Лекция 10. РАВНОМЕРНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

1. Определение равномерной непрерывности функции.
2. Теорема Кантора.

1. Определение равномерной непрерывности функции.

Из множества функций, непрерывных на числовом промежутке, выделяют равномерно-непрерывные функции.

Пусть $f(x)$ – функция, непрерывная на некотором промежутке $X \in \mathbf{R}$ и точка $x_0 \in X$. В силу определения непрерывности функции $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $x \in X$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. В общем случае число δ зависит от ε и x_0. При изменении x_0 в пределах рассматриваемого промежутка при постоянном ε число δ различно для разных x_0. Чем круче идет график функции $f(x)$ в окрестности $U(\delta; x_0)$, тем меньше δ, соответствующее данной точке x_0 (рис.1).

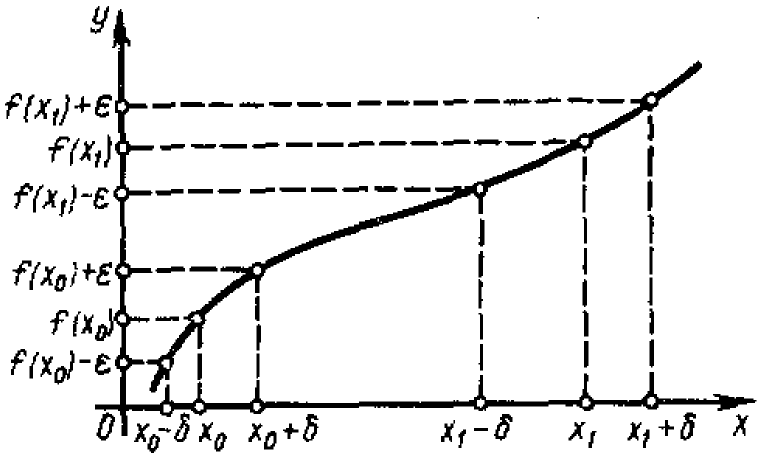

Рис.1.

При заданном ε каждой точке $x \in X$ соответствует некоторое число $\delta > 0$. Возникает вопрос: существуют ли непрерывные функции, определенные на некоторых промежутках, для которых по любому $\varepsilon > 0$ находилось бы $\delta > 0$, не зависящее от x, т.е. оно является общим для всех $x \in X$?

Определение 1. Функция $f(x)$ называется ***равномерно-непрерывной*** на множестве $X \subseteq \mathbf{R}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для любых двух точек x_1, $x_2 \in X$, удовлетворяющих условию $|x_1 - x_2| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Символическая запись:

$f(x)$ *равномерно-непрерывна в точке* x_0 $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \forall x_1, x_2 \in X\ \ |x_2 - x_1| < \delta\ \ |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon .$$

По определению 1 δ зависит только от ε и является общим для всех x_1, $x_2 \in X$.

Очевидно, что равномерно-непрерывная функция $f(x)$ на промежутке X является непрерывной на X. Чтобы в этом убедиться, достаточно положить $x_1 = x$, $x_2 = x_0$. Тогда из определения равномерной непрерывности функции следует определение непрерывной функции в точке x_0.

Обратное утверждение не всегда справедливо. Условие, при котором непрерывная функция является и равномерно-непрерывной, определяется теоремой Кантора о равномерной непрерывности.

Геометрическая иллюстрация равномерной непрерывности функции. Если $f(x)$ равномерно-непрерывна на X, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что прямоугольник со сторонами $\delta(\varepsilon)$ и ε, параллельными осям Ox и Oy, можно переместить вдоль графика (сохраняя параллельность сторон осям координат), что график не пересечет горизонтальных сторон прямоугольника, а будет пересекать только вертикальные стороны (рис.2).

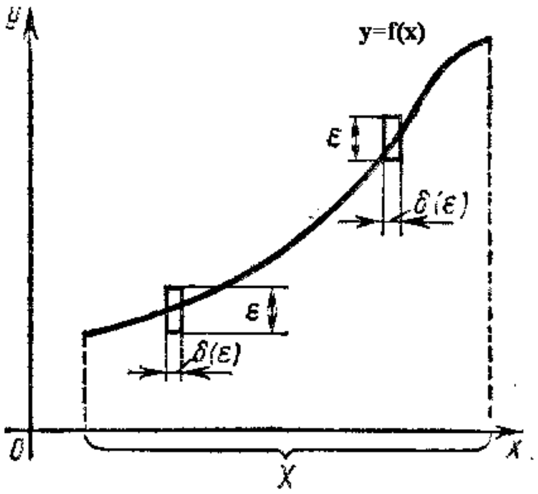

Рис.2.

2. Теорема Кантора.

Теорема 1 (Кантора). *Функция* $f(x)$, *непрерывная на отрезке* $[a;b]$, *равномерно-непрерывна на этом отрезке.*

► *Шаг 1.* Докажем, что если функция $f(x)\in C_{[a;b]}$, то $\forall\varepsilon>0$ отрезок $[a;b]$ можно разбить на конечное число отрезков, любые два из которых или не имеют общих точек, или имеют одну общую граничную точку и на каждом из которых $\forall x_1,x_2$ выполняется неравенство $|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$.

Предположим обратное. Пусть существует $\varepsilon>0$, для которого такое разбиение невозможно. Разделим $[a;b]$ пополам и выберем из полученных отрезков тот, для которого такое разбиение невозможно. Обозначим его $[a_1;b_1]$. Разделим отрезок $[a_1;b_1]$ пополам и выберем из полученных отрезков тот, для которого такое разбиение невозможно. И так далее. Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность вложенных отрезков

$$[a;b]\supset[a_1;b_1]\supset\ldots\supset[a_n;b_n]\supset\ldots,$$

обладающих тем свойством, что ни один из них нельзя разбить на конечное число отрезков, на каждом из которых $\forall x_1,x_2$ выполняется неравенство $|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$.

По теореме о вложенных отрезках существует точка ξ, принадлежащая всем отрезкам. В силу непрерывности функции $f(x)$ в точке ξ, имеем

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0:\ \forall x\in U(\delta;\xi)\qquad |f(x)-f(\xi)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $\forall x_1,x_2\in U(\delta;\xi)$ выполняется неравенство

$$|f(x_2)-f(x_1)|=|f(x_2)-f(\xi)+f(\xi)-f(x_1)|\le$$

$$\le|f(x_2)-f(\xi)|+|f(x_1)-f(\xi)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

В окрестность $U(\delta;\xi)$ при достаточно большом n попадает отрезок $[a_n;b_n]$. Следовательно, $\forall x_1,x_2\in[a_n;b_n]$ выполняется $|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$. Это противоречит выбору последовательности отрезков $([a_n;b_n])_{n=1}^{\infty}$.

Шаг 2. Докажем равномерную непрерывность функции $f(x)$.

Согласно шагу 1 для любого $\varepsilon>0$ существует разбиение $[a;b]$ на конечное число отрезков , в каждом из которых $\forall x_1,x_2\in[a_k;b_k]$, $k=1,2,\ldots,n$, выполняется $|f(x_2)-f(x_1)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Обозначим $\delta=\min\limits_{1\le k\le n}(b_n-a_n)$.

Рассмотрим две любые две точки $x_1,x_2\in[a;b]$ такие, что

$$|x_2-x_1|<\delta.$$

Если $x_1,x_2\in[a_n;b_n]$, то имеем $|f(x_2)-f(x_1)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Если x_1 и x_2 двум соседним отрезкам разбиения, то получим:

$$|f(x_2)-f(x_1)|=|f(x_2)-f(x_0)+f(x_0-)f(x_1)|\le$$

$$\leq |f(x_2)-f(x_0)|+|f(x_0)-f(x_1)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

где x_0 – общая граничная точка соседних отрезков. ◄

Следствие. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что если $[a;b]$ разбить произвольным образом на конечное число отрезков с длинами меньше δ, то на каждом из них колебание ω функции $f(x)$ будет меньше ε.*

Без доказательства.

Замечание. Теорема не верна, если отрезок заменить интервалом.

Пример. Исследовать на равномерную непрерывность функцию $y=x^2$ на $\mathbf{R}$.

Решение. Докажем, что функция не является равномерно непрерывной пользуясь определением равномерной непрерывности. Построим отрицание определения равномерной непрерывности:

$$\exists\varepsilon_0>0:\ \forall\delta>0\ \ \exists x_1,x_2\in\mathbf{R}\quad |x_2-x_1|<\delta$$
$$|f(x_2)-f(x_1)|\geq\varepsilon_0.$$

Возьмем $\varepsilon_0=1$ и $\forall\delta>0$ положим

$$x_1=\frac{1}{\delta}+\frac{\delta}{2},\qquad x_2=\frac{1}{\delta}.$$

Тогда

$$|x_2-x_1|=\left|\frac{1}{\delta}+\frac{\delta}{2}-\frac{1}{\delta}\right|=\frac{\delta}{2}<\delta.$$

При этом

$$|f(x_2)-f(x_1)|=|x_1^2-x_2^2|=|x_1-x_2|\cdot|x_1+x_2|=$$
$$=\frac{\delta}{2}\cdot\left(\frac{2}{\delta}+\frac{\delta}{2}\right)=1+\frac{\delta^2}{4}\geq 1=\varepsilon_0.$$

Это доказывает, что функция $y=x^2$ не является равномерно-непрерывной на $\mathbf{R}$. Однако, данная функция непрерывна на $\mathbf{R}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие функции называются равномерно-непрерывными? Приведите примеры равномерно-непрерывных функций.
2. Сформулируйте и докажите теорему Кантора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Герасимович А.И. Математический анализ: Справочное пособие. В 2 ч.Ч.1., 2. – Мн.: Выш.шк., 1989.
2. Зверович Э.И. Вещественный и комплексный анализ: Учебное пособие: В 6 ч. Ч.1.: Введение в анализ и дифференциальное исчисление. – Мн.: БГУ, 2003.
3. Зорич В.А Математический анализ. Ч.1, ч.2. – М.: Наука, 1981, 1984.
4. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. – М.:Наука, 1985.
5. Кудрявцев. Л.Д. Краткий курс математического анализа: Учебник для вузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 736 с.
6. Математический анализ в вопросах и задачах: учебн. Пособие для вузов / Под ред. Бутузова. – М.: Высш. шк., 1984. – 200с.
7. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т.1, т.2. – М.: Наука, 1990, 1991.
8. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1977.
9. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа: Учеб. пособ. для вузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 816 с.