# 2 Практикум

## *2.1 Вектор-функция*

**Вопросы для самоконтроля**

1 Вектор-функция

Определение вектор-функции. Годограф векторной функции.

2 Предел векторной функции.

Определение предела вектор-функции. Теоремы о пределе суммы, произведения вектор-функций, произведения вектор-функции на скаляр.

3 Непрерывность вектор-функции.

Непрерывность вектор-функции в точке, на отрезке. Теоремы о непрерывности суммы, произведения вектор-функции, произведения вектор-функции на скаляр.

4 Дифференцируемость вектор-функции.

Определение дифференцируемости вектор-функции в точке, на отрезке. Теоремы о дифференцируемости суммы, произведения вектор-функции на скаляр. Параллельность производной вектор-функции касательной к годографу.

**Примеры решения и оформления задач**

***Пример 1*** Доказать, что если $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_i(t)=\vec{a}_i,\ i=1,2$, то имеет место равенство: $\lim\limits_{t\to t_0}(\vec{r}_1(t)+\vec{r}_2(t))=\vec{a}_1+\vec{a}_2$

*Решение.* Согласно определению предела вектор-функции в точке $t_0$ должно выполняться равенство:

$$\lim_{t\to t_0}\left|(\vec{r}_1(t)+\vec{r}_2(t))-(\vec{a}_1+\vec{a}_2)\right|=0$$

Рассмотрим модуль разности:

$$\left|(\vec{r}_1(t)+\vec{r}_2(t))-(\vec{a}_1+\vec{a}_2)\right|=\left|(\vec{r}_1(t)-\vec{a}_1)+(\vec{r}_2(t)-\vec{a}_2)\right|\le$$

$$\le\left|\vec{r}_1(t)-\vec{a}_1\right|+\left|\vec{r}_2(t)-\vec{a}_2\right|.$$



Переходя к пределу при $t\to t_0$ в обеих частях неравенства, имеем:

$$\lim_{t\to t_0}\left|\left(\vec{r}_1(t)+\vec{r}_2(t)\right)-\left(\vec{a}_1+\vec{a}_2\right)\right|\le\lim_{t\to t_0}\left(\left|\vec{r}_1(t)-\vec{a}_1\right|+\left|\vec{r}_2(t)-\vec{a}_2\right|\right)=$$

$$=\lim_{t\to t_0}\left|\vec{r}_1(t)-\vec{a}_1\right|+\lim_{t\to t_0}\left|\vec{r}_2(t)-\vec{a}_2\right|=0$$

Таким образом, $\lim\limits_{t\to t_0}\left|(\vec{r}_1(t)+\vec{r}_2(t))-(\vec{a}_1+\vec{a}_2)\right|=0$

Последнее означает, что $\lim\limits_{t\to t_0}(\vec{r}_1(t)+\vec{r}_2(t))=\vec{a}_1+\vec{a}_2$

***Пример 2*** Вычислить $\vec{a}=\lim\limits_{t\to t_0}(\vec{r}_1(t)+\vec{r}_2'(t))$, если

$\vec{r}_1(t)=t^2\,\vec{i}+t^3\,\vec{j}+t\,\vec{k}$, $\vec{r}_2(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+\sqrt{3}\,t\,\vec{k}$,

$t_0=\dfrac{\Pi}{2}$. Векторы $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ образуют ортонормированный базис.

*Решение.* Найдём $\vec{r}_2'(t)$ :

$$\vec{r}_2(t)=(\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+\sqrt{3}\,t\,\vec{k})'=-\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}+\sqrt{3}\,\vec{k}$$

Поскольку $\lim\limits_{t\to t_0}(\vec{r}_1(t)+\vec{r}_2'(t))=\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_1(t)+\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_2'(t)$, то необходимо вычислить

$\vec{a}_1=\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_1(t)$ и $\vec{a}_2=\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_2'(t)$.

$$\vec{a}_1=\lim_{t\to t_0}\vec{r}_1(t)=\lim_{t\to\frac{\Pi}{2}}(t^2\,\vec{i}+t^3\,\vec{j}+t\,\vec{k})=\frac{\Pi^2}{4}\vec{i}+\frac{\Pi^3}{8}\vec{j}+\frac{\Pi}{2}\vec{k};$$

$$\vec{a}_2=\lim_{t\to t_0}\vec{r}_2'(t)=\lim_{t\to\frac{\Pi}{2}}(-\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}+\sqrt{3}\,\vec{k})=$$

$$=-\sin\frac{\Pi}{2}\vec{i}+\cos\frac{\Pi}{2}\vec{j}+\sqrt{3}\,\vec{k}=-1\,\vec{i}+0\,\vec{j}+\sqrt{3}\,\vec{k}=-\vec{i}+\sqrt{3}\,\vec{k};$$

$$\vec{a}_1=\left(\frac{\Pi^2}{4},\frac{\Pi^3}{8},\frac{\Pi}{2}\right);\ \vec{a}_2=(-1,0,\sqrt{3}).$$

Тогда

$$\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2=\frac{\Pi^2}{4}\vec{i}+\frac{\Pi^3}{8}\vec{j}+\frac{\Pi}{2}\vec{k}-1\vec{i}+\sqrt{3}\vec{k}=$$

$$=\left(\frac{\Pi^2}{4}-1\right)\vec{i}+\frac{\Pi^3}{8}\vec{j}+\left(\frac{\Pi}{2}+\sqrt{3}\right)\vec{k}.$$

*Ответ:* $\vec{a}=\left(\frac{\Pi^2}{4}-1\right)\vec{i}+\frac{\Pi^3}{8}\vec{j}+\left(\frac{\Pi}{2}+\sqrt{3}\right)\vec{k}.$

***Пример 3*** Доказать, что если функции $\vec{r}_i(t), i=1,2$, дифференцируемы в точке $t=t_0$, то дифференцируемо скалярное произведение $\vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t)$, причем

$$(\vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t))'=\vec{r}\,'_1(t)\vec{r}_2(t)+\vec{r}_1(t)\vec{r}\,'_2(t).$$

*Решение.* Действительно,

$$\frac{\vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t)-\vec{r}_1(t_0)\vec{r}_2(t_0)}{t-t_0}=\frac{\vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t)-\vec{r}_1(t_0)\vec{r}_2(t)}{t-t_0}+$$

$$+\frac{\vec{r}_1(t_0)\vec{r}_2(t)-\vec{r}_1(t_0)\vec{r}_2(t_0)}{t-t_0}=$$

$$=\frac{\vec{r}_1(t)-\vec{r}_1(t_0)}{t-t_0}\vec{r}_2(t)+\vec{r}_1(t_0)\frac{\vec{r}_2(t)-\vec{r}_2(t_0)}{t-t_0}.$$

Так как $\vec{r}_1(t)$ и $\vec{r}_2(t)$ дифференцируемы в точке $t_0$ и $\vec{r}_2(t)$ в этой точке непрерывна, то, переходя к пределу при $t\to t_0$, получим:



$$\lim_{t\to t_0}\frac{\vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t)-\vec{r}_1(t_0)\vec{r}_2(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{\vec{r}_1(t)-\vec{r}_1(t_0)}{t-t_0}\vec{r}_2(t)+$$

$$+\lim_{t\to t_0}\vec{r}_1(t_0)\frac{\vec{r}_2(t)-\vec{r}_2(t_0)}{t-t_0}=\vec{r}\,'_1(t_0)\vec{r}_2(t_0)+\vec{r}_1(t_0)\vec{r}\,'_2(t_0).$$

Таким образом,

$$(\vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t))'=\vec{r}\,'_1(t)\vec{r}_2(t)+\vec{r}_1(t)\vec{r}\,'_2(t).$$

***Пример 4*** Найти производную скалярного произведения вектор-функций $\vec{r}_1(t)=3t\,\vec{i}+5t^2\,\vec{j}+7t^3\,\vec{k}$,

$\vec{r}_2(t)=\cos^3 t\,\vec{i}+\sin^3 t\,\vec{j}+\cos 2t\,\vec{k}$ в точке $t_0=\frac{\Pi}{2}$.

*Решение.* Согласно правилам дифференцирования имеем:

$$(\vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t))'=\vec{r}\,'_1(t)\vec{r}_2(t)+\vec{r}_1(t)\vec{r}\,'_2(t).$$

$$\vec{r}\,'_1(t)=3\,\vec{i}+10t\,\vec{j}+21t^2\,\vec{k},$$

$$\vec{r}\,'_2(t)=3\cos^2 t(-\sin t)\,\vec{i}+3\sin^2 t\cos t\,\vec{j}-2\sin 2t\,\vec{k}.$$

Тогда

$$(\vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t))'=(3\,\vec{i}+10t\,\vec{j}+21t^2\,\vec{k})\times$$

$$\times(\cos^3 t\,\vec{i}+\sin^3 t\,\vec{j}+\cos 2t\,\vec{k})+(3t\,\vec{i}+5t^2\,\vec{j}+7t^3\,\vec{k})\times$$

$$\times(-3\cos^2 t\sin t\,\vec{i}+3\sin^2 t\cos t\,\vec{j}-2\sin 2t\,\vec{k})=$$

$$=3\cos^3 t+10t\sin^3 t+21t^2\cos 2t-9t\sin t\cos^2 t+15t^2\sin^2 t\cos t-14t^3\sin 2t.$$

Вычислим значение производной в точке $t_0=\frac{\Pi}{2}$:

$$(\vec r_1(t)\vec r_2(t))'\Big|_{t_0=\frac{\Pi}{2}}=$$

$$=3\cos^3\frac{\Pi}{2}+10\frac{\Pi}{2}\sin^3\frac{\Pi}{2}+21\frac{\Pi^2}{4}\cos\Pi+9\frac{\Pi}{2}(-\sin\frac{\Pi}{2})\cos^2\frac{\Pi}{2}+$$

$$+15\frac{\Pi^2}{4}\sin\frac{\Pi}{2}\cos\frac{\Pi}{2}-14\frac{\Pi^3}{8}\sin^2\frac{\Pi}{2}=5\Pi-\frac{21\Pi^2}{4}=\frac{\Pi(20-21\Pi)}{4}.$$

*Ответ:* $\frac{\Pi(20-21\Pi)}{4}$.

***Пример 5*** Доказать, что для того, чтобы вектор $\vec r(t)$ имел постоянное направление, необходимо и достаточно, чтобы в интервале изменения $t$ $\vec r(t)$ и $\vec r'(t)$ были коллинеарны.

*Решение.* Необходимость.

Пусть $\vec r(t)$ имеет постоянное направление. Тогда $\vec r(t)=\varphi(t)\vec a$, где $\vec a$ некоторый постоянный вектор.

$\vec r'(t)=\varphi'(t)\vec a+\varphi(t)\vec a'=\varphi'(t)\vec a$, т.е. $\vec r(t)\,\|\,\vec r'(t)$.

Достаточность.

Пусть $\vec r(t)$ и $\vec r'(t)$ коллинеарны. Тогда $\vec r'(t)=\varphi'(t)\vec r(t)$. Положим $\vec r(t)=\psi(t)\vec e(t)$, где $|\vec e(t)|=1$.

Дифференцируем последнее равенство

$\vec r'(t)=\psi'(t)\vec e(t)+\psi(t)\vec e'(t)$

или $\varphi'(t)\psi(t)\vec e(t)=\psi'(t)\vec e(t)+\psi(t)\vec e'(t)$.

Умножив скалярно на $\vec e'(t)$, получим $\psi(t)(\vec e'(t))^2=0$.



Так как $\psi(t)\neq 0$, то $(\vec e'(t))^2=0$ и $\vec e(t)$=const, т.е. $\vec e(t)=\vec a$.

Таким образом, $\vec r(t)=\psi(t)\vec a$.
Что и требовалось доказать.

***Пример 6*** Указать какие линии задаются:
а) параметрическими уравнениями

$$x=1+3\cos t,$$
$$y=2-2\sin t,\quad 0\le t\le 2\Pi;$$

б) уравнением в полярных координатах

$$r=\frac{144}{13-5\cos\varphi}.$$

*Решение.*
а) параметрические уравнения преобразуют следующим образом:
$x=1+3\cos t$,
$y=2-2\sin t$,
$\cos t=\frac{x-1}{3}$, $\sin t=\frac{y-2}{-2}$.
Используя основное тригонометрическое тождество, получим:
$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$ – уравнение эллипса с центром в точке $C(1;2)$ и полуосями $a=3, b=2$;

б) приведём данное уравнение $r=\frac{144}{13-5\cos\varphi}$ к виду

$$r=\frac{\rho\varepsilon}{1-\varepsilon\cos\varphi};\quad r=\frac{\frac{144}{5}\cdot\frac{5}{13}}{1-\frac{5}{13}\cos\varphi}.$$

Из этого равенства видно, что $\varepsilon=\frac{5}{13}<1$, т.е. кривая – эллипс. Запишем его каноническое уравнение: $\rho=\frac{144}{13}=\frac{b^2}{c}$, $\varepsilon=\frac{5}{13}=\frac{c}{a}$ и т.к. для эллипса $a^2-c^2=b^2$, то отсюда получаем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} c &= \frac{5a}{13} \\ b^2 &= \frac{144a}{13} \\ a^2 - c^2 &= b^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a^2 &= 169 \\ b^2 &= 144 \\ c^2 &= 25 \end{aligned}$$

Таким образом, каноническое уравнение эллипса есть

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1.$$

*Ответ:* а) $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1$; б) $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1.$

***Пример 7*** Составить параметрическое уравнение циклоиды.

*Решение.* Циклоидой называют линию, являющуюся траекторией фиксированной точки окружности радиуса R, катящейся по прямой.

Указанную прямую примем за ось OX декартовой прямоугольной системы координат. Предположим, что фиксированная точка при начальном положении окружности находилась в начале координат, а после того, как окружность повернулась на угол *t*, заняла положение M (рисунок 2).

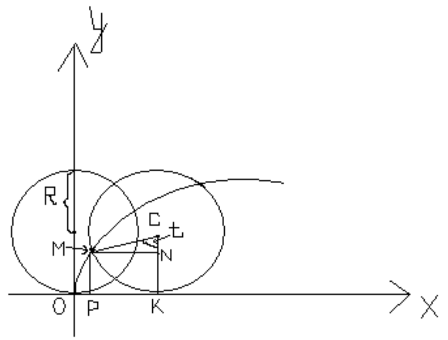


Рисунок 2 – Циклоиды

Поскольку $x = OP = OK - PK$, $y = MP = CK - CN$ и $OK = \overset{\frown}{MK} = Rt$, $PK = MN = R\sin t$, $CK = R$, $CN = R\cos t$, то $x = Rt - R\sin t$, $y = R - R\cos t$, или $x = R(t - \sin t)$, $y = R(1 - \cos t)$.

Полученные уравнения являются параметрическими уравнениями циклоиды.

**Задачи**

**1** Доказать, что вектор $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ является пределом вектор-функции $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ в точке $t_0$ тогда и только тогда, когда его координаты $a_1, a_2, a_3$ являются пределами координатных функций $x(t), y(t), z(t)$ при $t \to t_0$.

**2** Доказать, что если $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_i(t) = \vec{a}_i$, $i=1,2,3;$ $\lim\limits_{t\to t_0} f(t) = \lambda$, то имеют место формулы

2.1 $\lim\limits_{t\to t_0}(\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)) = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$;

2.2 $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)\vec{r}_1(t) = \lambda\vec{a}_1$;

2.3 $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t) = \vec{a}_1\vec{a}_2$;

2.4 $\lim\limits_{t\to t_0}\left[\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)\right] = \left[\vec{a}_1, \vec{a}_2\right]$;

2.5 $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t)\vec{r}_3(t) = \vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

**3** Доказать, что вектор-функция $\vec{r}(t)$ непрерывна в точке $t_0$ тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывны её координатные функции.

**4** Доказать, что если функции $\vec{r}_i(t)$ и *f(t)*, *i=1,2,3* непрерывны в точке $t_0$, то в этой точке непрерывны следующие функции:

4.1 $\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)$;

4.2 $f(t)\vec{r}_1(t)$;

4.3 $\vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t)$;

4.4 $\left[\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)\right]$;

4.5 $\vec r_1(t)\vec r_2(t)\vec r_3(t)$.

**5** Доказать, что вектор-функция $\vec r(t)$ дифференцируема в точке $t_0$ тогда и только тогда, когда в этой точке дифференцируемы её координатные функции. При этом

$$\vec r'(t_0)=x'(t_0)\vec i+y'(t_0)\vec j+z'(t_0)\vec k.$$

**6** Доказать, что если вектор-функции $\vec r_i(t)$, $i=1,2,3$ дифференцируемы, то имеют место следующие формулы:

6.1 $\left[\vec r_1(t),\vec r_2(t)\right]'=\left[\vec r_1'(t),\vec r_2(t)\right]+\left[\vec r_1(t),\vec r_2'(t)\right]$;

6.2 $(\vec r_1(t)\vec r_2(t)\vec r_3(t))'=\vec r_1'(t)\vec r_2(t)\vec r_3+\vec r_1(t)\vec r_2'(t)\vec r_3+$
$+\vec r_1(t)\vec r_2(t)\vec r_3'$.

**7** Вычислить производные в точке $t_0$ следующих функций:

7.1 $\vec r_1(t)\vec r_2(t)$, если $\vec r_1(t)=t\vec i+t^2\vec j+t^3\vec k$,
$\vec r_2(t)=9\cos t\,\vec i+9\sin t\,\vec j+6t\vec k$, $t_0=\dfrac{\Pi}{2}$;

7.2 $\left[\vec r_1(t),\vec r_2(t)\right]$, если $\vec r_1(t)=\cos t\,\vec i+\sin t\,\vec j+\vec k$,
$\vec r_2(t)=t^2\vec i+t^3\vec j+t\vec k$, $t_0=\Pi$;

7.3 $f(t)\vec r''(t)$, если $f(t)=t^3+2t^2+4$,
$\vec r(t)=6\cos t\,\vec i+6\sin t\,\vec j+9t\vec k$, $t_0=\dfrac{\Pi}{3}$;

7.4 $\vec r_1(t)\vec r_2''(t)\vec r_3(t)$, если $\vec r_1(t)=t\vec i+t^2\vec j+t^3\vec k$,
$\vec r_2(t)=\cos t\,\vec i+\sin t\,\vec j+\vec k$, $\vec r_3(t)=t^2\vec i+t^3\vec j+t\vec k$, $t_0=\dfrac{\Pi}{6}$;



7.5 $(\vec r_1(t)-\vec r_2(t))'$, если $\vec r_1(t)=cht\,\vec i+sht\,\vec k$,
$\vec r_2(t)=ch^2t\,\vec i+sht\,cht\,\vec j+sh^2t\,\vec k$, $t_0=0$;

7.6 $\vec r_1'(t)+\vec r_2(t)$, если $\vec r_1(t)=3t^2\vec i+2t\vec j+5t\vec k$,
$\vec r_2(t)=2t\vec i-3t^2\vec j+t^3\vec k$, $t_0=1$;

7.7 $\left[\vec r_1''(t),\vec r_2(t)\right]$, если $\vec r_1(t)=5\sin^2 t\,\vec i+4\cos t\sin t\,\vec j+\vec k$,
$\vec r_2(t)=t^2\vec i+t^3\vec j+t\vec k$, $t_0=\dfrac{\Pi}{6}$;

7.8 $(\vec r(t))^2$, если $\vec r(t)=2t\vec i+3t^2\vec j-7t^3\vec k$, $t_0=1$.

**8** Вычислить:

8.1 $\lim\limits_{t\to t_0}\vec r_1(t)\vec r_2''(t)\vec r_3(t)$, если $\vec r_1(t)=t^2\vec i+t^3\vec j+t\vec k$,
$\vec r_2(t)=5\cos t\,\vec i+5\sin t\,\vec j+7t\vec k$, $\vec r_3(t)=t(\vec i+\vec j+\vec k)$, $t_0=\Pi$;

8.2 $\lim\limits_{t\to t_0}\left[\vec r_1''(t),\vec r_2(t)\right]$, если $\vec r_1(t)=3\cos t\,\vec i+3\sin t\,\vec j+4t\vec k$,
$\vec r_2(t)=3\cos^2 t\,\vec i+\sqrt{14}\sin t\cos t\,\vec j+3\sin^2 t\,\vec k$, $t_0=\dfrac{\Pi}{4}$;

8.3 $\lim\limits_{t\to t_0}(\vec r_1'(t)+\vec r_2'(t))$, если $\vec r_1(t)=cht\,\vec i+sht\,\vec k$,
$\vec r_2(t)=ch^2t\,\vec i+sht\,cht\,\vec j+sh^2t\,\vec k$, $t_0=0$;

8.4 $\lim\limits_{t\to t_0}\vec r_1'(t)\vec r_2(t)\vec r_3(t)$, если $\vec r_1(t)=t^2\vec i+t^3\vec j+t\vec k$,
$\vec r_2(t)=t\vec i+t^2\vec j+t^3\vec k$, $\vec r_3(t)=\vec i+\vec j+t\vec k$, $t_0=2$;

8.5 $\lim\limits_{t\to t_0}\left[\vec{r}_1(t),\vec{r}\,'_2(t)\right]$, если $\vec{r}_1(t)=2\cos t\,\vec{i}+2\sin t\,\vec{j}+4t\,\vec{k}$,

$\vec{r}_2(t)=\cos^3 t\,\vec{i}+\sin^3 t\,\vec{j}+\cos 2t\,\vec{k}$, $t_0=\dfrac{\Pi}{4}$;

8.6 $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}\,'_1(t)\,\vec{r}_2(t)$, если $\vec{r}_1(t)=2\sin^2 t\,\vec{i}+2\cos^2 t\,\vec{j}+\sin 2t\,\vec{k}$,

$\vec{r}_2(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+\sqrt{3}\,\vec{k}$, $t_0=\dfrac{\Pi}{2}$;

8.7 $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)\,\vec{r}(t)$, если $f(t)=\ln t+\cos^2 3t$,

$\vec{r}(t)=5\sin^2 t\,\vec{i}+4\sin t\cos t\,\vec{j}+3\cos^2 t\,\vec{k}$, $t_0=\dfrac{\Pi}{4}$.

**9** Найти частные производные первого и второго порядка от следующих функций:

9.1 $\left[\vec{r},\vec{r}_v\right]$;

9.2 $\vec{r}\,\vec{r}_u\,\vec{r}_v$;

9.3 $\vec{r}_v^{\,2}$;

9.4 $\left[\vec{r}_u,\vec{r}_v\right]$;

9.5 $\vec{r}\,\vec{r}_v\,\vec{r}_u$;

9.6 $\vec{r}_u^{\,2}$;

9.7 $\left[\vec{r}_v,\vec{r}\right]$;

9.8 $\vec{r}^{\,2}$, где $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$.



**10** Найти производные по $t$ от следующих функций:

10.1 $\left[\vec{r}\,',\vec{r}\,''\right]$;

10.2 $(\vec{r}\,')^2$;

10.3 $\vec{r}\,'\vec{r}\,''$;

10.4 $\sqrt{\vec{r}^{\,2}}$;

10.5 $\left[\left[\vec{r}\,',\vec{r}\,''\right],\vec{r}\,'''\right]$;

10.6 $\vec{r}\,'\vec{r}\,''\vec{r}\,'''$;

10.7 $\vec{r}^{\,2}$, где $\vec{r}=\vec{r}(t)$.

**11** Доказать, что:

11.1. Если $\vec{r}\,'(t)=0$ для всех $t\in[t_1,t_2]$, то $\vec{r}(t)=const$ в этом промежутке;

11.2 Если $\vec{r}_u=\vec{r}_v=0$ в некоторой области изменения параметров $u$ и $v$, то в этой области $\vec{r}(u,v)=const$;

11.3 Если в некотором интервале $\left|\vec{r}(t)\right|=const$, то $\vec{r}\perp\vec{r}\,'$. Верно ли обратное?

11.4 Если $\left|\vec{r}(u,v)\right|=const$ в некоторой области изменения параметров $u$ и $v$, то $\vec{r}\perp\vec{r}_u$ и $\vec{r}\perp\vec{r}_v$;

11.5 Для того, чтобы вектор $\vec{r}(u,v)$ имел постоянное направление необходимо и достаточно, чтобы в некоторой области изменения параметров $u$ и $v$ $\vec{r}\parallel\vec{r}_u$ и $\vec{r}\parallel\vec{r}_v$;

11.6 Если на некотором отрезке $[t_1, t_2]$ вектор-функция $\vec{r}(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\vec{r}'(t)$, причём $\vec{r} \parallel \vec{r}'$, но $\vec{r}' \neq 0$ и $\vec{r} \neq 0$, то годограф вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ есть отрезок прямой;

11.7 Годограф вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_1 \cos t + \vec{r}_2 \sin t$ есть эллипс, если $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_1$ неколлинеарны. Что будет в случае их коллинеарности?

11.8 Годограф вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_1 ch t + \vec{r}_2 sh t$ есть гипербола, если векторы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ неколлинеарны;

11.9 Если на некотором отрезке $[t_1, t_2]$ вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ непрерывна вместе со своими производными $\vec{r}'(t)$ и $\vec{r}''(t)$, которые отличны от нуля и коллинеарны при всех $t \in [t_1, t_2]$, то годографом вектор-функции $\vec{r}(t)$ является отрезок прямой линии;

11.10 Годограф вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_1 t + \vec{r}_2 t^2$, где $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2$ – постоянные векторы, есть парабола, если векторы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ неколлинеарны. Что будет в случае коллинеарности векторов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$?

11.11 Годограф вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}_0 + \cos u \, \vec{r}_1 + \sin u \, \vec{r}_2 + v \vec{r}_3$, где $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ – постоянные векторы, причём векторы $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ некомпланарны, есть эллиптический цилиндр;

11.12 Годограф вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}_0 + \left(u + \frac{1}{u}\right)\vec{r}_1 + \left(u - \frac{1}{u}\right)\vec{r}_2 + v\vec{r}_3$, где $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ – постоянные векторы, причём векторы $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ некомпланарны, есть гиперболический цилиндр;



11.13 Годограф вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(u,v) = \vec{r}_0 + u \cos v \, \vec{r}_1 + u \sin v \, \vec{r}_2 + u^2 \vec{r}_3$, где $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ – постоянные векторы, причём векторы $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ некомпланарны, есть эллиптический параболоид;

11.14 $x = a\dfrac{1+t^2}{1-t^2}$, $y = b\dfrac{2t}{1-t^2}$ – параметрические уравнения гиперболы, $t \neq \pm 1$;

11.15 Уравнения $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$ и $x = a\dfrac{1+t^2}{1-t^2}$, $y = b\dfrac{2t}{1-t^2}$ представляют одну и ту же линию.

**12** Указать, какие линии задаются:
а) параметрическими уравнениями;
б) уравнениями в полярных координатах;

12.1 а) $x = t^2 - t + 1$, $y = t^2 + t + 1$;
б) $r = 2a\cos\varphi$;

12.2 а) $x = t^2 - 2t + 3$, $y = t^2 - 2t + 1$;
б) $r = \dfrac{b}{\sin\varphi}$;

12.3 а) $x = a\sin^2 t$, $y = b\cos^2 t$;
б) $r = \dfrac{a}{\cos\varphi}$;

12.4 а) $x = \dfrac{a}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \dfrac{at}{\sqrt{1+t^2}}$;
б) $r = \dfrac{16}{3 - 5\cos\varphi}$;

12.5 а) $x = 3^t + 3^{-t}$, $y = 3^t - 3^{-t}$;
б) $r = \dfrac{16}{5 - 3\cos\varphi}$;

12.6 а) $x = \dfrac{a-t}{a+t}$, $y = \dfrac{t}{a+t}$;

б) $r = b\sin t$;

12.7 а) $x = a\dfrac{1+t^2}{1-t^2}$, $y = b\dfrac{2t}{1-t^2}$;

б) $r = \varphi$;

12.8 а) $x = a + R\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = b + R\dfrac{2t}{1+t^2}$;

б) $\varphi = \dfrac{\Pi}{3}$;

12.9 а) $x = 3t - 1$, $y = -2t + 5$;

б) $r = 4\sin 3\varphi$;

12.10 а) $x = 3\cos t + 3$, $y = 3\sin t - 2$;

б) $r = \dfrac{3}{1-\cos 2\varphi}$;

12.11 а) $x = 5 + 4\cos t$, $y = -1 + \sin t$;

б) $r = 2\cos 4\varphi$;

12.12 а) $x = 4\cos 2t$, $y = 3\sin 2t$;

б) $r = \dfrac{3}{1+\cos 2\varphi}$;

12.13 а) $x = 2\sin t$, $y = 3(1-\cos t)$;

б) $r = 2 - \cos 2\varphi$;

12.14 а) $x = \cos t$, $y = 3(2-\sin t)$;

б) $r = \dfrac{2}{2-\cos\varphi}$;

12.15 а) $x = 4\cos t$, $y = 2\sin t$;

б) $r = \dfrac{1}{2-\sin\varphi}$, где $t \in [0;2\Pi]$.

**13** Записать параметрические уравнения следующих линий:

13.1 Дана окружность диаметра $OA=2a$ и касательная к ней в точке $A$. Через точку $O$ проведён луч $OC$ и на нём отложен отрезок $OM$, равный отрезку $BC$, заключённому между окружностью и касательной. Если луч $OC$ вращается вокруг точки $O$, то точка $M$ описывает линию, называемую циссоидой Диоклеса. Уравнение в декартовых координатах имеет вид: $y^2 = \dfrac{x^3}{(2a-x)}$.

13.2 Концы отрезка $AB=a$ скользят по осям прямоугольной системы координат. Прямые $AC$ и $BC$, параллельные осям координат, пересекаются в точке $C$, из которой на $AB$ опущен перпендикуляр $CM$. Линия, описываемая точкой $M$, называется астроидой. Уравнение в прямоугольной системе координат имеет вид: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

13.3 Прямая $x=a$ пересекает ось $OX$ в точке $A$, произвольный луч $OB$ – в точке $B$. На луче по обе стороны от точки $B$ отложены отрезки $BM_1$ и $BM_2$, равные $AB$. Геометрическим местом точек $M_1$ и $M_2$ является строфоида. Уравнение в декартовых координатах: $(x^2+y^2)(x-a)^2 - a^2y^2 = 0$.

13.4 На окружности радиуса $a$ дана точка $O$, вокруг которой вращается луч, пересекающий окружность в переменной точке $A$. На этом луче по обе стороны от точки откладываются отрезки $AM_1 = AM_2 = 2a$. Линия, описываемая точками $M_1$ и $M_2$, называется кардиоидой. В прямоугольной системе координат уравнение кардиоиды имеет вид: $(x^2+y^2+2ax)^2 = 4a^2(x^2+y^2)$.

13.5 Круг радиуса $a$ катиться по прямой без скольжения. Точка $M$ жестко связана с кругом и находится на расстоянии $d$ от его центра $(d<a)$. Линия, описываемая точкой $M$, называется укороченной циклоидой.

13.6 Окружности $x^2+y^2-2ax=0$, приняв за параметр угловой коэффициент прямой, проходящей через начало координат и точку линии.

13.7 Эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

13.8 Параболы $y^2 = 2px$.

13.9 Окружности $x^2+y^2-2ax=0$, приняв за параметр угол между осью $OX$ и прямой, проходящей через центр окружности.

13.10 Гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

## *2.2 Сопровождающий трёхгранник кривой*

**Вопросы для самоконтроля**

1 Касательная кривой. Нормаль плоской кривой.

2 Касательная поверхности. Касательная плоскость поверхности.

3 Нормаль поверхности.

4 Нормаль кривой.

5 Нормальная плоскость кривой.

6 Главная нормаль кривой.

7 Касательная плоскость кривой.

8 Соприкасающая плоскость.

9 Бинормаль.

10 Спрямляющая плоскость.

11 Единичные векторы сопровождающего трёхгранника. Внутренние уравнения кривой на поверхности.

12 Формулы Френе.

13 Кривизна.

14 Кручение. Формулы для вычисления кривизны и кручения.

15 Натуральные уравнения.

**Примеры решения и оформления задач**

***Пример 1*** Написать уравнения касательной и нормали к эллипсу $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ в точке $A\left(4;-\frac{9}{5}\right)$.

*Решение.* Поскольку линия задана неявным уравнением, т.е. $F(x,y)=\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-1$, то уравнение касательной имеет вид:

$(X-x)F'_x+(Y-y)F'_y=0$.

Вычислим частные производные:

$F'_x=\frac{2x}{25}$, $\quad F'_y=\frac{2y}{9}$

их значения в точке $A\left(4;-\frac{9}{5}\right)$:

$\left(F'_x\right)_A=\frac{8}{25}$, $\quad \left(F'_y\right)_A=-\frac{2}{5}$.

Уравнение касательной:

$$(x-4)\frac{8}{25}+\left(y+\frac{9}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)=0 \text{, т.е. } \frac{8x}{25}-\frac{32}{25}-\frac{2y}{5}-\frac{18}{25}=0,$$

$\frac{8x}{25}-\frac{2y}{5}=2$ или $\frac{4x}{25}-\frac{y}{5}=1$, откуда $4x-5y=25$ или $y=\frac{4}{5}x-5$.

Уравнение нормали имеет вид:

$$\frac{X-x}{F'_x}=\frac{Y-y}{F'_y}.$$

Тогда

$$\frac{x-4}{\frac{8}{25}}=\frac{y+\frac{9}{5}}{-\frac{2}{5}},\ -\frac{2}{5}(x-4)=\frac{8}{25}\left(y+\frac{9}{5}\right),\ x-4=\frac{4}{5}y+\frac{36}{25},$$

$\frac{4}{5}y=-x+\frac{64}{25}$ или $y=-\frac{5}{4}x+\frac{16}{5}$.

*Ответ:* $y=\frac{4}{5}x-5$; $y=-\frac{5}{4}x+\frac{16}{5}$.

***Пример 2*** Найти касательную к линии $x=t^2-1$, параллельную прямой $2x\text{-}y+3=0$.

*Решение*. Найдём $x'_t$ и $y'_t$.

$x'_t=2t$, $y'_t=3t^2$.

Искомое уравнение имеет вид:

$$\frac{X-x}{x'_t}=\frac{Y-y}{y'_t}.$$

Тогда $\frac{X-(t^2-1)}{2t}=\frac{Y-(t^3+1)}{3t^2}$ или $3t^2(x-t^2+1)=(y-t^3-1)2t$.

Откуда $y=\frac{3t}{2}x-\frac{t^3}{-2}+\frac{3t}{2}+1$ – уравнение касательной.

Так как касательная параллельна прямой $y=2+3$, то, ввиду условия параллельности двух прямых, имеем:

$2=\frac{3t}{2}$. Следовательно, $t=\frac{4}{3}$.

Тогда уравнение касательной примет вид:

$$y=2x-\frac{64}{54}+2+1=2x+\frac{49}{27}.$$

*Ответ:* $y=2x+\frac{49}{27}$.

***Пример 3*** Дана поверхность $z=x^2-2xy+y^2-x+2y$. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в точке $M(1;1;1)$.

*Решение.* Уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$Z-z=F'_x(X-x)+F'_y(Y-y).$$

Найдём частные производные $F(x,y)=z$.

$$F'_x=\frac{\partial z}{\partial x}=2x-2y-1 \quad\text{и}\quad F'_y=\frac{\partial z}{\partial y}=-2x+2y+2$$

и их значения в точке $M(1;1;1)$:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M=2\cdot1-2\cdot1-1=-1;\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M=-2\cdot1+2\cdot1+2=2.$$

Уравнение касательной плоскости

$z-1=-1(x-1)+2(y-1)$ или $x-2y+z=0$.

Уравнение нормали имеет вид:

$$\frac{X-x}{F'_x}=\frac{Y-y}{F'_y}=\frac{Z-z}{-1}$$

Подставляя значения $F'_x$, $F'_y$ и координаты точки $M$, получим

$$\frac{X-1}{-1}=\frac{Y-1}{2}=\frac{Z-z}{-1}$$

*Ответ:* $x-2y+z=0$; $\frac{X-1}{-1}=\frac{Y-1}{2}=\frac{Z-z}{-1}$.

***Пример 4*** К поверхности $x^2+2y^2+3z^2=11$ провести касательные плоскости, параллельные плоскости $x+y+z=1$.

*Решение*. Здесь $F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 11$.

Найдём частные производные: $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 4y$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 6z$

Из условия параллельности касательной плоскости и данной плоскости следует, что

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{1} = \frac{\frac{dF}{dz}}{1} \quad \text{или} \quad \frac{2x}{1} = \frac{4y}{1} = \frac{6z}{1}.$$

Присоединяя к этим уравнениям уравнение поверхности $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 11$, найдём координаты точек касания:

$2x = 4y$, $2x = 6z$; откуда $y = \frac{x}{2}$, $z = \frac{x}{3}$.

Подставляя в уравнение плоскости, получим:

$$x^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{3} = 11 \quad \text{или} \quad x^2 = 6.$$

Таким образом, $x_{1,2} = \pm\sqrt{6}$, $y_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$, $z_{1,2} = +\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Точки касания имеют координаты:

$$M_1\left(\sqrt{6}; \frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right), \quad M_2\left(-\sqrt{6}; -\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

Следовательно, уравнения касательных плоскостей имеет вид:

$$1\cdot(x \pm \sqrt{6}) + 1\cdot\left(y \pm \frac{\sqrt{6}}{2}\right) + 1\cdot\left(z \pm \frac{\sqrt{6}}{3}\right) = 0,$$

т.е. $x + y + z + \frac{11}{\sqrt{6}} = 0$ и $x + y + z - \frac{11}{\sqrt{6}} = 0$.

*Ответ:* $x + y + z + \frac{11}{\sqrt{6}} = 0$, $x + y + z - \frac{11}{\sqrt{6}} = 0$.

***Пример 5*** Составить уравнение касательной, нормальной плоскости, бинормали, соприкасающейся плоскости, главной нормали и спрямляющей плоскости винтовой линии: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$.

*Решение.* Уравнение касательной к кривой, записанной параметрическими уравнениями, имеет вид:



$$\frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'} = \frac{Z - z}{z'},$$

Найдем $x', y', z'$

$x' = -a\sin t$, $y' = -a\cos t$, $z' = b$.

Тогда

$\frac{x - a\cos t}{-a\sin t} = \frac{y - a\sin t}{a\cos t} = \frac{z - bt}{b}$ – уравнение касательной к винтовой линии.

Уравнение главной нормали

$$X = x + \lambda\left\{z'\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} - y'\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}\right\}; \; Y = y + \lambda\left\{x'\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} - z'\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}\right\};$$

$$Z = z + \lambda\left\{y'\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} - x'\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}\right\}.$$

Найдем $x'', y'', z''$.

$x'' = (x')' = (-a\sin t)' = -a\cos t$; $y'' = (y')' = (a\cos t)' = -a\sin t$;

$z'' = (z')' = b' = 0$.

Подставив значения производных, найдем уравнения главной нормали.

$$x = a\cos t + \lambda\left\{b\begin{vmatrix} b & -a\sin t \\ 0 & -a\cos t \end{vmatrix} - a\cos t\begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t \\ -a\cos t & -a\sin t \end{vmatrix}\right\};$$

$$y = a\sin t + \lambda\left\{-a\sin t\begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t \\ -a\cos t & -a\sin t \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a\cos t & b \\ -a\sin t & 0 \end{vmatrix}\right\};$$

$$z = bt + \lambda\left\{a\cos t\begin{vmatrix} a\cos t & b \\ -a\sin t & 0 \end{vmatrix} + a\sin t\begin{vmatrix} b & -a\sin t \\ 0 & -a\cos t \end{vmatrix}\right\}, \quad \text{или}$$

$$x - a\cos t = \lambda\left\{-ab^2\cos t - a^3\cos t\right\};$$

$$y - a\sin t = \lambda\left\{-a^3\sin t - ab^2\sin t\right\};$$

$$z - bt = \lambda\left\{a^2 b\sin t\cos t - a^2 b\sin t\cos t\right\}.$$

Отсюда

$$\frac{x-a\cos t}{\cos t\left(-ab^2-a^3\right)}=\frac{y-a\sin t}{\sin t\left(-ab^2-a^3\right)},\quad z=bt,$$

*или*

$$\frac{x-a\cos t}{\cos t}=\frac{y-a\sin t}{\sin t},\quad z=bt.$$

Уравнение бинормали имеет вид:

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}}=\frac{Y-y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}.$$

Подставляя значения $x,\ y,\ z$ и их производных, получим:

$$\frac{x-a\cos t}{\begin{vmatrix} a\cos t & b \\ -a\sin t & 0 \end{vmatrix}}=\frac{y-a\sin t}{\begin{vmatrix} b & -a\sin t \\ 0 & -a\cos t \end{vmatrix}}=\frac{z-bt}{\begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t \\ -a\cos t & -a\sin t \end{vmatrix}},$$

*или*

$$\frac{x-a\cos t}{ab\sin t}=\frac{y-a\sin t}{-ab\cos t}=\frac{z-bt}{a^2}.$$

Сократив на $a$, будем иметь:

$$\frac{x-a\cos t}{b\sin t}=\frac{y-a\sin t}{-b\cos t}=\frac{z-bt}{a}.$$

Уравнение нормальной плоскости:

$$(X-x)\,x'+(Y-y)\,y'+(Z-z)\,z'=0,$$

$$(x-a\cos t)(-a\sin t)+(y-a\sin t)a\cos t+(z-bt)b=0,$$

$$a\sin t\,x-a\cos t\,y-bz+bt=0.$$

Уравнение соприкасающейся плоскости:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}=0,\qquad \begin{vmatrix} x-a\cos t & y-a\sin t & z-bt \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Сделав необходимые вычисления, получим:

$$b\sin t\,x-b\cos t\,y+az-abt=0.$$

Уравнение спрямляющей плоскости:



$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \end{vmatrix}=0,\qquad \begin{vmatrix} x-a\cos t & y-a\sin t & z-bt \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ ab\sin t & -ab\cos t & a^2 \end{vmatrix}=0.$$

После вычисления имеем $x\cos t+y\sin t-a=0$.

*Ответ:* Касательная: $\frac{x-a\cos t}{-a\sin t}=\frac{y-a\sin t}{a\cos t}=\frac{z-bt}{b}$;

главная нормаль: $\frac{x-a\cos t}{\cos t}=\frac{y-a\sin t}{\sin t},z=bt;$

бинормаль: $\frac{x-a\cos t}{b\sin t}=\frac{y-a\sin t}{-b\cos t}=\frac{z-bt}{a}$;

нормальная плоскость: $a\sin t\,x-a\cos t\,y-bz+b^2t=0;$

соприкасающаяся плоскость: $b\sin t\,x-b\cos t\,y+az-abt=0;$

спрямляющая плоскость: $x\cos t+y\sin t-a=0.$

***Пример 6*** Найти единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали в произвольной точке линии:

$$x=e^t\cos t,\quad y=e^t\sin t,\quad z=e^t.$$

*Решение.* Единичные векторы репера Френе находятся по формулам:

$$\vec{\tau}=\frac{\vec{r}'}{\left|\vec{r}'\right|},\quad \vec{\upsilon}=\frac{\left[\left[\vec{r}',\vec{r}''\right],\vec{r}'\right]}{\left|\left[\vec{r}',\vec{r}''\right]\right|\cdot\left|\vec{r}'\right|},\quad \vec{\beta}=\frac{\left[\vec{r}',\vec{r}''\right]}{\left|\left[\vec{r}',\vec{r}''\right]\right|}.$$

Найдем первую, вторую производные вектор-функции:

$$\vec{r}(t)=e^t\cos t\,\vec{i}+e^t\sin t\,\vec{j}+e^t\,\vec{k};$$

$$\vec{r}'(t)=e^t(\cos t-\sin t)\,\vec{i}+e^t(\sin t+\cos t)\,\vec{j}+e^t\,\vec{k};$$

$$\vec{r}''(t)=-2e^t\sin t\,\vec{i}+2e^t\cos t\,\vec{j}+e^t\,\vec{k}.$$

Вычислим $\left|\vec{r}'(t)\right|$.

$\left|\vec{r}'\right| = \sqrt{e^{2t}(cost - sint)^2 + e^{2t}(sint + cost)^2 + e^{2t}} = e^t\sqrt{3}$. Тогда

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{r}'}{\left|\vec{r}'\right|} = \frac{e^t(\cos t - \sin t)}{e^t\sqrt{3}}\vec{i} + \frac{e^t(\sin t + \cos t)}{e^t\sqrt{3}}\vec{j} + \frac{e^t}{e^t\sqrt{3}}\vec{k} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left((\cos t - \sin t)\vec{i} + (\cos t + \sin t)\vec{j} + \vec{k}\right).$$

Найдем $\left[\vec{r}', \vec{r}''\right]$:

$$\left[\vec{r}', \vec{r}''\right] = \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}\vec{k}.$$

$$\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^t(\sin t + \cos t) & e^t \\ 2e^t \cos t & e^t \end{vmatrix} = e^{2t}(\sin t - \cos t);$$

$$\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^t & e^t(\cos t - \sin t) \\ e^t & -2e^t \sin t \end{vmatrix} = -e^{2t}(\sin t + \cos t);$$

$$\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^t(\cos t - \sin t) & e^t(\cos t + \sin t) \\ -2e^t \sin t & 2e^t \cos t \end{vmatrix} = 2e^{2t};$$

$$\left[\vec{r}', \vec{r}''\right] = e^{2t}(\sin t - \cos t)\vec{i} - e^{2t}(\sin t + \cos t)\vec{j} + 2e^{2t}\vec{k};$$

$$\left|\left[\vec{r}', \vec{r}''\right]\right| = \sqrt{c^{4t}(\sin t - \cos t)^2 + e^{4t}(\sin t + \cos t)^2 + 4e^{4t}} = e^{2t}\sqrt{6}.$$

Найдем $\left[\left[\vec{r}', \vec{r}''\right], \vec{r}'\right]$. Для этого вычислим



$$\begin{vmatrix} -e^{2t}(\sin t + \cos t) & 2e^t \\ e^t(\sin t + \cos t) & e^t \end{vmatrix} = -3e^t(\sin t + \cos t);$$

$$\begin{vmatrix} 2e^t & e^{2t}(\sin t - \cos t) \\ e^t & e^t(\cos t - \sin t) \end{vmatrix} = 3e^{3t}(\cos t - \sin t);$$

$$\begin{vmatrix} e^{2t}(\sin t - \cos t) & -e^{2t}(\sin t + \cos t) \\ e^t(\cos t - \cos t) & e^t(\sin t + \cos t) \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом,

$$\left[\left[\vec{r}', \vec{r}''\right], \vec{r}'\right] = -3e^{3t}(\sin t + \cos t)\vec{i} + 3e^{3t}(\cos t - \sin t)\vec{j}.$$

Найдем $\vec{\upsilon}, \vec{\beta}$:

$$\vec{\upsilon} = \frac{\left[\left[\vec{r}', \vec{r}''\right], \vec{r}'\right]}{\left|\left[\vec{r}', \vec{r}''\right]\right|\left|\vec{r}'\right|} = \frac{1}{3\sqrt{e}e^{3t}}\left(-3e^{3t}(\sin t + \cos t)\vec{i} + 3e^{3t}(\cos t - \sin t)\vec{j}\right) =$$

$$= -\frac{\sin t + \cos t}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{\cos t - \sin t}{\sqrt{e}}\vec{j}.$$

$$\vec{\beta} = \frac{\left[\vec{r}', \vec{r}''\right]}{\left|\left[\vec{r}', \vec{r}''\right]\right|} = \frac{1}{\sqrt{6}e^{2t}}\left(e^{2t}(\sin t - \cos t)\vec{i} - e^{2t}(\sin t + \cos t)\vec{j} + 2e^{2t}\vec{k}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{6}}\left((\cos t - \sin t)\vec{i} + (\sin t + \cos t)\vec{j} - 2\vec{k}\right).$$

*Ответ:* $\vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left((\cos t - \sin t)\vec{i} + (\cos t + \sin t)\vec{j} + \vec{k}\right);$

$\vec{\upsilon} = -\frac{\sin t + \cos t}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{\cos t - \sin t}{\sqrt{e}}\vec{j};$

$\vec{\beta} = -\frac{1}{\sqrt{6}}\left((\cos t - \sin t)\vec{i} + (\sin t + \cos t)\vec{j} - 2\vec{k}\right).$

***Пример 7*** Вычислить кривизну и кручение кривой
$\vec{r}(t)=\left\{2t, \ln t, t^2\right\}$.

*Решение.* Для вычисления кривизны воспользуемся формулой

$$k=\frac{\sqrt{\left(y'z''-z'y''\right)^2+\left(z'x''-x'z''\right)^2+\left(x'y''-y'x''\right)^2}}{\left(x'^2+y'^2+z'^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Имеем
$$x'=2,\ y'=\frac{1}{t},\ z'=2t.$$
$$x''=0,\ y''=-\frac{1}{t^2},\ z''=2.$$

Подставив эти значения в формулу и проделав необходимые вычисления, получим $k=\dfrac{2t}{\left(1+2t^2\right)^2}$.

Для вычисления кручения воспользуемся формулой

$$\chi=\frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}.$$

Дополнительно найдем

$$x'''=0,\ y'''=\frac{2}{t^3},\ z'''=0.$$

Выполнив необходимые вычисления, получим $\chi=\dfrac{-2t}{\left(1+2t^2\right)^2}$.

*Ответ:* $k=\dfrac{2t}{\left(1+2t^2\right)^2}, \chi=\dfrac{-2t}{\left(1+2t^2\right)^2}$.

***Пример 8*** Доказать, что смешанное произведение $\vec{\tau}\,\vec{\beta}\,\vec{\beta}'=\chi$, где $\vec{r}=\vec{r}(l)$.



*Решение.* По определению смешанного произведения имеем, $\vec{\tau}\,\vec{\beta}\,\vec{\beta}'=\left[\vec{\tau},\vec{\beta}\right]\vec{\beta}'$. Находим $\left[\vec{\tau},\vec{\beta}\right]=-\upsilon$, ( $\vec{\tau},\vec{\upsilon},\vec{\beta}$ – единичные взаимно ортогональные векторы, образующие правую тройку).

Воспользовавшись формулами Френе, имеем $\vec{\beta}'=-\chi\,\vec{\upsilon}$. Перемножая скалярные векторы $-\vec{\upsilon}$ и $-\chi\,\vec{\upsilon}$, окончательно получим $\vec{\tau}\,\vec{\beta}\,\vec{\beta}'=-(\vec{\upsilon})(-\chi\,\vec{\upsilon})=\chi\,\vec{\upsilon}^2=\chi.$

***Пример 9*** Найти натуральную параметризацию кривой и составить натуральное уравнение $\vec{r}(t)=\{ct, c\sqrt{2}\ln t, ct^{-1}\}$.

*Решение.* Найдем зависимость между параметром и натуральным параметром $\ell$.

Имеем
$$d\ell^2=dx^2+dy^2+dz^2=c^2\left(1+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3}\right)dt^2=\frac{c^2(t^2+1)^2}{t^4}dt^2,$$
$$\text{т.е.}\quad d\ell=\frac{c(t^2+1)}{t^2}dt.$$

Поэтому
$$\ell=c\int_{t_0}^{t}\frac{t^2+1}{t^2}dt=c\left(t-\frac{1}{t}\right)-c\left(t_0-\frac{1}{t_0}\right).$$

Полагая, $t_0=1$, получим $\ell=c\left(t-\dfrac{1}{t}\right)$, $ct^2-\ell t-c=0.$

Из этого равенства выражаем $t$ как функцию $\ell$ : $t=\dfrac{\ell+\sqrt{\ell^2+4c^2}}{2c}$.

Итак, уравнение кривой в натуральном параметре имеет вид:

$$\vec{r}(l)=\left\{\frac{\ell+\sqrt{\ell^2+4c^2}}{2c}, \ln\frac{\ell+\sqrt{\ell^2+4c^2}}{2c}, \frac{2c^2}{\ell+\sqrt{\ell^2+4c^2}}\right\}.$$

Вычисляя кривизну и кручение данной кривой как функции параметра $\ell$, найдем ее натуральное уравнение: $k=\chi=\dfrac{c-\sqrt{2}}{\ell^2+4c^2}$.

## Задачи

**1** Составить уравнения касательной и нормали к следующим линиям:

1.1 $x = t^2 - 2t, y = t^2 + 1$ в точке $A(t = 1)$;

1.2 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$;

1.3 $x = a\cos t, y = b\sin t$;

1.4 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$;

1.5 $y = \sin x$ в точке с абсциссой $\frac{\pi}{2}$;

1.6 $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ в точке $A\left(\frac{3a}{2};\frac{3a}{2}\right)$;

1.7 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;

1.8 $y^2 = 2px$;

1.9 $r = 2a\cos\varphi$ в точке $A$, для которой $\varphi = \frac{\pi}{4}$;

1.10 $y = x^2 + 4x + 3$ в точках с абсциссами $-1, 0, 1$;

1.11 $y = x^3$ в точках с абсциссами *0 и 1;*

1.12 $y = tgx$ в точках с абсциссами $0, \frac{\pi}{4}$;

1.13 $x = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4, y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3$ в точке $A(t = 0)$;

1.14 $(x^2 + y^2)x - ay^2 = a$ в точке $A\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$;

1.15 $x = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{1}{t}\right), \quad y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$.

**2** Решить:

2.1 Доказать, что для любой точки $M$ равносторонней гиперболы $x^2 + y^2 = a^2$ отрезок нормали от точки $M$ до точки пересечения с осью $Ox$ равен отрезку $OM$.

2.2 В какой точке касательная к параболе $y = x^2 - 6x + 5$ перпендикулярна прямой $x - 2y + 8 = 0$?

2.3 В уравнении параболы $y = x^2 + bx + c$ постоянные $b$ и $c$ определить так, чтобы парабола касалась прямой $y = 3x - 5$ в точке с абсциссой $x = 2$.

2.4 В уравнении параболы $y = ax^2 + bx + c$ постоянные $a$, $b$ и $c$ определить так, чтобы парабола касалась прямой $y = 4x - 1$ в точке с абсциссой $x = 1$ и проходила через точку $A(0; 1)$;

2.5 Написать уравнение касательной и нормали к линии $y = x^3 + 3x^2 - 1$ в точке ее пересечения с параболой $y = 3x^2$.

2.6 Написать уравнение касательных к линии

$y = \frac{1}{1 + x^2}$ в точках ее пересечения с гиперболой $y = \frac{1}{1 + x}$.

2.7 В каких точках с одной и той же абсциссой касательные к линиям $y = x^2$ и $y = x^3$ параллельны?

2.8 Найти касательную к параболе $y = x^2$, параллельную прямой $y = 4x - 5$.

2.9 Найти касательные линии $x = t^3, y = t^2$, проходящие через точку $M(-7;-1)$.

2.10 Найти наиболее удаленные от начала координат касательные астроиде $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

2.11 В какой точке касательная к параболе образуют с осью $Ox$ угол в $45^\circ$?

2.12 Составить уравнения касательных к линии $y = x - \frac{1}{x}$ в точках пересечения с осью $Ox$.

2.13 Составить уравнения нормали к линии в точке с абсциссой $x = 3, y = \frac{1}{1 + x^2}$.

2.14 Составить уравнения касательной и нормали к линии $2x^2 - x^2y^2 - 3x + y + 7 = 0$ в точке $A(1;-2)$.

2.15 Может ли касательная к параболе $y = x^3$ составлять с осью $Ox$ тупой угол?

**3** Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности:

3.1 $z=ln(x^2+y^2)$ в точке $M(1;0;0)$;

3.2 $x^2+y^2-z^2=-1$ в точке $M(2;2;3)$;

3.3 $z=1+x^2+y^2$ в точке $M(1;1;3)$;

3.4 $xy^2+z^3=12$ в точке $M(1;2;2)$;

3.5 $xyz=a^3$;

3.6 $x=2u-v, y=u^2+v^2, z=u^3-v^3$ в точке $M(3;5;7)$;

3.7 $x=u+v, y=u-v, z=uv$ в точке $M(3;1;2)$;

3.8 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ в точке $M(x_0;y_0;z_0)$;

3.9 $x=u\cos v, y=u\sin v, z=av$;

3.10 $z=\sin x\cos y$ в точке $M\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4};\frac{1}{2}\right)$;

3.11 $x=u, y=u^2-2v, z=u^3-3uv$ в точке $M(1;3;4)$;

3.12 $z=x^3+y^3$ в точке $M(1;2;9)$;

3.13 $x=u\cos v, y=u\sin v, z=u$ в точке $M\left(u=2, v=\frac{\pi}{4}\right)$;

3.14 $x^2+y^2+z^2=169$ в точке $M(3;4;12)$;

3.15 $x^2-2y^2-3z^2=4$ в точке $M(3;1;-1)$.

**4** Решить:

4.1 Показать, что кривая $x=at+b, y=ct+d, z=t^2$ имеет во всех точках одну и ту же соприкасающуюся плоскость.

4.2 Написать уравнение соприкасающейся плоскости, главной нормали, бинормали, спрямляющей плоскости кривой $x=t^2, y=t, z=t^3-20$ в точке $M(9;3;7)$.

4.3 Составить уравнения главной нормали, бинормали, соприкасающейся плоскости кривой $y^2=x, x^2=z$ в точке $M(1;1;1)$.

4.4 Составить уравнения нормальной плоскости, бинормали, соприкасающейся плоскости, главной нормали в точке $t=0$ для кривой $x=t^2, y=1-t, z=t^3$.



4.5 Для винтовой линии $x=\cos t, y=\sin t, z=t$ в точке $M(1;0;0)$ составить уравнения соприкасающейся плоскости, нормальной плоскости, главной нормали, бинормали.

4.6 Составить уравнения касательной, нормальной плоскости, бинормали, соприкасающейся плоскости, главной нормали и спрямляющей плоскости линии $x=\sin t, y=\cos t, z=tgt$ в точке $t=\frac{\pi}{4}$.

4.7 Составить уравнения спрямляющей плоскости, нормальной плоскости и соприкасающейся плоскости кривой $x=6t, y=3t^2, z=t^3$ в точке $t=1$.

4.8 Составить уравнения касательной, нормальной плоскости, бинормали, соприкасающейся плоскости, главной нормали и спрямляющей плоскости линии $x=t, y=t^3, z=t^2+4$ в точке $t=1$.

4.9 Для линии в точке $M(1;1;11)$ составить уравнения спрямляющей плоскости, соприкасающейся плоскости, бинормали и главной нормали.

4.10 Составить уравнения касательной, бинормали, главной нормали и спрямляющей плоскости линии $x=\sin t, y=\cos t, z=tgt$ в точке $t=\frac{\pi}{6}$.

4.11 Написать уравнения главной нормали, бинормали и соприкасающейся плоскости кривой $x=t^2, y=1-t, z=t^3+3$ в точке $M(1;0;4)$.

4.12 Составить уравнения соприкасающейся плоскости, спрямляющей плоскости, нормальной плоскости, главной нормали и бинормали линии $x=2\cos t, y=2\sin t, z=3t$ в точке $M(2;0;0)$.

4.13 Для линии $x=5t, y=2t^2, z=t^3-1$, составить уравнения нормальной плоскости, главной нормали, соприкасающейся плоскости, спрямляющей плоскости и бинормали в точке $M(5;2;0)$.

4.14 Написать уравнения касательной, бинормали, главной нормали и спрямляющей плоскости линии $x=3\cos t, y=3\sin t, z=2t$ в точке $M(0;3;\pi)$.

4.15 Составить уравнения спрямляющейся плоскости, главной нормали, соприкасающейся плоскости и бинормали линии $x^2+y^2+z^2=3, x^2+y^2=2$ в точке $M(1;1;1)$.

**5** Найти векторы $\vec{\tau}, \vec{\upsilon}, \vec{\beta}$ репера Френе

5.1 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt;$

5.2 $x = t^2, y = 1 - t, z = t^3$ в точке $t = 1;$

5.3 $x = t, y = t^3, z = t^2 + 4$ в точке $t = 1;$

5.4 $x = \sin t, y = \cos t, z = tgt$ в точке $t = \dfrac{\pi}{4};$

5.5 $x = t\sin t, y = t\cos t, z = te^t$ в точке $t = 0;$

5.6 $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, z = \cos 2t;$

5.7 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), z = 4a\cos\dfrac{t}{2};$

5.8 $x^3 = 3a^2 y, 2xz = a^2;$

5.9 $x = t, y = t^2, z = t^3$ в точке $t = 1;$

5.10 $x = 6t, y = 3t^2, z = t^3$ в точке $t = 1;$

5.11 $x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 3t$ в точке $t = 0;$

5.12 $x = t^2, y = 1 - t, z = t^3 + 1$ в точке $t = 1;$

5.13 $x = t + 2, y = t^2 + 4t, z = t^3 + 1$ в точке $t = 1;$

5.14 $x = t\sin t, y = t\cos t, z = 2te^t$ в точке $t = 0;$

5.15 $x = 3\cos t, y = 3\sin t, z = 2t$ в точке $t = \pi$.

**6** Найти кривизну и кручение кривой

6.1 $x = e^t, y = e^{-t}, z = t\sqrt{2};$

6.2 $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4\sin\dfrac{t}{2};$

6.3 $x = e^t - \sin t, y = e^t\cos t, z = e^t;$

6.4 $x = 2t, y = \ln t, z = t^2;$

6.5 $x = 3t - t^3, y = 3t^2, z = 3t + t^3;$

6.6 $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, z = \cos 2t;$

6.7 $x = t^2, y = 1 - t, z = t^3;$

6.8 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt;$



6.9 $x = a\,ch t, y = a\,sh t, z = at;$

6.10 $x = t^2\dfrac{\sqrt{2}}{3}, y = 2 - t, z = t^3;$

6.11 $x = t\cos t, y = t\sin t, z = at$ в начале координат;

6.12 $y^2 = x, x^2 = z;$

6.13 $x^3 = 3a^2 y, 2xz = a^2;$

6.14 $x = 6t, y = 3t^2, z = t^3$ в точке $t = 1$;

6.15 $x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 3t.$

**7** Доказать, что если $\vec{r} = \vec{r}(l),$ то

7.1 $\vec{\beta}'\vec{\beta}''\vec{\beta}''' = \chi^5\left(\dfrac{k}{\chi}\right)'.$

7.2 $\vec{\tau}'\vec{\tau}''\vec{\tau}''' = k^5\left(\dfrac{k}{\chi}\right)'.$

7.3 Для того, чтобы линия была прямой, необходимо и достаточно, чтобы k = 0.

7.4 Для того, чтобы линия была плоской, необходимо и достаточно, чтобы $\chi = 0.$

**8** Проверить, что для линии $\vec{r} = \vec{r}(l),$ выполняются следующие соотношения:

8.1 $\vec{r}'^2 = 1;$

8.2 $\overrightarrow{r''^2} = k^2;$

8.3 $\left|\vec{r}'''\right|^2 = k^4 + k^2\chi^2 + k'^2;$

8.4 $\vec{r}'\vec{r}'' = 0;$

8.5 $\vec{r}'\vec{r}''' = -k^2;$

8.6 $\vec{r}''\vec{r}'''' = kk'.$

**9** Составить натуральные уравнения кривых:

9.1 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t;$

9.2 $y = x^{\frac{3}{2}};$

9.3 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t);$

9.4 $x = \frac{a}{3}(2\cos t + \cos 2t), y = \frac{a}{3}(2\sin t + \sin 2t);$

9.5 $y = a\,ch\left(\frac{x}{a}\right);$

9.6 $x = a(2t + \sin 2t), y = a(2 - \cos 2t);$

9.7 $x = a(\ln tg\frac{t}{2} + \cos t), y = a\sin t;$

9.8 $r = a(1 + \cos\varphi);$

9.9 $x = a(\cos t + t\sin t), y = a(\sin t - t\cos t);$

9.10 $x = a\,cht, y = sht, z = at.$



### *2.3 Евклидовы и псевдоевклидовы пространства*

**Вопросы для самоконтроля**

1 Евклидовы координаты.
2 Скалярное произведение.
3 Длина линии.
4 Угол между двумя линиями.
5 Псевдоевклидово пространство.
6 Градиент функции.
7 Производная функции по направлению вектора. Координаты в евклидовом пространстве.
8 Риманова метрика.
9 Евклидова метрика.
10 Псевдориманова метрика.
11 Векторы в псевдоевклидовом пространстве. Псевдосфера.
12 Преобразования Лоренца.
13 Замедление времени.
14 Сокращение длин.
15 Кривые в псевдоевклидовом пространстве.
16 Времениподобная кривая.
17 Сопровождающий трехгранник времениподобной кривой.
18 Формулы Френе времениподобной кривой.
19 Кривизна, кручение времениподобной кривой.

**Примеры решения и оформления задач**

***Пример 1*** Вычислить длину дуги линии $y = \ln\sin x$ между точками, для которых $x_1 = \frac{\pi}{3}, x_2 = \frac{\pi}{2}$.

*Решение.* Искомую линию вычисляем по формуле

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Поскольку $y = \ln\sin x, y' = \frac{\cos x}{\sin x}$, то

$$s=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x dx}{\sin^2 x}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\cos x)}{\cos^2 x-1}=\frac{1}{2}ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}ln\,3.$$

*Ответ:* $\frac{1}{2}ln\,3.$

***Пример 2*** Найти угол между кривыми $y=\frac{5}{4}x^2+1,\ x^2+4y^2=4$ в точке их пересечения.

*Решение.* Найдем точки пересечения данных кривых

$$\begin{cases}x^2+4y^2=4\\ y=\frac{5}{4}x^2+1\end{cases}$$

Откуда $y=\frac{5}{4}(4-4y^2)+1$ или $5y^2+y-6=0$, $y_1=-\frac{6}{5}, y_2=1.$

$y=\frac{5}{4}x^2+y-6>0$, следовательно, $y_1$ не подходит.

Таким образом, кривые имеют единственную точку пересечения $M(0;1)$.

Параметризируем данные кривые

$$x^2+y^2=4,\ \begin{cases}x=2\cos t,\\ y=\sin t,\end{cases}\ 0\le t<2\pi.$$

$$y=\frac{5}{4}x^2+1,\begin{cases}x=s,\\ y=\frac{5}{4}s^2+1,\end{cases}-\infty<s<\infty.$$

$$\vec{r}_1(t)=2\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j},\quad \vec{r}_2(s)=s-\vec{i}+(\frac{5}{4}s^2+1)\vec{j}.$$

Тогда

$\vec{r}_1(t)=\{2\cos t,\ \sin t\}$, $\vec{r}_2(s)=\{s,\frac{5}{4}s^2+1\}$ – векторно-параметрические уравнения исходных кривых.



$x=2\cos t=0,$ откуда $t=\frac{\pi}{4}$ и $x=s=0.$

Вычислим $\vec{r}_1'(t),\vec{r}_2'(s):$

$\vec{r}_1'(t)=-2\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j},$

$\vec{r}_2'(t)=\vec{i}+\frac{5}{2}s\,\vec{j},\quad \vec{r}_1'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2\,\vec{i},\ \vec{r}_2'(0)=i$ – касательные векторы в точке пересечения кривых.

Тогда угол $\varphi$ между кривыми найдем из соотношения:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{r}_1'\left(\frac{\pi}{2}\right)\vec{r}_2'(0)}{\left|\vec{r}_1'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|\left|\vec{r}_2'(0)\right|}.$$

$$\left|\vec{r}_1'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|=2,\ \left|\vec{r}_2'(0)\right|=1,\ \cos\varphi=\frac{-2}{2}=-1,\ \varphi=\pi.$$

*Ответ:* $\pi$.

***Пример 3*** Вычислить риманову метрику в полярных координатах.

*Решение.* На плоскости полярные координаты и декартовы связаны следующими соотношениями:

$x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi.$

Метрика Евклида в декартовых координатах $x, y$ имеет вид

$$dl^2=dx^2+dy^2,(g_{ij})=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Поскольку $dx=dr\cos\varphi-r\sin\varphi\,d\varphi,$

$dy=dr\sin\varphi+r\cos\varphi\,d\varphi,$

$dx^2=(dr\cos\varphi-r\sin\varphi\,d\varphi)^2=dr^2\cos^2\varphi-2r\sin\varphi\cos\varphi\,drd\varphi+r^2\sin^2\varphi\,d\varphi^2,$

$dy^2=(dr\sin\varphi+r\cos\varphi\,d\varphi^2)=dr^2\sin^2\varphi+2r\sin\varphi\cos\varphi\,drd\varphi+r^2\cos^2\varphi\,d\varphi^2,$

$dl^2=dx^2+dy^2=dr^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi\,d\varphi^2-2r\sin\varphi\cos\varphi\,drd\varphi+dr^2\sin^2\varphi+$
$+2r\sin\varphi\cos\varphi\,drd\varphi+r^2\cos^2\varphi\,d\varphi^2=dr^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+r^2d\varphi^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)=$
$=dr^2+r^2d\varphi^2.$

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad или \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

*Ответ:* $dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$.

***Пример 4*** Найти натуральную параметризацию кривой из $R_1^3$,

$\vec{r}(t) = 7e^t\,\vec{i} + e^t \cos t\,\vec{j} - e^t \sin t\,\vec{k}$.

*Решение.* Найдем $\vec{r}'(t), \left|\vec{r}'(t)\right|$.

$$\vec{r}'(t) = 7e^t\,\vec{i} + e^t(\cos t - \sin t)\,\vec{j} - e^t(\sin t + \cos t)\,\vec{k},$$

$$\left|\vec{r}'(t)\right| = -49e^{2t} + e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 - e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 = -49e^{2t} + 2e^{2t} = -47e^{2t}.$$

Таким образом, $\vec{r}(t)$ времениподобная кривая

$$\sigma = \int_0^1 \sqrt{47e^{2t}}\,dt = \sqrt{47}\,e^t\Big|_0^t = \sqrt{47}(e^t - 1).$$

Откуда $\quad t = \ln(\frac{\sigma}{47} + 1)$.

$$\vec{r}(\sigma) = 7\left(\frac{\sigma}{\sqrt{47}} + 1\right)\vec{i} + \left(\frac{\sigma}{\sqrt{47}} + 1\right)\cos\ln\left(\frac{\sigma}{\sqrt{47}} + 1\right)\vec{j} - \left(\frac{\sigma}{\sqrt{47}} + 1\right)\sin\ln\left(\frac{\sigma}{\sqrt{47}} + 1\right)\vec{k}.$$

*Ответ:*

$$\vec{r}(\sigma) = \left\{7\left(\frac{\sigma}{\sqrt{47}} + 1\right), \left(\frac{\sigma}{\sqrt{47}} + 1\right)\cos\ln\left(\frac{\sigma}{\sqrt{47}} + 1\right), \left(\frac{\sigma}{\sqrt{47}} + 1\right)\sin\ln\left(\frac{\sigma}{\sqrt{47}} + 1\right)\right\}.$$

***Пример 5*** Найти единичные векторы сопровождающего трехгранника времениподобной кривой $\vec{r}(\sigma)$ в точке $\sigma = 0$, вычислить кривизну и кручение данной кривой.

$$\vec{r}(\sigma) = \frac{3\sigma}{\sqrt{5}}\,\vec{i} + \cos\frac{2\sigma}{\sqrt{5}}\,\vec{j} + \sin\frac{2\sigma}{\sqrt{5}}\,\vec{k}.$$

*Решение.* Найдем $r'(\sigma), r''(\sigma), \left|\vec{r}''(\sigma)\right|$.



$$\vec{r}'(\sigma) = \frac{3}{\sqrt{5}}\,\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\sin\frac{2}{\sqrt{5}}\,\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{5}}\cos\frac{2\sigma}{\sqrt{5}}\,\vec{k},$$

$$\vec{r}'(\sigma) = -\frac{4}{5}\cos\frac{2\sigma}{\sqrt{5}}\,\vec{j} - \frac{4}{5}\sin\frac{2\sigma}{\sqrt{5}}\,\vec{k}, \left|r''(\sigma)\right| = \frac{4}{5}.$$

Тогда $\vec{\tau}(\sigma) = \vec{r}'(\sigma),\ \upsilon(\sigma) = \dfrac{\vec{r}''(\sigma)}{\left|\vec{r}''(\sigma)\right|}.$

$$\vec{\upsilon}(\sigma) = -\cos\frac{2\sigma}{\sqrt{5}}\,\vec{j} - \sin\frac{2\sigma}{\sqrt{5}}\,\vec{k}.$$

В точке $\sigma = 0$ имеем:

$$\vec{\tau} = \left(\frac{3}{\sqrt{5}}; 0; \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \vec{\upsilon} = (0; -1; 0).$$

Вектор $\vec{\beta}(\sigma) = \left[\vec{\tau}(\sigma), \vec{\upsilon}(\sigma)\right]$

$$\vec{\beta}(\sigma) = \begin{vmatrix} -\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{3}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}}\sin\frac{2\sigma}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\cos\frac{2\sigma}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\cos\frac{2\sigma}{\sqrt{5}} & -\sin\frac{2\sigma}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} = -\frac{2}{\sqrt{5}}\,\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{5}}\sin\frac{2\sigma}{\sqrt{5}}\,\vec{j} - \frac{3}{\sqrt{5}}\cos\frac{2\sigma}{\sqrt{5}}\,\vec{k};$$

$$\vec{\beta}(0) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; 0; -\frac{3}{\sqrt{5}}\right).$$

Поскольку $k(\sigma) = \left|[\vec{r}', \vec{r}'']\right|$, то найдем $[\vec{r}', \vec{r}'']$.

$$[\vec{r}', \vec{r}''] = \begin{vmatrix} -\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{3}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}}\sin\frac{2\sigma}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\cos\frac{2\sigma}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{4}{5}\cos\frac{2\sigma}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{5}\sin\frac{2\sigma}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{8}{5\sqrt{5}}\,\vec{i} + \frac{12}{5\sqrt{5}}\sin\frac{2\sigma}{\sqrt{5}}\,\vec{j} - \frac{12}{5\sqrt{5}}\cos\frac{2\sigma}{\sqrt{5}}\,\vec{k};$$

$$\left|\left[\vec{r}',\vec{r}''\right]\right|=\frac{4}{5},k(\sigma)=\frac{4}{5}.$$

Найдем $\vec{r}'''(\sigma)$.

$$\vec{r}'''(\sigma)=\frac{8}{5\sqrt{5}}sin\frac{2\sigma}{\sqrt{5}}\vec{j}-\frac{8}{5\sqrt{5}}cos\frac{2\sigma}{\sqrt{5}}\vec{k};$$

$$\chi(\sigma)=\frac{[\vec{r}',\vec{r}'']\,\vec{r}'''}{[\vec{r}',\vec{r}'']^2}=\frac{\frac{8\cdot 12}{25\cdot 5}sin^2\frac{2\sigma}{\sqrt{5}}+\frac{8\cdot 12}{25\cdot 5}cos\frac{2\sigma}{\sqrt{5}}}{\frac{16}{25}}=\frac{8\cdot 12\cdot 25}{25\cdot 5\cdot 16}=\frac{6}{5}.$$

*Ответ:*

$$\vec{\tau}=\left(\frac{3}{\sqrt{5}};0;\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\vec{\upsilon}=(0;-1;0),\vec{\beta}=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};0;-\frac{3}{\sqrt{5}}\right),k=\frac{4}{5},\chi=\frac{6}{5}.$$

## Задачи

**1** Вычислить длину дуги линии между указанными точками следующих линий:

1.1 $y=ln\,cos\,x;\ x_1=0,x_2=\frac{\pi}{3};$

1.2 $r=a(1+cos\varphi);\ \varphi_1=0,\ \varphi_2=\pi;$

1.3 $x=a(t-sin\,t),\ y=a(1-cos\,t);\ t_1=0,t_2=\pi;$

1.4 $y=a\,ch\frac{x}{a};\ x_1=0,\ x_2=2;$

1.5 $x=\frac{a}{3}(2cos\,t+cos\,2t),\ y=\frac{a}{3}(2sin\,t+sin\,2t);\ t_1=0,t_2=\pi;$

1.6 $x=a\,cos^3t,\ y=a\,sin^3t;\ t_1=0,\ t_2=\frac{\pi}{2};$

1.7 $r=2a(1-cos\varphi);\ \varphi_1=0,\ \varphi_2=\pi;$

1.8 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}ln\,x;\ x_1=1,\ x_2=4;$

1.9 $x=t-\frac{1}{2}sh2t,\ y=2cht;t_1=0,\ t_2=2;$

1.10 $x=8at^3,\ y=3a(2t^2-t^4);\ t_1=0,\ t_2=\sqrt{2};$



1.11 $y=x^2;\ x_1=0,\ x_2=2;$

1.12 $x=a\,cos\,t,\ y=a\,sin\,t,\ z=bt;\ t_1=0,\ t_2=\beta;$

1.13 $y=x^{\frac{3}{2}};\ x_1=0,\ x_2=1;$

1.14 $x=a(ln\,ctg\frac{t}{2}-cos\,t),\ y=a\,sin\,t;\ t_1=\frac{\pi}{2},\ t_2=\pi;$

1.15 $y=ln\frac{e^x+1}{e^x-1};\ x_1=2,\ x_2=4.$

**2** Найти угол между кривыми в точке пересечения:

2.1 $\vec{r_1}(t)=t\,\vec{i}+sin\,t\,\vec{j},\ \vec{r_2}(t)=t\,\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j};$

2.2 $xy=8,\ x^2-y^2=12;$

2.3 $x^2+y^2=8,\ y^2=2x;$

2.4 $y=\frac{1}{x},\ y=\sqrt{x};$

2.5 $\begin{cases}x=t\\ y=-t^3-t\end{cases},\ \begin{cases}x=t\\ y=5t\end{cases};$

2.6 $y=1+sin\,x,\ y=1;$

2.7 $y=\sqrt{2}\,sin\,x,\ y=\sqrt{2}\,cos\,x;$

2.8 $y=x^3,\ y=\frac{1}{x^2};$

2.9 $x^2+y^2=5,\ y^2=4x;$

2.10 $y=\frac{(x-1)}{(1+x^2)},\ y=0;$

2.11 $r=ae^{\varphi},\ r=be^{-\varphi};$

2.12 $y=(x-2)^2,y=6x-4-x^2;$

2.13 $\frac{x^2}{4}+y^2=1,\ 4y=4-5x^2;$

2.14 $x^2+y^2=8x,\ y^2=\frac{x^3}{(2-x)};$

2.15 $x^2 = 4y,\ y = \dfrac{8}{(x^2+4)}$.

**3** Вычислить риманову метрику:

а) в цилиндрических координатах;

б) в сферических координатах.

**4** Определить, к какому типу (времениподобные, пространственноподобные, изотропные) относятся следующие кривые в $R_1^3$:

4.1 а) $\vec{r}(t) = 3e^t\,\vec{i} + e^t\cos t\,\vec{j} + e^t\sin t\,\vec{k}$;

б) $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \sin t\,\vec{k}$;

в) $\vec{r}(t) = 2t\,\vec{i} + \sqrt{5}t\,\vec{j} + (t^3+1)\,\vec{k}$;

4.2 а) $\vec{r}(t) = \dfrac{t}{2}\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \sin t\,\vec{k}$;

б) $\vec{r}(t) = 2t\,\vec{i} + \cos\dfrac{t}{2}\vec{j} + \sin\dfrac{t}{2}\vec{k}$;

в) $\vec{r}(t) = 3t\,\vec{i} + \cos 3t\,\vec{j} + \sin 3t\,\vec{k}$;

4.3 а) $\vec{r}(t) = 2t\,\vec{i} + (2t^2+3)\,\vec{j} + 7\,\vec{k}$;

б) $\vec{r}(t) = 7t\,\vec{i} + \dfrac{3}{2}t^2\,\vec{j} + 9t\,\vec{k}$;

в) $\vec{r}(t) = 9t\,\vec{i} + 6\cos\dfrac{t}{2}\vec{j} + 6\sin\dfrac{t}{2}\vec{k}$;

4.4 а) $\vec{r}(t) = 2e^t\,\vec{i} + e^t\cos t\,\vec{j} + e^t\sin t\,\vec{k}$;

б) $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + \cos 2t\,\vec{j} + \sin 2t\,\vec{k}$;

в) $\vec{r}(t) = t^3\,\vec{i} + 3\sqrt{5}\,\vec{j} + (t^3+2)\,\vec{k}$;

4.5 а) $\vec{r}(t) = 2t\,\vec{i} + 6\cos\dfrac{t}{2}\vec{j} + 6\sin\dfrac{t}{2}\vec{k}$;

б) $\vec{r}(t) = e^{3t}\,\vec{i} + (e^{3t}+4)\,\vec{j} + \vec{k}$;

в) $\vec{r}(t) = 5t^2\,\vec{i} + (3t^2-1)\,\vec{j} + 2t^2\,\vec{k}$;



4.6 а) $\vec{r}(t) = \dfrac{1}{2}e^t\,\vec{i} + e^t\cos t\,\vec{j} + e^t\sin t\,\vec{k}$;

б) $\vec{r}(t) = \left(\dfrac{1}{2}t^3 + t\right)\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \sin t\,\vec{k}$;

в) $\vec{r}(t) = \sqrt{2}e^t\,\vec{i} + e^t\,\vec{j} + e^t\,\vec{k}$;

4.7 а) $\vec{r}(t) = sh t\,\vec{i} + t\,\vec{j} + ch t\,\vec{k}$;

б) $\vec{r}(t) = 5t\,\vec{i} + 6\cos\dfrac{t}{3}\vec{j} + 6\sin\dfrac{t}{3}\vec{k}$;

в) $\vec{r}(t) = e^t\,\vec{i} + (3e^t+2)\,\vec{j} + 4t\,\vec{k}$;

4.8 а) $\vec{r}(t) = ch t\,\vec{i} + sh t\,\vec{j} + t\,\vec{k}$;

б) $\vec{r}(t) = (t^3+t)\,\vec{i} + \cos\dfrac{t}{2}\vec{j} + \sin\dfrac{t}{2}\vec{k}$;

в) $\vec{r}(t) = \sqrt{2}e^t\,\vec{i} - e^t\cos t\,\vec{j} - e^t\sin t\,\vec{k}$;

4.9 а) $\vec{r}(t) = 2t^3\,\vec{i} + (\sqrt{2}t^3+1)\,\vec{j} - (\sqrt{2}t^3+2)\,\vec{k}$;

б) $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + \cos 2t\,\vec{j} + \sin 2t\,\vec{k}$;

в) $\vec{r}(t) = 2t\,\vec{i} + \cos\dfrac{3t}{2}\vec{j} + \sin\dfrac{3t}{2}\vec{k}$;

4.10 а) $\vec{r}(t) = t^3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + \dfrac{t^3}{2}\vec{k}$;

б) $\vec{r}(t) = 2t^3\,\vec{i} + (\sqrt{3}t^3+2)\,\vec{j} + (2t^3-1)\,\vec{k}$;

в) $\vec{r}(t) = -sh t\,\vec{i} - ch t\,\vec{j} + t\,\vec{k}$;

4.11 а) $\vec{r}(t) = e^{2t}\,\vec{i} + e^{2t}\cos 2t\,\vec{j} + e^{2t}\sin 2t\,\vec{k}$;

б) $\vec{r}(t) = 2t\,\vec{i} - (4t^3+7)\,\vec{j} + 4t\,\vec{k}$;

в) $\vec{r}(t) = sh t\,\vec{i} - \dfrac{1}{2}t\,\vec{j} - ch t\,\vec{k}$;

4.12 а) $\vec{r}(t) = 3t\,\vec{i} + 6\cos\dfrac{t}{3}\vec{j} - 6\sin\dfrac{t}{3}\vec{k}$;

б) $\vec{r}(t) = -cht\,\vec{i} + sht\,\vec{j} - 5t\,\vec{k}$;

в) $\vec{r}(t) = sht\,\vec{i} - (t+1)\,\vec{j} + cht\,\vec{k}$;

4.13 а) $\vec{r}(t) = cht\,\vec{i} - sht\,\vec{j} - t\,\vec{k}$;

б) $\vec{r}(t) = (t^3 + 2t)\,\vec{i} + \cos\frac{t}{2}\,\vec{j} + \sin\frac{t}{2}\,\vec{k}$;

в) $\vec{r}(t) = (t^2 + 3)\,\vec{i} - (5 + 2t^2)\,\vec{j} + 3t\,\vec{k}$;

4.14 а) $\vec{r}(t) = \frac{3}{2}t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j} - \sin t\,\vec{k}$;

б) $\vec{r}(t) = (\sqrt{2}t + 1)\,\vec{i} + \cos\sqrt{2}t\,\vec{j} + \sin\sqrt{2}t\,\vec{k}$;

в) $\vec{r}(t) = \sqrt{3}e^t\,\vec{i} - 2e^t\,\vec{j} + \sqrt{5}t\,\vec{k}$;

4.15 а) $\vec{r}(t) = 3e^t\,\vec{i} + 2e^t\cos t\,\vec{j} - 2e^t\sin t\,\vec{k}$;

б) $\vec{r}(t) = (t-1)\,\vec{i} - 3t\,\vec{j} + 2t^3\,\vec{k}$;

в) $\vec{r}(t) = -sht\,\vec{i} - t\,\vec{j} - cht\,\vec{k}$.

**5** Найти натуральную параметризацию кривой из $R^3_1$. Сделать проверку.

5.1 $\vec{r}(t) = \frac{3}{2}t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j} - \sin t\,\vec{k}$;

5.2 $\vec{r}(t) = 3t\,\vec{i} + 2e^t\cos t\,\vec{j} - 2e^t\sin t\,\vec{k}$;

5.3 $\vec{r}(t) = 2t\,\vec{i} + \cos\frac{t}{2}\,\vec{j} + \sin\frac{t}{2}\,\vec{k}$;

5.4 $\vec{r}(t) = 2e^t\,\vec{i} + e^t\cos t\,\vec{j} + e^t\sin t\,\vec{k}$;

5.5 $\vec{r}(t) = 9t\,\vec{i} + 6\cos\frac{t}{2}\,\vec{j} + 6\sin\frac{t}{2}\,\vec{k}$;

5.6 $\vec{r}(t) = 3e^t\,\vec{i} + e^t\cos t\,\vec{j} + e^t\sin t\,\vec{k}$;

5.7 $\vec{r}(t) = -9t\,\vec{i} + 6\cos\frac{t}{3}\,\vec{j} - 6\sin\frac{t}{3}\,\vec{k}$;



5.8 $\vec{r}(t) = 2t\,\vec{i} + \cos\frac{3t}{2}\,\vec{j} - \sin\frac{3t}{2}\,\vec{k}$;

5.9 $\vec{r}(t) = sht\,\vec{i} - \frac{1}{2}t\,\vec{j} - cht\,\vec{k}$;

5.10 $\vec{r}(t) = 8t\,\vec{i} - 6\cos\frac{t}{3}\,\vec{j} + 6\sin\frac{t}{3}\,\vec{k}$;

5.11 $\vec{r}(t) = -\sqrt{3}sht\,\vec{i} + t\,\vec{j} - \sqrt{3}cht\,\vec{k}$;

5.12 $\vec{r}(t) = sht\,\vec{i} + cht\,\vec{k}$;

5.13 $\vec{r}(t) = 7e^t\,\vec{i} - 3e^t\cos t\,\vec{j} - 3e^t\sin t\,\vec{k}$;

5.14 $\vec{r}(t) = 2sht\,\vec{i} - (t+3)\,\vec{j} + 2cht\,\vec{k}$;

5.15 $\vec{r}(t) = 5t^2\,\vec{i} + (3t^2 - 1)\,\vec{j} + 2t^2\,\vec{k}$;

**6** Найти единичные векторы сопровождающего трёхгранника времениподобной кривой $\vec{r}(t)$ из $R^3_1$ в точке $t = 0$.

6.1 $\vec{r}(t) = \left(\frac{3t}{2} + 4\right)\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \sin t\,\vec{k}$;

6.2 $\vec{r}(t) = 9t\,\vec{i} + 6\cos\frac{t}{2}\,\vec{j} + 6\sin\frac{t}{2}\,\vec{k}$;

6.3 $\vec{r}(t) = 3e^t\,\vec{i} + e^t\cos t\,\vec{j} + e^t\sin t\,\vec{k}$;

6.4 $\vec{r}(t) = 2t\,\vec{i} + \cos\frac{3t}{2}\,\vec{j} + \sin\frac{3t}{2}\,\vec{k}$;

6.5 $\vec{r}(t) = \frac{3}{2}\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \sin t\,\vec{k}$;

6.6 $\vec{r}(t) = 2e^t\,\vec{i} + e^t\cos t\,\vec{j} + e^t\sin t\,\vec{k}$;

6.7 $\vec{r}(t) = 3t\,\vec{i} + \cos 2t\,\vec{j} + \sin 2t\,\vec{k}$;

6.8 $\vec{r}(t) = 2e^{\frac{t}{2}}\,\vec{i} + e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{t}{2}\,\vec{j} + e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{t}{2}\,\vec{k}$;

6.9 $\vec{r}(t) = 2t\,\vec{i} - \frac{1}{2}\cos t\,\vec{j} - \frac{1}{2}\sin t\,\vec{k}$;

6.10 $\vec{r}(t)=(4t-2)\vec{i}+\cos\frac{t}{2}\vec{j}+\sin\frac{t}{2}\vec{k}$;

6.11 $\vec{r}(t)=5t\,\vec{i}+3\cos t\,\vec{j}+3\sin t\,\vec{k}$;

6.12 $\vec{r}(t)=t\,\vec{i}+\sin\frac{t}{3}\vec{j}+\cos\frac{t}{3}\vec{k}+$;

6.13 $\vec{r}(t)=3e^t\,\vec{i}+\frac{1}{2}e^t\cos t\,\vec{j}+\frac{1}{2}e^t\sin t\,\vec{k}$;

6.14 $\vec{r}(t)=9t\,\vec{i}+\sin 2t\,\vec{j}+\cos 2t\,\vec{k}$;

6.15 $\vec{r}(t)=(t^3+3)\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}+\sin t\,\vec{k}$.

**7** Найти кривизну и кручение кривой $\vec{r}(t)$, где $\vec{r}(t)$ кривая из задания 5 .

**8** Используя формулы Френе, вычислить $\frac{\partial\vec{\tau}}{\partial\delta}$, $\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial\delta}$, $\frac{\partial\vec{\beta}}{\partial\delta}$ в точке $\delta=0$, если $\vec{r}=\vec{r}(t)$ кривая из задания 6.



## *2.4 Поверхности*

**Вопросы для самоконтроля**

1 Метрика на поверхности.
2 Первая квадратичная форма.
3 Угол между двумя линиями на поверхности.
4 Площадь поверхности.
5 Нормальная кривизна.
6 Вторая квадратичная форма.
7 Индикатриса Дюпена.
8 Полная, средняя и главные кривизны.
9 Формула Эйлера.

**Примеры решения и оформления задач**

***Пример 1*** Вычислить первую и вторую квадратичные формы псевдосферы: $x=a\sin u\cos v$, $y=a\sin u\sin v$, $z=a\left(\ln tg\frac{u}{2}+\cos u\right)$.

*Решение*. Вычислим коэффициенты первой квадратичной формы

$$\varphi_1=ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2,$$

$$E=\vec{r}_u^{\,2},\quad F=\vec{r}_u\vec{r}_v,\quad G=\vec{r}_v^{\,2}.$$

$$\vec{r}_u=\{a\cos v\cos u, a\cos u\sin v, actgu\cos u\},$$

$$\vec{r}_v=\{-a\sin v\sin u, a\sin u\cos v, 0\}.$$

Отсюда

$$E=\vec{r}_u\vec{r}_u=a^2\cos^2 v\cos^2 u+a^2\cos^2 u\sin^2 v+a^2ctg^2u\cos^2 u=$$

$$=a^2\cos^2 u(\cos^2 v+\sin^2 v+ctg^2u)=a^2\cos^2 u(1+ctg^2u)=a^2ctg^2u;$$

$$F=\vec{r}_u\vec{r}_v=-a^2\sin u\cos u\cos v\sin v+a^2\cos u\sin u\cos v\sin v=0,$$

$$G=\vec{r}_v^{\,2}=a^2\sin^2 u\sin^2 v+a^2\sin^2 u\cos^2 v=a^2\sin^2 u.$$

Таким образом, первая квадратичная форма псевдосферы имеет вид: $\varphi_1=a^2ctg^2udu^2+a^2\sin^2 udv^2$.

Вычислим теперь коэффициенты второй квадратичной формы

$\varphi_2 = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$,

$$L = \vec{m}\vec{r}_{uu} = -\vec{m}_u\vec{r}_u = \frac{\vec{r}_{uu}\vec{r}_u\vec{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}};$$

$$M = \vec{m}\vec{r}_{uv} = -\vec{m}_u\vec{r}_v = \frac{\vec{r}_{uv}\vec{r}_u\vec{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}};$$

$$N = \vec{m}\vec{r}_{vv} = -\vec{m}_v\vec{r}_v = \frac{\vec{r}_{vv}\vec{r}_u\vec{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}};$$

$\vec{m}$ – единичный вектор нормали к поверхности, $m = \dfrac{\left[\vec{r}_u, \vec{r}_v\right]}{\left|\left[\vec{r}_u, \vec{r}_v\right]\right|}$.

$\vec{r}_{uu} = \left\{-a\cos v\sin u, -a\sin u\sin v, -a\cos u(ctg^2 u + 2)\right\}$;

$\vec{r}_{uv} = \left\{-a\sin v\cos u, a\cos u\cos v, 0\right\}$;

$\vec{r}_{vv} = \left\{-a\cos v\sin u, -a\sin u\sin v, 0\right\}$;

Тогда

$$\vec{r}_{uu}\vec{r}_u\vec{r}_v = \begin{vmatrix} -a\sin u\cos v & -a\sin u\sin v & -a\cos u(ctg^2 u + 2) \\ a\cos u\cos v & a\cos u\sin v & actgu\cos u \\ -a\sin u\sin v & a\sin u\cos v & 0 \end{vmatrix} = -a^3 ctgu\cos u;$$

$$\vec{r}_{uv}\vec{r}_u\vec{r}_v = \begin{vmatrix} -a\sin v\cos u & -a\cos u\cos v & 0 \\ a\cos u\cos v & a\cos u\sin v & actgu\cos u \\ -a\sin u\sin v & a\sin u\cos v & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\vec{r}_{vv}\vec{r}_u\vec{r}_v = \begin{vmatrix} -a\sin u\cos v & -a\sin u\sin v & 0 \\ a\cos u\cos v & a\cos u\sin v & actgu\cos u \\ -a\sin u\sin v & a\sin u\cos v & 0 \end{vmatrix} = a^3\cos^2 u\sin u.$$

Таким образом,



$$L = \frac{\vec{r}_{uu}\vec{r}_u\vec{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}} = -actgu;$$

$$M = \frac{\vec{r}_{uv}\vec{r}_u\vec{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}} = 0;$$

$$N = \frac{\vec{r}_{vv}\vec{r}_u\vec{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}} = a\cos u\sin u.$$

Вторая квадратичная форма псевдосферы имеет вид:

$\varphi_2 = -actgudu^2 + a\sin u\cos udv^2$.

*Ответ:* $\varphi_1 = a^2 ctg^2 udu^2 + a^2\sin^2 udv^2$,

$\varphi_2 = -actgudu^2 + a\sin u\cos udv^2$.

***Пример 2*** Найти угол между кривыми $u = \pm v$ на поверхности $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = v$.

*Решение.* Найдём точку пересечения кривых $u = v$ и $u = -v$. Имеем $u = -v$, следовательно, $u = 0$ и $v = 0$. Точка $A(0;0)$ является точкой пересечения данных кривых.

Вычислим коэффициенты первой квадратичной формы поверхности. Для этого найдём:

$\vec{r}_u = \{\cos v, \sin v, 0\}$;

$\vec{r}_v = \{-u\sin v, u\cos v, 1\}$;

Тогда

$E = \vec{r}^2_u = \cos^2 v + \sin^2 v = 1$

$F = \vec{r}_u\vec{r}_v = -u\sin v\cos v + u^2\cos v\sin v = 0$,

$G = \vec{r}_v^2 = u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v + 1 = u^2 + 1.$

Пусть $\varphi$ – угол между этими кривыми. Тогда

$$\cos\varphi = \frac{Ed_1ud_2u + F(d_1ud_2v + d_1vd_2u) + Gd_1vd_2v}{\sqrt{h_1}\sqrt{h_2}},$$

где $h_1 = Ed_1u^2 + 2Fd_1ud_1v + Gd_1v^2$,

$h_2 = Ed_2u^2 + 2Fd_2ud_2v + Gd_2v^2$,

$d_iu$ , $d_iv$ – дифференциалы функций $u$ и $v$ взятые из уравнений $u = u_i(t)$ и $v = v_i(t)$, $i = 1,2$, соответственно первой и второй линий.

Параметризуем данные кривые следующим образом

$u_1(t) = t \qquad v_1(t) = t$

$u_2(t) = -t \qquad v_2(t) = t$

Очевидно, в точке пересечения $t = 0$, $d_1u = d_1v = dt$, $d_2u = -dt$, $d_2v = dt$.

Поэтому,

$h_1 = dt^2 + (1+t^2)dt^2 = (2+t^2)dt^2 = h_2$ .

Таким образом

$$cos\varphi = \frac{-dt^2 + (1+t^2)dt^2}{(2+t^2)dt^2} = \frac{t^2}{2+t^2}.$$

В точке пересечения $A(t=0), cos\varphi = 0$ и $\varphi' = \frac{\Pi}{2}$.

*Ответ:* $\varphi = \frac{\Pi}{2}$.

***Пример 3*** Найти выражение для полной кривизны поверхности, отнесённой к таким координатам, в которых первая квадратичная форма имеет вид $\varphi_1 = ds^2 = du^2 + G(u;v)dv^2$.

*Решение.* Воспользуемся формулой Гаусса

$$K = -\frac{1}{4(EG-F^2)^2}\begin{vmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{vmatrix} - \frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\left\{\left(\frac{E_v - F_u}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_v - \left(\frac{F_v - G_u}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_u\right\}.$$

Поскольку $E=1, F=0, G=G(u,v)$, то

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{G}}\left\{-\left(\frac{G_u}{\sqrt{G}}\right)_u\right\} = -\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{G_u}{2\sqrt{G}}\right)_u;$$

Нетрудно заметить, что $\frac{G_u}{2\sqrt{G}} = \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}$.



Таким образом, $K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^3\sqrt{G}}{\partial u^2}$.

*Ответ:* $K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^3\sqrt{G}}{\partial u^2}$.

***Пример 4*** Вычислим полную и среднюю кривизны гиперболического параболоида: $xy=az$.

*Решение.* Выразив явно $z$ как функцию переменных $x$ и $y$, найдём коэффициенты первой и второй квадратичных форм.

$z = \frac{xy}{a}$. Поскольку $E = 1 + z_x^2$, $F = z_xz_y$, $G = 1 + z_y^2$,

$L = \frac{z_{xx}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$, $M = \frac{z_{xy}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$, $N = \frac{z_{yy}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$, то

$E = 1 + \frac{y^2}{a^2}$, $F = \frac{xy}{a^2}$, $G = 1 + \frac{x^2}{a^2}$, $L = 0$, $M = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2+y^2}}$, $N = 0$.

Так как $K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}$, $H = \frac{EN+LG-2FM}{2(EG-F^2)}$, то

$$K = -\frac{a^2}{(a^2+x^2+y^2)^2}, \quad H = -\frac{xy}{(a^2+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

*Ответ:* $K = -\frac{a^2}{(a^2+x^2+y^2)^2}$, $H = -\frac{xy}{(a^2+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

## Задачи

**1** Вычислить первую и вторую квадратичные формы поверхностей:

1.1 $x = R\cos u\cos v, y = R\sin u\cos v, z = R\sin v$;

1.2 $x = a\cos v, y = a\sin v, z = \varphi(u)$;

1.3 $x = \frac{a}{2}\left(v + \frac{1}{v}\right)\cos u,\ y = \frac{b}{2}\left(v + \frac{1}{v}\right)\sin u,\ z = \frac{c}{2}\left(v - \frac{1}{v}\right)$;

1.4 $x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2, z = uv;$

1.5 $x = a\cos u \cos v, y = b\sin u \cos v, z = c\sin v$;

1.6 $x = a\dfrac{uv+1}{u+v}, y = b\dfrac{v-u}{v+u}, z = c\dfrac{uv-1}{u+v};$

1.7 $x = v\sqrt{p}\cos u, y = v\sqrt{q}\sin u, z = \dfrac{v^2}{2};$

1.8 $x = \dfrac{a}{2}\left(v - \dfrac{1}{v}\right)\cos u, y = \dfrac{b}{2}\left(v - \dfrac{1}{v}\right)\sin u, z = \dfrac{c}{2}\left(v + \dfrac{1}{v}\right);$

1.9 $x = (v+u)\sqrt{p}, y = (u-v)\sqrt{q}, z = 2uv;$

1.10 $x = av\cos u, y = bv\sin u, z = cv;$

1.11 $x = a\cos u, y = b\sin u, z = v;$

1.12 $x = \dfrac{a}{2}\left(u + \dfrac{1}{u}\right), y = \dfrac{b}{2}\left(u - \dfrac{1}{u}\right), z = v;$

1.13 $x = 2pu^2, y = 2pu, z = v;$

1.14 $x = (a + b\cos v)\cos u, y = (a + b\cos v)\sin u, z = b\sin v;$

1.15 $x = v\cos u, y = v\sin u, z = \text{к}u$ .

**2** Найти:

2.1 Угол между линиями $v = 2u$ и $v = -2u$ на поверхности, имеющей первую квадратичную форму $ds^2 = du^2 + dv^2$ .

2.2 Угол между линиями $v = u + 1$ и $v = 3 - u$ на поверхности $x = u\cos v, y = u\sin v, z = u^2$ .

2.3 Периметр криволинейного треугольника $u = \dfrac{1}{2}av^2$, $v = 1$, расположенного на поверхности, у которой $ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$ .

2.4 Под каким углом пересекаются линии $u + v = 0$, $u - v = 0$ на прямом геликоиде $x = u\cos v, y = u\sin v, z = av$ .

2.5 Площадь криволинейного треугольника $u = \pm av, v = 1$, расположенного на поверхности с первой квадратичной формой $ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$ .

2.6 На поверхности с первой квадратичной формой $ds^2 = du^2 + sh^2 u dv^2$ длину дуги линии $u = v$ между точками $M_1(u_1; v_1)$ и $M_2(u_2; v_2)$ .

2.7 Площадь четырёхугольника на прямом геликоиде $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av$ , ограниченного линиями $u = 0, u = a, v = 0, v = 1$ .

2.8 Угол между кривыми $v = 1$ и $u = \dfrac{1}{2}v^2$ на поверхности $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = v$ .

2.9 Длины сторон треугольника $0 \le u \le shv,\ 0 \le v \le v_0$ на поверхности $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = v$ ;

**3** Вычислить:

3.1 На поверхности $x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2, z = uv$ задана линия $v = au$ . Вычислить длину дуги линии между точками её пересечения с линиями $u = 1, u = 2$ .

3.2 На прямом геликоиде $x = u\cos v, y = u\sin v, z = av$ заданы линии $v = ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + c$ . Вычислим длины дуг этих линий между двумя точками $M_1(u_1; v_1)$ и $M_2(u_2; v_2)$ .

3.3 Площадь поверхности тора $x = (a + b\cos v)\cos u,\ y = (a + b\cos v)\sin u,\ z = b\sin v$ , $0 \le u, v \le 2\pi$ .

3.4 Площадь треугольника $0 \le u \le shv,\ 0 \le v \le v_0$ на поверхности $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = v$ .

3.5 Дифференциал длины дуги для линий $u = 2, v = 1, v = au$ на поверхности $x = u^2 + v^2,\ y = u^2 - v^2,\ z = uv$ .

**4** Указать, какая из приведённых квадратичных форм может служить первой квадратичной формой поверхности:

а) $ds^2 = du^2 + 4dudv + dv^2;$

б) $ds^2 = du^2 + 4dudv + 4dv^2;$

в) $ds^2 = du^2 - 4dudv + 6dv^2;$

г) $ds^2 = du^2 + 4dudv - 2dv^2$ .

**5** Вычислить главные кривизны следующих поверхностей:

5.1 $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av;$

5.2 $x = u^2 + v^2,\ y = u^2 - v^2,\ z = uv$ в точке $M(u = 1;\ v = 1);$

5.3 $z = xy$ в точке $M(1; 1; 1);$

5.4 $\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z$ в точке $M(0; 0; 0); ;$

5.5 $x = 2pu^2,\ y = 2pu,\ z = v$ в точке $M(u = 1;\ v = 1);$

5.6 $x = \dfrac{a}{2}\left(u + \dfrac{1}{u}\right),\ y = \dfrac{b}{2}\left(u - \dfrac{1}{u}\right),\ z = v$ в точке $M(u = 1;\ v = 1);$

5.7 $x = v\sqrt{p}\cos u,\ y = v\sqrt{q}\sin u,\ z = \dfrac{v^2}{2}$ в точке $M(u = \pi;\ v = 1);$

5.8 $x = a\dfrac{uv + 1}{u + v},\ y = b\dfrac{v - u}{v + u},\ z = c\dfrac{uv - 1}{u + v}$ в точке $M(u = 1;\ v = 2);$

5.9 $x = \dfrac{a}{2}\left(v - \dfrac{1}{v}\right)\cos u,\ y = \dfrac{b}{2}\left(v - \dfrac{1}{v}\right)\sin u,\ z = \dfrac{c}{2}\left(v + \dfrac{1}{v}\right)$ в точке $M(u = \pi;\ v = 2);$

5.10 $x = (2 + 3\cos v)\cos u,\ y = (2 + 3\cos v)\sin u,\ z = 3\sin v$ в точке $M(u = 0;\ v = 0);$

5.11 $x = v\cos u,\ y = v\sin u,\ z = 5u$ в точке $M(u = 0;\ v = 1);$

5.12 $x = (v + u)\sqrt{p},\ y = (u - v)\sqrt{q},\ z = 2uv$ в точке $M(u = 1;\ v = 1);$

5.13 $x = 2\cos u,\ y = 3\sin u,\ z = u$ в точке $M(u = 0;\ v = 1);$

5.14 $x = 9\cos u\cos v,\ y = 9\sin u\cos v,\ z = 9\sin v$ в точке $M(u = 0;\ v = 0);$

5.15 $x = 4\cos u\cos v,\ y = 9\sin u\cos v,\ z = 16\sin v$ в точке $M(u = 0;\ v = \pi).$

**6** Найти:

6.1 Полную кривизну поверхности, первая квадратичная форма которой имеет вид $ds^2 = du^2 + e^{2u}dv^2$.

6.2 Полную кривизну поверхности, заданной уравнением $F(x; y; z) = 0$.

6.3 Полную и среднюю кривизну поверхности $z = f(x; y)$.



6.4 Полную кривизну в произвольной точке поверхности $x = x(u),\ y = \rho(u)\cos\varphi,\ z = \rho(u)\sin\varphi,\ \rho(u) > 0$.

6.5 Полную и среднюю кривизны поверхности $x = (v + u)\sqrt{p},\ y = (u - v)\sqrt{q},\ z = 2uv$.

6.6 Полную кривизну поверхности $\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z$.

6.7 Полную и среднюю кривизны поверхности $z = xy$.

6.8 Среднюю кривизну круглого цилиндра, радиус которого равен $a$.

6.9 Омбилические точки поверхности

а) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1,\ (a > b > c > 0)$;

б) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$;

в) $xyz = a^3$.

**7** Вычислить:

7.1 Гауссову и среднюю кривизну на поверхности, задаваемой уравнением $z = f(x) + g(y)$.

7.2 Среднюю кривизну поверхности $x = au\cos v,\ y = au\sin v,\ z = bv, a > 0,\ b \neq a$

7.3 Полную и среднюю кривизну винтовой поверхности $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = u + v$.

7.4 Полную и среднюю кривизну поверхности $x = a\cos u\cos v,\ y = b\sin u\cos v,\ z = c\sin v$.

7.5 Показать, что средняя кривизна геликоида $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av$ равна нулю, вычислить полную кривизну.

7.6 Доказать, что полная кривизна поверхности с первой квадратичной формой $ds^2 = \dfrac{dx^2 + dy^2}{(x^2 + y^2 + c)^2}$ постоянна.

7.7 Полную и среднюю кривизну поверхности $z = x^2y$.

### 2.5 Элементы теории поля. Тензоры

**Вопросы для самоконтроля**

1 Скалярные и векторные поля. Производная скалярного поля по направлению.

2 Градиент, дивергенция, ротор.

3 Примеры тензоров.

4 Общее определение тензора.

5 Операции над тензорами (перестановка индексов; сложение, умножение, свёртывание).

6 Кососимметрические тензоры.

7 Поднятие и опускание индексов.

8 Внешний дифференциал формы.

9 Ковариантное дифференцирование. Символы Кристоффеля.

10 Геодезические линии.

11 Понятие дифференцируемого многообразия.

**Примеры решения и оформления задач**

***Пример 1*** Найти поверхность уровня скалярного поля $u = 2x^2 - 3y^2 + 16x - 18y - 12z + 43$, проходящую через точку $M(-1; 1; 1)$;

*Решение.* Совокупность поверхностей уровня данного поля определяется уравнением

$2x^2 - 3y^2 + 16x - 18y - 12z + 43 = 0$.

Подставляя координаты точки *M* в левую часть уравнения, среди поверхностей встречаем ту, которая проходит через данную точку. Имеем $2 - 3 - 16 - 18 - 12 + 43 = c, \quad c = -4$.

Следовательно, уравнение искомой поверхности имеет вид $2x^2 - 3y^2 + 16x - 18y - 12z + 47 = 0$.

Выделяя полные квадраты, получаем

$2(x+4)^2 - 3(y+3)^2 = 12(z+1)$ или $\dfrac{(x+4)^2}{3} - \dfrac{(y+3)^2}{2} = 2(z+1)$.

Итак, поверхностью уровня является гиперболический параболоид $\dfrac{X^2}{3} - \dfrac{Y^2}{2} = 2Z$, где $X = x+4, Y = y+3, Z = z+1$.

***Пример 2*** Найти производную поля $u = x^2y - 3yxz + xz^2y^2$ в точке $M(1; 2; -1)$ по направлению вектора $\vec{a} = (1; \sqrt{2}; 1)$.

*Решение.* Частные производные функции *u* в точке *M* имеют значения

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = \left.(2xy - 3yz + y^2z^2)\right|_M = 14,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = \left.(x^2 - 3xz + 2xyz^2)\right|_M = 8,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = \left.(-3xy + 2xy^2z)\right|_M = -14.$$

Единичный вектор, совпадающий по направлению с вектором $\vec{a}$, равен

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right).$$

Тогда $\dfrac{\partial u(M)}{\partial \vec{e}} = 14 \cdot \dfrac{1}{2} + 8 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} + (-14) \cdot \dfrac{1}{2} = 4\sqrt{2}$.

*Ответ:* $\dfrac{\partial u(M)}{\partial \vec{e}} = 4\sqrt{2}$.

***Пример 3*** Найти векторную линию векторного поля $\vec{a} = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j} + b\,\vec{k}$, $b = const$, проходящую через точку $M(1; 0; 0)$.

*Решение.* Система дифференциальных уравнений векторных линий имеет вид: $\dfrac{dx}{-y} = \dfrac{dy}{x} = \dfrac{dz}{b}$.

Решаем ее: $\dfrac{dx}{-y}=\dfrac{dy}{x}$, $xdx+ydy=0$, $x^2+y^2=c_1^2$, или в параметрическом виде $x=c_1\cos t, y=c_1\sin t;$

$$\frac{dy}{x}=\frac{dz}{b},\quad \frac{dz}{b}=\frac{c_1\cos t dt}{c_1}\cos t,\quad dz=bdt, z=bt+c_2.$$

Так как векторная линия проходит через точку $M(1;0;0)$, то легко находим, что постоянные интегрирования $c_1=1,\ c_2=0.$

Уравнения векторной линии поля $\vec{a}$, проходящей через точку $M$, имеют вид $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=bt$ (винтовая линия).

*Ответ:* $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=bt$.

***Пример 4*** Доказать справедливость следующей формулы: $grad(cu)=c\,grad u, c=const.$

*Решение.* Согласно определению градиента функции $f$, имеем

$$grad f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}.$$

Отсюда,

$$grad(cu)=\frac{\partial(cu)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial(cu)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial(cu)}{\partial z}\vec{k}=c\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+c\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+c\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}=$$

$$=c\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right)=c\,grad u.$$

Таким образом, $grad(cu)=c\,grad u.$

***Пример 5*** Показать, что смешанное произведение $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ векторов в трёхмерном пространстве задаётся тензором типа $(0;3)$.

*Решение.* Поскольку смешанное произведение обладает свойством линейности по каждому сомножителю, то оно определяется заданием смешанных произведений базисных векторов $c_{ikl}=\vec{e}_i\,\vec{e}_k\,\vec{e}_l$.

Если $\vec{a}=\xi^i\vec{e}_i$, $\vec{b}=\eta^k\vec{e}_k$, $\vec{c}=\zeta^l\vec{e}_l$, то $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=c_{ikl}\xi^i\eta^k\zeta^l$. При замене базиса будем иметь:



$$c'_{ikl}=\vec{e}'_i\,\vec{e}'_k\,\vec{e}'_l=A_i^h\vec{e}_h\,A_k^p\vec{e}_p\,A_l^q\vec{e}_q=c_{hpq}A_i^hA_k^pA_l^q,$$

$\vec{e}'_i=A_i^h\vec{e}_h,\quad \vec{e}'_k=A_k^p\vec{e}_p,\quad \vec{e}'_l=A_l^q\vec{e}_q$ – формулы перехода от базиса $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ к базису $\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\vec{e}'_3$.

Таким образом, $c'_{ikl}=c_{hpq}A_i^hA_k^pA_l^q$, что и требовалось доказать.

***Пример 6*** Векторное умножение в трёхмерном пространстве задаётся тензором типа $(1;2)$, компоненты $c_{ik}^l$ которого определяются условиями $\left[\vec{e}_i,\vec{e}_k\right]=c_{ik}^l\vec{e}_l$. Показать, что тензоры векторного и смешанного умножения связаны операцией опускания и поднимания индекса.

*Решение.* Имеет место тождество $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\vec{a}\left[\vec{b},\vec{c}\right]$. В координатах это имеет вид: $c_{ikl}\xi^i\eta^k\zeta^l=g_{ih}\xi^ic_{kl}^h\eta^k\zeta^l$, т.е. $c_{ikl}=g_{ih}c_{kl}^h$.

## Задачи

**1** Найти:

а) линии уровня плоских скалярных полей (рассматриваемых только на плоскости xOy);

б) поверхности уровня скалярных полей;

1.1 а) $u=\dfrac{y}{x^2};$

б) $u=x^2+y^2-z^2;$

1.2 а) $u=x^2+y^2;$

б) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2};$

1.3 а) $u=\dfrac{2x}{x^2+y^2};$

б) $u=\sqrt{x^2+y^2+(z+8)^2}+\sqrt{x^2+y^2+(z-8)^2};$

1.4 а) $u=\dfrac{2x-y+1}{x^2}$;

б) $u=x+y+z$;

1.5 а) $u=x^2-y^2$;

б) $u=\dfrac{x^2+4z^2}{z}$.

**2** Вычислить производную скалярного поля $u$ в точке $M$ по направлению вектора $\vec{a}$.

2.1 $u=5x^2y^2-7y^2xz+5xzy$, $M(1;1;1)$, $\vec{a}=(8;4;8)$;

2.2 $u=\ln(3-x^2)+y^2xz$, $M(1;3;2)$, $\vec{a}=(-1;2;-2)$;

2.3 $u=xy^2+z^2-xzy$, $M(1;1;2)$, $\vec{a}=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{1}{2}\right)$;

2.4 $u=y\ln(1+x^2)-\operatorname{arctg}z$, $M(0;1;1)$, $\vec{a}=(2;-3;-2)$;

2.5 $u=5x^2y^2z-\ln(z-1)$, , $M(1;1;2)$, $\vec{a}=(5;-6;2\sqrt{5})$.

**3** Найти векторные линии следующих векторных полей $\vec{a}$:

3.1 $\vec{a}=(cy;cx;0)$, $c=const$;

3.2 $\vec{a}=(x;y;z)$;

3.3 $\vec{a}=(x;y;2z)$;

3.4 $\vec{a}=(x^2;y^2;z^2)$;

3.5 $\vec{a}=(0;2z;3y)$.

**4** Доказать справедливость следующих формул:

4.1 а) $grad\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\,grad\,u-u\,grad\,v}{v^2}$;

б) $div(\vec{a}+\vec{b})=div\,\vec{a}+div\,\vec{b}$;

в) $rot(u\vec{a})=u\,rot\,\vec{a}+\left[grad\,u,\vec{a}\right]$.

4.2 а) $grad\,f(u)=f'(u)+grad\,u$;

б) $div(u\vec{a})=u\,div\,\vec{a}+\vec{a}\,grad\,u$;

в) $rot(\vec{a}+\vec{b})=rot\,\vec{a}+rot\,\vec{b}$.

4.3 а) $grad(u+v)=grad\,u+grad\,v$;

б) $div(u\vec{c})=\vec{c}\,grad\,u, \vec{c}=const$;

в) $div\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{b}\,rot\,\vec{a}-\vec{a}\,rot\,\vec{b}$.

4.4 а) $grad\,u^n=nu^{n-1}grad\,u$;

б) $div(c\vec{a})=c\,div\,\vec{a}, c=const$;

в) $rot(grad\,u)=\vec{0}$.

4.5 а) $grad(uv)=v\,grad\,u+u\,grad\,v$;

б) $div\,\vec{c}=0, \vec{c}=const$;

в) $div(rot\,\vec{a})=0$.

**5** Показать, что тензорами являются:
а) вектор;
б) ковектор;
в) скалярное произведение векторов;
г) скалярное произведение ковекторов;
д) линейный оператор на векторах (ковекторах);

**6** Вычислить компоненты метрического тензора на плоскости в полярной системе координат; в $R^3$ в системе координат:
а) цилиндрической;
б) сферической.

**7** Вычислить компоненты метрического тензора на сфере $S^2$ в сферической системе координат.

**8** Проверить, что перестановка верхнего и нижнего индексов $T^{\dots ik\dots}_{\dots jl\dots} \to T^{\dots ik\dots}_{\dots jl\dots}$ не есть тензорная операция.

**9** Тензор 2-го ранга называется невырожденным, если соответствующая матрица невырожденна. Показать, что для невырожденного тензора 2-го ранга обратная матрица также будет тензором.

**10** Пусть $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ – кососимметрический тензор в трёхмерном евклидовом пространстве, где $T_{i_1\dots i_n} = \varepsilon_{i_1\dots i_n} T_{12\dots n}$. Доказать:

а) $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\lambda\mu\nu} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\lambda} & \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} \\ \delta_{\beta\lambda} & \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} \\ \delta_{\gamma\lambda} & \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} \end{vmatrix}$;

б) $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\lambda\mu\nu} = \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\lambda}$;

в) $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = 2\delta\alpha\lambda$;

г) $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = 6$.

(везде подразумевается суммирование по повторяющимся индексам); $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера.

**11** Показать, что скалярное произведение векторов в евклидовом пространстве задаётся тензором типа $(0,2)$.

**12** Пусть $\omega_1, \omega_2$ – дифференциальные формы степеней $p$ и $q$ соответственно. Доказать, что

$\alpha(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$.

**13** Показать, что коэффициенты $g_{ik}, b_{ik}$ первой и второй квадратичной формы поверхности, заданной параметрически $\vec{r} = \vec{r}(u', u^2);\ g_{ik} = \left(\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u^i}, \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u^k}\right);\ b_{ik} = \left(\dfrac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^i \partial u^k}, \vec{n}\right)$ являются компонентами симметричных тензорных полей типа $(0,2)$. Здесь $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности.



**14** Пусть дан тензор $C\{C^i_k\}$ типа $(1,1)$. При помощи операций последовательного умножения тензора С на себя и «полного свёртывания» определяется последовательность скаляров $C^i_i, C^k_i C^i_k, C^k_i C^l_k C^i_l, \dots$. Выразить эти скаляры через корни характеристического уравнения матрицы $C^i_k$.

**15** Считая, что градиент функции $f$ есть композиция двух операций – взятие частных производных и операции поднятия индексов – записать градиент функции:

а) в полярных координатах;

б) в цилиндрических координатах;

в) в сферических координатах.

**16** Вычислить коэффициент Кристоффеля заданной поверхности.

**17** Найти геодезические линии и Гауссову кривизну полуплоскости Пуанкаре, т.е. полуплоскости $\upsilon > 0$ с метрикой $ds^2 = \dfrac{du^2 + d\upsilon^2}{\upsilon^2}$.

**18** Дифференциальная форма $\Omega$ называется замкнутой, если $d\Omega = 0$. При каких значениях постоянных $(a,b,c)$ форма $\Omega = z^a(x-y)dx \wedge dy + x^b(y-z)dy \wedge dz + y^c(z-x)dz \wedge dx$ будет замкнутой?

**19** Вычислить внешний дифференциал следующих дифференциальных форм:

а) $z^2 dx \wedge dy + (z^2 + 2y)dx \wedge dz;$

б) $13xdx + y^2 dy + xyzdz;$

в) $(x + 2y^3)(dz \wedge dx + \frac{1}{2} dy \wedge dx)$.

## Литература

1 Дубровин, В. А.Современная геометрия [Текст] : Методы и приложения: [учебное пособие для студентов университетов] / Б. А. Дубравин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. – М.: Наука, 1979. – 759 с.

2 Мищенко, А. С. Курс дифференциальной геометрии и топологии [Текст] : учебник для студентов механико-математических специальностей университетов / А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко. – М.: Изд-во МГУ, 1980. – 439 с.

3 Белько, И. В. Дифференциальная геометрия [Текст] : учебное пособие для студентов высших учебных заведений / И. В. Белько [и др.]. – Мн.: Изд-во БГУ, 1982. – 255 с.

4 Сизый, С. В. Лекции по дифференциальной геометрии [Текст] : учебное пособие для математических специальностей / С. В. Сизый. – Екатеринбург: Изд-во Уральского госуниверситета, 2005. – 331 с.

5 Норден, А. П. Краткий курс дифференциальной геометрии [Текст] : учебное пособие для университетов и педагогических институтов / А. П. Норден. – М.: Физматгиз, 1958. – 224 с.

6 Щербаков, Р. Н. Краткий курс дифференциальной геометрии [Текст] : учебное пособие для университетов и пединститутов / Р. Н. Щербаков, А. А. Лучинин. – Томск: Изд-во Томского университета, 1974. – 248 с.

7 Мищенко, А. С. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии [Текст] : учебное пособие для студентов механико-математических специальностей университетов / А. С. Мищенко, Ю. П. Соловьев, А. Т. Фоменко. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – 184 с.

8 Воднев, В. Т. Сборник задач и упражнений по дифференциальной геометрии [Текст] : учебное пособие для математических специальностей университетов и пединститутов / В. Т. Воднев [и др.]. – Мн.: Вышэйшая школа, 1970. – 374 с.

9 Васильев, А. М. Дифференциальная геометрия [Текст] : методические указания для студентов-заочников математических факультетов университетов / А. М. Васильев, Ю. П. Соловьев. – М.: МГУ, 1981. – 120 с.

10 Селькин, М. В. Лабораторный практикум по курсу «Дифференциальная геометрия» [Текст] : для студентов математических факультетов / М. В. Селькин, В. Г. Сафонов. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 1994. – 67 с.