность двух векторов, есть вектор, соединяющий конец вектора уменьшаемого с концом вектора вычитаемого (рис.6).

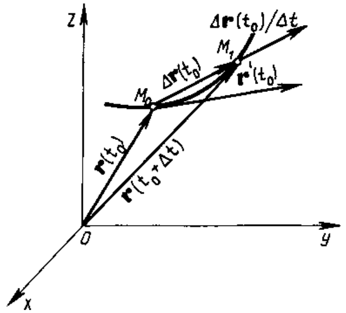

Рис.6.

Отношение $\dfrac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t}$ представляет собой вектор, коллинеарный вектору $\Delta\vec{r}(t_0)$, так как он отличается лишь скалярным множителем.

Таким образом, вектор $\dfrac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t}$ (см. рис.6) совпадает по направлению с секущей M_0M_1. При $\Delta t \to 0$ точка M_1 стремится к M_0, перемещаясь по кривой Γ а секущая M_0M_1 занимает предельное положение, определяемое касательной к годографу Γ в точке M_0. Отсюда следует, что вектор $\vec{r}\,'(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t}$ совпадает по направлению с касательной к годографу в точке M_0 и направлен в сторону возрастания t.

Итак, с **геометрической** точки зрения производная вектор-функции в точке t_0 есть вектор $\vec{r}\,'(t_0)$, направленный по касательной к годографу этой функции в сторону возрастания параметра t.

Физический смысл производной вектор-функции. Предположим, что материальная точка движется по траектории, являющейся годографом вектор-функции $\vec{r}(t)$, где роль параметра t играет время движения. За промежуток времени Δt точка на кривой переместится из положения M_0 в положение M. Вектор $\Delta\vec{r}(t_0)$ задает перемещение материальной точки за время Δt. Отношение $\dfrac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t}$ есть средняя скорость перемещения точки за время Δt. Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим мгновенную скорость v точки в момент времени t_0:

$$v = r'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t}=x'(t_0)\vec{i}+y'(t_0)\vec{j}+z'(t_0)\vec{k}\,.$$

Таким образом, **механический** смысл производной от вектор-функции состоит в том, что $\vec{r}\,'(t_0)$ есть вектор мгновенной скорости перемещения материальной точки по траектории, являющейся годографом функции.

Производная вектор-функции $\vec{r}(t)$ является, в свою очередь, вектор-функцией скалярного аргумента, и ее также можно дифференцировать.

Производная функции $\vec{r}\,'(t)$ точке $t=t_0$ называется ***второй производной*** вектор-функции $r(t)$ по скалярному аргументу t в точке t_0 и обозначается так: $\vec{r}\,''(t_0)$, $\dfrac{d^2\vec{r}(t_0)}{dt^2}$, $\left.\dfrac{d\vec{r}\,'(t_0)}{dt}\right|_{t=t_0}$, $\ddot{r}(t_0)$.

Вектор $\vec{a}(t_0)$, равный производной скорости $\vec{v}(t)$ по времени t в момент t_0, называется ***ускорением***: $\vec{r}\,''(t_0)=\dfrac{dv(t_0)}{dt}=\vec{a}(t_0)$.

Механический смысл второй производной от вектор-функции состоит в том, что $\vec{r}\,''(t_0)$ есть вектор ускорения движения материальной точки в данный момент времени t_0.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение векторной функции и годографа.
2. Дайте определение предела и непрерывности векторной функции. Перечислите свойства предела вектор-функции.
3. Дайте определение производной векторной функции.
4. Какая вектор-функция называется дифференцируемой?
5. Что называется дифференциалом векторной функции?
6. В чем состоит геометрический и физический смысл производной вектор-функции.