СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Дифференциальная геометрия – это богатая и стройная система знаний, объединяющая в себе результаты и методы многих разделов математики. Это наука, которая изучает разнообразные пространственные формы (в первую очередь – кривые и поверхности), представляет собой переплетение и использование результатов алгебры, математического анализа, топологии, теории функций и др. Ее выводы существенно формируют наши естественнонаучные и философские взгляды на свойства окружающего нас пространства. Постепенное развитие дифференциальной геометрии привело к созданию общей теории относительности. Общая теория относительности А. Эйнштейна, пришедшая на смену ньютоновскому классическому естествознанию, является практическим приложением результатов, полученных ранее в дифференциальной геометрии. Кроме того, бурное развитие теоретической физики и механики в 20 в. привело к пониманию фундаментальности геометрических представлений в этих науках. Достаточно указать такие области, как механика сплошных сред, электродинамика, где геометрические методы являются основой математического аппарата.

Настоящее пособие дополняет имеющуюся литературу по дифференциальной геометрии и является основой для практического усвоения данного курса. Основные понятия дифференциальной геометрии, краткая историческая справка, примеры решения и оформления задач, перечень заданий для самостоятельной работы – разделы данного практического пособия.

1 Основные сведения

1.1 Общие понятия геометрии

Геометрия разворачивается в некотором пространстве, которое состоит из точек $P, Q, \ldots$. В этом пространстве можно обычным способом ввести декартовы координаты. Введение декартовых координат в пространство означает, что каждой точке пространства поставлен в соответствие набор действительных чисел $x^1, x^2, \ldots, x^n$, называемых ее координатами, причем выполняются следующие свойства: 1) разным точкам пространства соответствуют разные наборы координат; 2) каждому набору $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, где x^i – любые действительные числа, должна соответствовать какая-то точка изучаемого пространства.

Пространство, в котором введены декартовы координаты $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ так, что выполняются перечисленные выше свойства, называется <u>n-мерным декартовым пространством</u> и обозначается через R^n. Число n называется числом измерений или размерностью пространства.

Пусть декартовы координаты в n-мерном пространстве таковы, что если точке P соответствуют ее координаты $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, а точке Q – $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$, то квадрат длины прямолинейного отрезка, соединяющего точки P и Q, равен $l^2 = \sum_{i=1}^{n}(x^i - y^i)^2$. Тогда пространство называется <u>евклидовым</u>, а декартовы координаты с такими свойствами называются <u>евклидовыми координатами</u>.

С точками евклидова пространства удобно связывать векторы. Вектор, ведущий из начала координат O в изучаемую точку P, называется <u>радиус-вектором</u> этой точки. Декартовы координаты $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ точки P называются координатами вектора. Если заданы два вектора $\vec{\xi} = (x^1, \ldots, x^n)$ и $\vec{\eta} = (y^1, \ldots, y^n)$, то их <u>евклидовым скалярным произведением</u> называется число $\vec{\xi} \cdot \vec{\eta} = (\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$ (1).

Оно обладает свойствами:

1) $(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = (\vec{\eta}, \vec{\xi})$;

2) $(\lambda_1 \vec{\xi}_1 + \lambda_2 \vec{\xi}_2, \vec{\eta}) = \lambda_1(\vec{\xi}_1, \vec{\eta}) + \lambda_2(\vec{\xi}_2, \vec{\eta})$, где λ_1, λ_2 – любые

действительные числа;

3) $(\vec{\xi},\vec{\xi})>0,$ если $\vec{\xi}\neq 0$.

Декартовы координаты $x^1, \ldots, x^n$, в которых скалярное произведение имеет вид (1), называются евклидовыми координатами.

Пусть U – некоторая область в n-мерном евклидовом пространстве E^n с декартовыми координатами $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, а E_1^n – еще одно n-мерное евклидово пространство с декартовыми координатами $y^1, y^2, \ldots, y^n$. Регулярной криволинейной системой координат в области U евклидова пространства E^n называется система гладких (т.е. бесконечно дифференцируемых) функций $y^1(x^1, x^2, \ldots, x^n), \ldots, y^n(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, задающая взаимно однозначное отображение f области U на некоторую область V евклидова пространства E_1^n, причем якобиан

$$I(f)=det\begin{pmatrix}\frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial y^n}{\partial x^1}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial y^1}{\partial x^n} & \ldots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n}\end{pmatrix}$$

этого отображения отличен от нуля во всех точках области U. Таким образом, с каждой точкой P области U сопоставляется набор чисел $y^1(P),\ldots, y^n(P)$, называемых криволинейными координатами.

Пусть теперь в области U заданы две криволинейные системы координат $y^1(P),\ldots, y^n(P)$ и $z^1(P),\ldots, z^n(P)$. Это означает, что заданы два взаимно однозначных и взаимно дифференцируемых отображения f и g, что $f:U\to V\subset E_1^n(y^1,\ldots,y^n);\, g:U\to W\subset E_2^n(z^1,\ldots,z^n)$.

Так как отображения f и g взаимно однозначны, то можно рассмотреть соответствие, сопоставляющее координатам $(y^1(P), \ldots, y^n(P))$ точки P ее координаты $(z^1(P),\ldots, z^n(P))$. Это соответствие определяет отображение $F:V\to W; F: y^i(P)\to z^i(P)$, $1\le i\le n$. Очевидно $F=gf^{-1}$. Отображение F называется заменой координат в области U или отображением перехода от координат $(y)=(y^1(P),\ldots, y^n(P))$ к координатам $(z)=(z^1(P),\ldots, z^n(P))$.

Пусть E^n – евклидово пространство со скалярным произведением (,). Кривой γ в пространстве E^n, заданной в параметрическом виде, называется гладкое отображение $\gamma:[a,b]\to E^n$ отрезка $[a,b]$ в

E^n. Если $x^1, x^2, \ldots, x^n$ – декартовы координаты в E^n, то кривая γ задается набором n гладких функций $x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t)$, где параметр t пробегает отрезок $[a,b]$. Касательным вектором или вектором скорости кривой в точке t называется вектор $\vec{V}(t)=\left(\frac{dx^1}{dt},\ldots,\frac{dx^n}{dt}\right)$. Длиной кривой γ от точки $\gamma(a)$ до точки $\gamma(b)$ называется число $\ell=\int_a^b\sqrt{(\vec{v}(t),\vec{v}(t))}\,dt=\int_a^b|\vec{v}(t)|\,dt$. Если есть линия $x^i=f^i(t), i=1,\ldots,n$, и другая линия $x^i=g^i(t),\ i=1,\ldots,n$, пересекающиеся при $t=t_0$ (т.е. $f^i(t_0)=g^i(t_0),\ i=1,\ldots,n$), то углом между этими линиями в точке их пересечения при $t=t_0$ называется такой угол $\varphi(0\le\varphi<\pi)$, что имеет место равенство $\cos\varphi=\frac{(\vec{v},\vec{w})}{|\vec{v}||\vec{w}|}$,

где $\vec{V}=\left(\frac{df^1}{dt},\ldots,\frac{df^n}{dt}\right)_{t=t_0}$, $\vec{W}=\left(\frac{dg^1}{dt},\ldots,\frac{dg^n}{dt}\right)_{t=t_0}$.

На любой гладкой кривой (такой кривой, что вектор скорости $\vec{V}$ не обращается в нуль), можно выбрать параметр ℓ (размерность длины) так, чтобы вектор скорости был единичным: $|\vec{V}|=1$. Такой параметр ℓ называется натуральным. Для него $\int_a^b|\vec{v}|\,dt=b-a$, т.е. он равен длине отрезка кривой, который мы пробежали.

Пусть в области U задана произвольная криволинейная система координат $(y^1, y^2,\ldots,y^n)$ и пусть $\gamma(t)$ – некоторая гладкая кривая. Тогда переменные $y^1, y^2,\ldots,y^n$ являются гладкими функциями декартовых координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$ в области U, причем $det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)\neq 0$ в любой точке области. По теореме обратной функции переменные $x^1, x^2, \ldots, x^n$ в области U можно однозначно выразить в виде гладких функций от $y^1, y^2,\ldots,y^n$: $x^i=x^i(y^1, y^2,\ldots,y^n)$. Если $\gamma(t)=(x^1(t),\ldots,x^n(t))$, то $\frac{dx^i(t)}{dt} = \frac{dx^i(y^1(t),...,y^n(t))}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{dy^k}{dt}, 1 \le i \le n$. Значит,

$$\ell = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{dx^i(t)}{dt} \right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{dy^k}{dt} \right)^2} dt =$$

$$= \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{m,p=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial y^m} \frac{\partial x^i}{\partial y^p} \frac{dy^m}{dt} \frac{dy^p}{dt}} dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{m,p=1}^{n} g_{mp}(y^1,...,y^n) \frac{dy^m}{dt} \frac{dy^p}{dt}} dt,$$

где $g_{mp}(y^1,...,y^n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial y^m} \frac{\partial x^i}{\partial y^p}$.

Таким образом, длина кривой в криволинейных координатах $y^1, y^2,...,y^n$ определяется с помощью симметрической матрицы $G=(g_{mp})$, где g_{mp} – гладкие функции переменных $y^1, y^2,...,y^n$. Если F – отображение перехода от криволинейных координат (y) к декартовым (x) в области U, то $G = C\,C^t$, где $C = dF = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^i} \right)$ – матрица Якоби отображения F.

Пусть $(z^1,...,z^n)$ – еще одна система криволинейных координат в области U, а Φ – отображение перехода от системы (y) к системе (z). Отображение Φ записывается в виде $z^i = z^i(y^1,...,y^n), 1 \le i \le n$ и его дифференциал $d\Phi$ есть матрица Якоби $C = \left(\frac{\partial z^i}{\partial y^j} \right)$. Обозначим через $G(y)$ матрицу коэффициентов g_{mp} в системе координат (y), а через $G(z)$ – эту же матрицу в системе координат (z). Тогда $G(y) = C\,G(z)\,C^t$. Таким образом, при заменах координат матрица $G(z)$ преобразуется как матрица квадратичной формы. В частности, если исходные координаты (y) были декартовы, то $G(y)$ представляет собой единичную матрицу и, значит, в любой криволинейной системе координат (z) имеем $G(z) = C\,E\,C^t = C\,C^t$, где $C = \left(\frac{\partial y^i}{\partial z^j} \right)$.

Говорят, что в области U n-мерного пространства задана риманова метрика, если в каждой регулярной системе координат $(y^1, y^2,...,y^n)$ определен выбор гладких функций $g_{ij}(y)$, удовлетворяющий следующим условиям: а) $g_{ij}(y)=g_{ji}(y)$, т.е. матрица $G(y)=(g_{ij}(y))$ симметрична; б) матрица $G(y)$ невырожденна и положительно определена; в) при замене координат $F:(y) \to (z)$ матрица $G(y)$ преобразуется как матрица квадратичной формы: $G(z) = (dF)\,G(y)\,(dF)^t$, т.е. в новых координатах определяется набор функций $g'_{ij} = g'_{ji}(z^1,...,z^n)$, $i,j = 1,...,n$, причем $g'_{ij} = \frac{\partial y^k}{\partial z^i} g_{k\ell} \frac{\partial y^\ell}{\partial z^i}$.

Если в области U задана риманова метрика $G(y)=(g_{ij})$ и в системе координат $(y^1, y^2,...,y^n)$ задана некоторая гладкая кривая $\gamma(t) = (y^1(t),...,y^n(t))$, то ее длиной от точки $\gamma(a)$ до точки $\gamma(b)$ называется число $\ell = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(y) \frac{dy^i}{dt} \frac{dy^j}{dt}} dt$.

Пусть в области U заданы две кривые $\gamma_1(t) = (f^1(t),...,f^n(t))$ и $\gamma_2(t) = (g^1(t),...,g^n(t))$, которые пересекаются в некоторой точке при значении параметра $t = t_0$. Углом между кривыми $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ в точке $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ в данной римановой метрике называется такое число φ, что

$$\cos\varphi = \frac{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(y) \frac{df^i}{dt} \frac{dg^i}{dt}}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(y) \frac{df^i}{dt} \frac{df^j}{dt}} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(y) \frac{dg^i}{dt} \frac{dg^j}{dt}}}.$$

Часто вместо полной длины дуги записывают явную формулу для дифференциала дуги dS. Тогда, если метрическая матрица G имеет вид $G=(g_{ij})$, то в координатах (y) имеем, что $dS^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dy^i dy^j$ и величину dS^2 также называют метрикой.

Пусть $\vec{\xi} = (\xi^1,...,\xi^n)$ и $\vec{\eta} = (\eta^1,...,\eta^n)$ – два вектора в точке $P = (z_0^1,...,z_0^n)$. Тогда их скалярным произведением называется число $(\vec{\xi},\vec{\eta})$, равное $(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(z_0^1,...,z_0^n)\xi^i\eta^j = g_{ij}\xi^i\eta^j$. Будем говорить, что метрика $g_{ij}=g_{ji}(z)$ евклидова, если найдутся координаты

$(x^i,...,x^n), x^i = x^i(z)$, такие, что $det\left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right) \neq 0, g'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x^k}{\partial z^i}\frac{\partial x^k}{\partial z^j}$. Тогда в координатах (x) $g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } i = j \\ 0, \text{если } i \neq j \end{cases}$. Координаты (x) называются евклидовыми.

Говорят, что в области U n-мерного пространства задана псевдориманова (индефинитная) метрика, если в каждой регулярной системе координат $(y^1, y^2,...,y^n)$ определен набор гладких функций $g_{ij}(y)$, удовлетворяющий следующим условиям: 1) $g_{ij}(y)= g_{ji}(y)$; 2) матрица $G(y)$ невырождена; 3) при замене координат $F:(y) \to (z)$ матрица $G(y)$ преобразуется по правилу $G(z)=(dF)G(y)(dF)^t$. Псевдориманова метрика g_{ij} типа (p, q), где $p+q=n$, если p – положительный, q – отрицательный индексы инерции квадратичной формы $g_{ij}\xi^i\xi^j$. Если g_{ij} – псевдориманова метрика типа (p,q) и $g_{ij} = g_{ij}(z_0^1,...,z_0^n)$, то квадратичную форму $g_{ij}\xi^i\xi^j$ заменой $\xi^i = \lambda_k^i\varepsilon^k$ можно привести к виду $(\varepsilon^1)^2+(\varepsilon^2)^2+...+(\varepsilon^p)^2-(\varepsilon^{p+1})^2-...-(\varepsilon^{p+q})^2$, где $p+q=n$.

В псевдоевклидовой метрике длина кривой определяется так же, как и в случае римановой метрики.

Метрика $g_{ij}=g_{ij}(z)$ псевдоевклидова, если найдутся новые координаты $x^1,...,x^n, x^i = x^i(z), det\left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right) \neq 0$, такие, что

$$g_{ij} = \frac{\partial x^1}{\partial z^i}\frac{\partial x^1}{\partial z^j}+...+\frac{\partial x^p}{\partial z^i}\frac{\partial x^p}{\partial z^j}-\frac{\partial x^{p+1}}{\partial z^i}\frac{\partial x^{p+1}}{\partial z^j}-...-\frac{\partial x^{p+q}}{\partial z^i}\frac{\partial x^{p+q}}{\partial x^j},$$

где $p+q=n$. В этих новых координатах $g'_{ij}=0$ при $i \neq j$, $g'_{ii}=1$ при $i \leq p$, $g'_{ii}=-1$ при $i \geq p+1$. Координаты $(x^1,...,x^n)$ называются псевдоевклидовыми координатами типа (p, q), где $p + q = n$. В пространстве R^n можно ввести псевдоевклидову метрику типа (p, q), определив псевдоскалярное произведение векторов $\vec{\xi} = (\xi^1,...,\xi^n)$ и $\vec{\eta} = (\eta^1,...,\eta^n)$ формулой

$\left\langle \vec{\xi},\vec{\eta} \right\rangle_{p,q} = \xi^1\eta^1+...+\xi^p\eta^p-\xi^{p+1}\eta^{p+1}-...-\xi^{p+q}\eta^{p+q}$, где $p + q = n$. При этом псевдоевклидовыми будут обычные координаты $(x^1,...,x^n)$, и

пространство R^n с этой метрикой называется псевдоевклидовым пространством и обозначается $R^n_{p,q}$. Пространство $R^n_{1,3}$ – пространство Минковского (пространство специальной теории относительности).

Длина вектора $\vec{\xi}$ в псевдоевклидовом пространстве $R^n_{p,q}$ определяется по формуле $\left|\vec{\xi}\right|_{p,q} = \sqrt{\left\langle \vec{\xi},\vec{\xi} \right\rangle_{p,q}}$. Поэтому множества всех векторов, выходящих из любой точки, разбиваются на три непересекающихся подмножества:

1) времениподобные векторы, для которых $\left\langle \vec{\xi},\vec{\xi} \right\rangle_{p,q} < 0$;

2) изотропные или световые векторы, для которых $\left\langle \vec{\xi},\vec{\xi} \right\rangle_{p,q} = 0$;

3) пространственноподобные векторы, для которых $\left\langle \vec{\xi},\vec{\xi} \right\rangle_{p,q} > 0$.

Совокупность всех векторов $\vec{\xi}$ пространства R^n такая, что $\left|\vec{\xi}-\vec{a}\right| = \rho$ образует $(n-1)$-мерную сферу S^{n-1} с центром в конце вектора $\vec{a}$ (с центром в $\vec{a}$). В псевдоевклидовом пространстве $R^n_{p,q}$ также можно рассмотреть множество векторов $\vec{\xi}$ таких, что $\left|\vec{\xi}-\vec{a}\right|_{p,q} = \rho$. Но теперь ρ может быть вещественным, мнимым числом или нулем. Множество таких векторов (или, что то же самое, точек) называется псевдосферой типа (p,q) радиуса ρ с центром в $\vec{a}$ и обозначается $S^{n-1}_{p,q}$. Псевдосфера нулевого радиуса с центром в начале координат описывается уравнением $(x^1)^2+...+(x^p)^2-(x^{p+1})^2-...-(x^{p+2})^2=0$ и является конусом второго порядка в $R^n_{p,q}$ с вершиной в начале координат. Все векторы, выходящие из начала координат и лежащие на этом конусе, есть изотропные векторы; векторы, лежащие внутри конуса, времениподобные; векторы, лежащие вне конуса, пространственноподобные. Псевдосфера $S^{n-1}_{p,q}$ нулевого радиуса называется изотропным или световым конусом.

Пусть в n-мерном пространстве заданы две области: область U

с координатами $x^1,...,x^n$ и область V с координатами $y^1,...,y^n$. Пусть $f: U \to V$ – взаимно однозначное, взаимно-дифференцируемое отображение области U на V. Это означает, что координаты $y^1,...,y^n$ выражаются через $x^1,...,x^n$ с помощью гладких функций $y^i = y^i(x^i,...,x^n), i = 1,...,n$, причем $det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$ нигде не обращается в нуль (т.е. координаты $x^1,...,x^n$ можно выразить обратно через $y^1,...,y^n : y^j = y^j(x^i,...,x^n), j = 1,...,n$). Если $U=V$, то отображение f называется преобразованием области U. Таким образом, преобразование области U сводится к введению в ней новых координат, причем новые координаты можно всюду в области выразить через старые и наоборот. Множество всех преобразований области U образует группу.

Пусть в области U имеется некоторая метрика, задаваемая в координатах $x^1,...,x^n$ невырожденной симметрической матрицей $g_{ij} = g_{ji}(x^1,...,x^n)$. Если задано преобразование $x^i = x^i(y^1,...,y^n)$, то в координатах $y^1,...,y^n$ эта же метрика задается матрицей $g'_{ij} = g'_{ij}(y^1,...,y^n)$, где, как говорилось выше, $g'_{ij} = \sum_{k,\ell=1}^{n} \frac{\partial x^k}{\partial y^i} g_{k\ell} \frac{\partial x^\ell}{\partial y^j}$.

Преобразование $x^i = x^i(y^1,...,y^n)$ области U называется движением данной метрики, если $g'_{ij}(y^1,...,y^n) = g_{ij}(x^1(y),...,x^n(y))$. Другими словами, преобразование $x^i = x^i(y^1,...,y^n)$ является движением, если $g_{ij} = \sum_{k,\ell=1}^{n} \frac{\partial x^k}{\partial y^i} g_{k\ell} \frac{\partial x^\ell}{\partial y^j}$.

Если G – матрица метрики, f – преобразование области U, то это можно записать в матричном виде $G(y) = C\, G(x) C^t$, где $C = df^{-1}$.

Множество всех движений данной метрики образует группу, которая называется движением данной метрики.

Пусть задано пространство $R^n_{1,3}$. В специальной теории относительности постулируется, что пространство событий является

пространством Минковского (пространством $R^n_{1,3}$) с координатами ct, x, y, z, где c – скорость света в вакууме. Процесс жизни точечной частицы отождествляется с линией (мировой линией) в пространстве событий – множестве наборов $\{(t,x,y,z)\}$. А под событием понимается элементарный физический процесс, характеризующийся набором чисел (t,x,y,z), где t – момент времени, когда произошло событие, (x,y,z) – координаты места события. Пусть одно и то же событие произошло относительно одной инерциальной системы в момент времени t в точке с координатами (x,y,z), а относительно другой инерциальной системы – в момент времени t' в точке с координатами (x',y',z'). Формулы перехода от одной инерциальной системы к другой носят название преобразования Лоренца:

$$t' = \frac{t - \frac{V}{C^2}x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}};\quad x' = \frac{-Vt + x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}};\quad y' = y;\quad z' = z, \text{ где } V = \frac{x}{t}.$$

Обратное преобразование имеет вид:

$$t = \frac{t' + \frac{V}{C^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}};\quad x = \frac{Vt' + x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}};\quad y = y';\ z = z'.$$

1.2 Теория кривых

Непрерывной кривой в трехмерном евклидовом пространстве R^3 называется непрерывное отображение $\vec{r}:[a,b]\to R^3$ некоторого отрезка $[a,b]$, $a<b$, вещественной оси в пространство R^3. Здесь имеется в виду, что в R^3 задана декартова система координат (x^1,x^2,x^3) и точки из R^3 характеризуются их радиус-векторами относительно начала координат. Непрерывность отображения $\vec{r}(t)$ равносильна непрерывности числовых функций $x^i: t\to x^i(t), i=1,2,3$, где $\vec{r}(t)=(x^1(t),x^2(t),x^3(t))$ в базисе (x^1,x^2,x^3). Точка $\vec{r}(a)$ есть начало кривой $\vec{r}(t)$, а $\vec{r}(b)$ – конец ее. Будем говорить, что кривая $\vec{r}(t)$ проходит через точку $\vec{r}_0$, если существует значение t_0 параметра t такое, что $\vec{r}(t_0)=\vec{r}_0$.

Отображение $\vec{r}:[a,b]\to R^3$ называется гладкой кривой в R^3, если ее координатные функции $x^1(t),x^2(t),x^3(t)$ являются гладкими на $[a,b]$ функциями. (Числовая функция $t\to x(t)$, заданная на отрезке, гладкая, если на некотором открытом интервале, содержащем отрезок $[a,b]$, существует гладкая функция, совпадающая на $[a,b]$ с функцией $x(t)$).

Для любой гладкой кривой $\vec{r}(t)$ и любого $t\in[a,b]$ существует $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\vec{r}\,'(t)$, который называется вектором скорости или касательным вектором $\vec{r}(t)$ в точке t. Постоянный вектор $\vec{r}_0$ называется пределом переменного вектора $\vec{r}(t)$ при стремлении аргумента t к постоянному числу t_0, если $\lim\limits_{t\to t_0}|\vec{r}(t)-\vec{r}_0|=0$. Вектор $\vec{r}(t)$ непрерывен при $t=t_0$, если $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)$.

Гладкая кривая $\vec{r}:[a,b]\to R^3$ называется регулярной, если $\vec{r}\,'(t)\neq 0$ для всех $t\in[a,b]$. Кривая $\vec{r}$ называется бирегулярной, если для всякой внутренней точки t отрезка $[a,b]$ векторы $\vec{r}\,'(t)$ и $\vec{r}\,''(t)$ линейно независимы. Если каждому значению $t\in[a,b]$ соответствует одна точка на кривой и каждой точке на кривой – единственное значение параметра $t\in[a,b]$, то кривая называется простой.

Две кривые $\vec{r}_1:[a,b]\to R^3$ и $\vec{r}_2:[\alpha,\beta]\to R^3$ называются эквивалентными, если существует такая функция $\varphi(t)$, что $\varphi'(t)>0, \varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b, \vec{r}_1(t)=\vec{r}_2(\varphi(t))$ для всех $t\in[a,b]$. Будем говорить, что функция $\varphi(t)$ осуществляет замену параметра t. Класс эквивалентных кривых называется параметризованной кривой. Параметризация ℓ кривой $\vec{r}(\ell)$ называется натуральной, если $|\vec{r}\,'(\ell)|=1$. Всякая регулярная кривая допускает натуральную параметризацию. Пусть $\vec{r}(t)$ – некоторая регулярная кривая, $\vec{r}_0$ – некоторая ее точка, соответствующая значению параметра t_0. Касательной прямой к кривой $\vec{r}(t)$ в точке $\vec{r}_0$ называется прямая, проходящая через точку $\vec{r}_0$ и имеющая своим направляющим вектором вектор $\vec{r}\,'(t_0)$. Всякая прямая, проходящая через точку кривой перпендикулярно касательной в этой точке, называется нормалью этой кривой. Через всякую точку пространственной кривой проходит бесконечное множество нормалей, которые все расположены в одной плоскости, называемой нормальной плоскостью кривой. Нормаль кривой, имеющая своим направляющим вектором вектор $\vec{r}\,''(t)$, где t – натуральный параметр, называется главной нормалью кривой. Всякая плоскость, проходящая через касательную прямую кривой, называется ее касательной плоскостью. Касательная плоскость, проходящая через главную нормаль кривой, называется соприкасающейся плоскостью. Так как $\vec{r}_t\,'=\vec{r}_\ell\,'\ell_t'$ и $\vec{r}_t\,''=\vec{r}_\ell\,''(\ell')^2+\vec{r}_\ell\,'\ell_t''$, то при любой параметризации кривой векторы $\vec{r}\,'(t)$ и $\vec{r}\,''(t)$ расположены в соприкасающейся плоскости. Нормаль, перпендикулярная соприкасающейся плоскости, называется бинормалью. Плоскость, содержащая бинормаль и касательную данной кривой, называется спрямляющей плоскостью.

Приведем сводку формул для вышеназванных прямых и плоскостей. Пусть $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ – данная регулярная кривая, $\rho(t)=(X(t),Y(t),Z(t))$ – произвольная точка соответствующей прямой или плоскости, тогда:

1) уравнение касательной к кривой:

$$\vec{\rho}(t) = \vec{r}(t) + \lambda \vec{r}\,'(t) \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} X = x(t) + \lambda x'(t), \\ Y = y(t) + \lambda y'(t), \\ Z = z(t) + \lambda z'(t); \end{cases}$$

2) уравнение нормальной плоскости:

$$(\vec{\rho} - \vec{r})\vec{r}\,' = 0 \qquad \text{или} \qquad (X - x)x' + (Y - y)y' + (Z - z)z' = 0\,;$$

3) уравнение бинормали:

$$\vec{\rho} = \vec{r} + \lambda\left[\vec{r}\,', \vec{r}\,''\right] \qquad \text{или} \qquad \frac{X - x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}} = \frac{Y - y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}} = \frac{Z - z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}\,;$$

4) уравнение соприкасающейся плоскости:

$$(\vec{\rho} - \vec{r})\vec{r}\,'\vec{r}\,'' = 0 \qquad \text{или} \qquad \begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0\,;$$

5) уравнение главной нормали:

$$\vec{\rho} = \vec{r} + \lambda\left[\left[\vec{r}\,', \vec{r}\,''\right], \vec{r}\,'\right] \quad \text{или} \quad \begin{cases} X = x + \lambda\left(z'\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} - y'\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \right), \\ Y = y + \lambda\left(x'\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} - z'\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} \right), \\ Z = z + \lambda\left(y'\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} - x'\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} \right); \end{cases}$$

6) уравнение спрямляющей плоскости:

$$(\vec{\rho} - \vec{r})\vec{r}\,'\left[\vec{r}\,', \vec{r}\,''\right] = 0 \qquad \text{или} \qquad \begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Касательная, главная нормаль и бинормаль определяют в каждой точке кривой трехгранник с тремя прямыми углами при вершине, совпадающей с точкой кривой. Этот трехгранник называется сопровождающим трехгранником кривой. Гранями сопровождающего трехгранника будут три взаимно перпендикулярные плоскости: соприкасающаяся плоскость, содержащая касательную и главную нормаль; нормальная, содержащая главную нормаль и бинормаль; спрямляющая, содержащая бинормаль и касательную. Единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали, направленные по осям сопровождающего трехгранника в положительном направлении, выражаются соответственно (рисунок 1)

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}\,'\right|}\,, \qquad \vec{\upsilon} = \frac{\left[\left[\vec{r}\,', \vec{r}\,''\right], \vec{r}\,'\right]}{\left|\left[\left[\vec{r}\,', \vec{r}\,''\right], \vec{r}\,'\right]\right|}\,, \qquad \vec{\beta} = \frac{\left[\vec{r}\,', \vec{r}\,''\right]}{\left|\left[\vec{r}\,', \vec{r}\,''\right]\right|}\,.$$

Рисунок 1 – Сопровождающий трехгранник кривой

Векторы сопровождающего трехгранника меняются при движении точки по кривой. Это изменение для кривой, заданной в натуральном параметре ℓ, описывают следующие формулы Френе:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{r}}{d\,\ell} = k(\ell)\vec{\upsilon}, \\ \dfrac{d\vec{\upsilon}}{d\,\ell} = -k(\ell)\vec{\tau} + \aleph(\ell)\vec{\beta}, \\ \dfrac{d\vec{\beta}}{d\,\ell} = -\aleph(\ell)\vec{\upsilon}. \end{cases}$$

Функции $k(\ell)$, $\aleph(\ell)$ называются соответственно кривизной и кручением. Из формул Френе следует, что кривизна кривой в данной ее точке есть предел отношения угла поворота касательной на дуге, стягивающейся к данной точке, к длине этой дуги; а модуль кручения равен пределу отношения угла поворота бинормали на дуге, стягивающейся к данной точке, к длине этой дуги. Формулы для вычисления кривизны и кручения кривой в произвольном параметре t имеют вид:

$$k = \frac{\left|\left[\vec{r}\,',\vec{r}\,''\right]\right|}{|\vec{r}\,'|^3} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}},$$

$$\aleph = \frac{\vec{r}\,'\vec{r}\,''\vec{r}\,'''}{\left|\left[\vec{r}\,',\vec{r}\,''\right]\right|^2} = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}.$$

Если кривая отнесена к натуральному параметру, то $k = k(\ell)$, $\aleph = \aleph(\ell)$ называются натуральными уравнениями кривой. Пусть заданы две кривые. Если на этих кривых можно ввести натуральные параметры так, чтобы в точках, отвечающих одинаковым значениям этих параметров, совпадали их кривизны и кручения, то говорят, что их натуральные уравнения совпадают. Кривые, имеющие одинаковые натуральные уравнения, могут отличаться только положением в пространстве. Будем говорить, что две кривые отличаются положением в пространстве R^3, если существует некоторое движение пространства R^3, переводящее одну кривую в другую.

В трехмерном псевдоевклидовом пространстве индекса (1, 2) $R^3_{1,2} = R^3_1$ векторы ортонормированного репера $\{0, \vec{a}_0, \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ удовлетворяют условиям:

$$\vec{a}_0\vec{a}_0 = -1; \quad \vec{a}_1\vec{a}_1 = 1; \quad \vec{a}_2\vec{a}_2 = 1, \quad \vec{a}_0\vec{a}_1 = 1, \quad \vec{a}_0\vec{a}_2 = 0, \quad \vec{a}_1\vec{a}_2 = 0.$$

Координаты любой точки в этом репере будем обозначать $\vec{a} = (x^0, x^1, x^2)$. Отображение $\vec{r} : [a,b] \to R^3_1 : t \to (x^0(t), x^1(t), x^2(t))$, где $t \in [a,b]$, $a < b$ называется параметризованной кривой в R^3_1 и обозначается $\vec{r}(t) = (x^0(t), x^1(t), x^2(t))$. Параметризованная кривая называется времениподобной параметризованной с помощью натурального параметра δ, если выполняется условие $\vec{r}\,'(\delta)\,\vec{r}\,'(\delta) = -1$, где $\vec{r}(\delta) = (x^0(\delta), x^1(\delta), x^2(\delta))$. Пусть $\dfrac{d\vec{r}(\delta)}{d\delta} = \vec{r}\,'(\delta) = \tau(\delta)$, где $\vec{\tau}(\delta)\,\vec{\tau}(\delta) = -1$. Тогда $(d\vec{r})^2 = -(d\delta)^2$ и $(d\delta)^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2$, так как $\vec{r}^{\,2} = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2$. Но $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$. Значит,

$$(d\delta)^2 = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2, \left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2 = c^2 - v^2,$$

где $v^2 = \left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2$. Поэтому $\delta = c\displaystyle\int_a^b \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,dt$. Параметр δ, вычисляемый по этой формуле, называется длиной дуги времениподобной кривой. Времениподобная кривая $\vec{r}(\delta)$ называется регулярной, если $\vec{r}\,'(\delta) \neq 0$, и бирегулярной, если $\vec{r}\,'(\delta) \neq \vec{r}\,''(\delta)$.

К каждой точке времениподобной кривой присоединим правый ортонормированный репер $\vec{\tau}(\delta) = \vec{\tau}\,'(\delta)$, $\vec{\nu}(\delta) = \dfrac{\vec{k}(\delta)}{k(\delta)}, \vec{\beta}(\delta) = [\vec{\tau}(\delta), \vec{\nu}(\delta)]$, так как в R^3_1 можно ввести векторное произведение двух векторов, положив для этого, чтобы для векторов ортонормированного базиса выполнялись условия: $[\vec{a}_0, \vec{a}_1] = \vec{a}_2$, $[\vec{a}_1, \vec{a}_2] = -\vec{a}_0$, $[\vec{a}_2, \vec{a}_0] = \vec{a}_1$. Значит,

$$[\vec{\tau}, \vec{\nu}] = \vec{\beta}, [\vec{\nu}, \vec{\beta}] = -\vec{\tau}, [\vec{\beta}, \vec{\tau}] = \vec{\nu}.$$

Векторы $\vec{\tau}(\delta), \vec{\nu}(\delta), \vec{\beta}(\delta)$ называются соответственно вектором касательной, главной нормали и бинормали. Плоскости $L(\vec{\tau},\vec{\nu}), L(\vec{\nu},\vec{\beta}), L(\vec{\tau},\vec{\beta})$ называются соответственно соприкасающейся, нормальной и спрямляющей плоскостью кривой в данной точке. Формулы Френе временеподобной кривой $\vec{r}(\delta)$ имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{\tau}(\delta)}{d\delta} = k(\delta)\,\vec{\nu}(\delta), \\ \dfrac{d\vec{\nu}(\delta)}{d\delta} = k(\delta)\vec{\tau}(\delta) + \aleph(\delta)\vec{\beta}(\delta), \\ \dfrac{d\vec{\beta}(\delta)}{d\delta} = -\aleph(\delta)\vec{\nu}(\delta). \end{cases}$$

Функции $k(\delta)$ и $\aleph(\delta)$ называются соответственно кривизной и кручением временеподобной кривой $\vec{r}(\delta)$. Формулы для их вычисления имеют вид: $k(\delta) = \left| \left[\vec{r}'(\delta), \vec{r}''(\delta) \right] \right|$, $\aleph(\delta) = \dfrac{\vec{r}'(\delta)\vec{r}''(\delta)\vec{r}'''(\delta)}{\left| \left[\vec{r}'(\delta), \vec{r}''(\delta) \right] \right|}$

или $k(t) = \dfrac{\left| \left[\vec{r}'(t), \vec{r}''(t) \right] \right|}{\left(\sqrt{-(\vec{r}'(t))^2} \right)^3}$, $\aleph(t) = \dfrac{\vec{r}(t)\vec{r}''(t)\vec{r}'''(t)}{\left| \left[\vec{r}'(t), \vec{r}''(t) \right] \right|}$, если кривая имеет параметризацию, отличную от δ.

1.3 Теория поверхностей

Пусть R^3 – трехмерное евклидово пространство с координатами (x,y,z) и $F(x,y,z)$ – вещественная функция трех переменных, обладающая непрерывными частными производными до порядка k включительно (функция $F(x,y,z)$ принадлежит классу C^k).

Поверхностью класса C^k называется множество M точек $(x,y,z) \in R^3$, удовлетворяющих уравнению $F(x,y,z)=0$, причем

$$grad\ F \Big|_M = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) \Big|_M \neq 0 .$$

Поверхность класса C^k, заданная в параметрическом виде, есть взаимно однозначное с C^k дифференцируемое отображение $\vec{r} : U \to R^3$, где U – открытое множество в R^2 с координатами (u,v), причем $\left[\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right] \neq 0$ в U, т.е. поверхность в R^3 задается векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ или $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$.

Векторы $\vec{r}_u = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \vec{r}_v = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ называются касательными векторами поверхности $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$.

Прямая называется касательной прямой поверхности, если она касается какой-либо кривой, принадлежащей этой поверхности.

Касательной плоскостью поверхности называется множество прямых, касающихся поверхности в этой точке. Уравнение касательной плоскости поверхности имеет вид: $(\vec{\rho} - \vec{r})\vec{r}_u\vec{r}_v = 0$ или

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0 .$$

Нормаль к поверхности есть прямая, проходящая через данную точку поверхности по направлению вектора $[\vec{r}_u, \vec{r}_v]$. Ее уравнение имеет вид: $\vec{\rho} = \vec{r} + \lambda\,[\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ или $\dfrac{X-x}{\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}} = \dfrac{Y-y}{\begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}} = \dfrac{Z-z}{\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}}$.

Длина дуги главной кривой $u=u(t)$, $v=v(t)$, расположенной на поверхности $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$, определяется формулой

$$\ell=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{Eu_t'^2+2Fu_t'v_t'+Gv_t'^2}\,dt\text{ , где}$$

$$E=r_u'r_u'=x_u^2+y_u^2+z_u^2,\quad F=\vec{r}_u\vec{r}_v=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v,$$

$$G=\vec{r}_v\vec{r}_v=x_v^2+y_v^2+z_v^2.$$

Выражение $d\ell^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2=\varphi_1$ называется первой квадратичной формой поверхности или римановой метрикой на поверхности.

Угол между двумя пересекающимися кривыми $u=u_1(t),v=v_1(t)$ и $u=u_2(t),v=v_2(t)$ поверхности $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ определяется формулой $cos\,\varphi=\dfrac{Edu\delta u+F(du\delta v+dv\delta u)+Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}\,\sqrt{E\delta u^2+2F\delta u\delta v+G\delta v^2}}$, где du,dv – дифференциалы функций u и v, взятые из уравнений первой кривой, а $\delta u,\delta v$ – дифференциалы от u и v, взятые из уравнений второй кривой.

Площадь поверхности определяется формулой

$$\delta=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\,dudv.$$

Вторая квадратичная форма поверхности имеет вид:

$$Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=\varphi_2,$$

где $\vec{m}=\dfrac{[\vec{r}_u,\vec{r}_v]}{\left|\left[\vec{r}_u,\vec{r}_v\right]\right|}$ – единичный вектор нормали к поверхности

$$L=\vec{m}\vec{r}_{uu}=\frac{\vec{r}_{uu}\vec{r}_u\vec{r}_v}{\left|\left[\vec{r}_u,\vec{r}_v\right]\right|}=\frac{\begin{vmatrix}x_{uu}&y_{uu}&z_{uu}\\x_u&y_u&z_u\\x_v&y_v&z_v\end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$M=\vec{m}\vec{r}_{uv}=\frac{\vec{r}_{uv}\vec{r}_u\vec{r}_v}{\left|\left[\vec{r}_u,\vec{r}_v\right]\right|}=\frac{\begin{vmatrix}x_{uv}&y_{uv}&z_{uv}\\x_u&y_u&z_u\\x_v&y_v&z_v\end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$N=\vec{m}\vec{r}_{vv}=\frac{\vec{r}_{vv}\vec{r}_u\vec{r}_v}{\left|\left[\vec{r}_u,\vec{r}_v\right]\right|}=\frac{\begin{vmatrix}x_{vv}&y_{vv}&z_{vv}\\x_u&y_u&z_u\\x_v&y_v&z_v\end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

Проекция вектора кривизны линии на нормаль поверхности в точке, через которую проходит эта кривая, называется нормальной кривизной этой кривой, которая определяется формулой $K_n=\dfrac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}$.

Пусть $A=\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}$ – матрица первой квадратной формы, а $B=\begin{pmatrix}L&M\\M&N\end{pmatrix}$ – матрица второй квадратичной формы. Существует такой базис, в котором матрица A становится единичной, а B – диагональной. Элементы этого базиса называются главными векторами в данной точке поверхности, а направления, определяемые главными векторами – главными направлениями. Элементы k_1 и k_2 матрицы B в главном базисе называются главными кривизнами поверхности в данной точке и определяются из уравнения $det(B-kA)=\begin{vmatrix}L-kE&M-kF\\M-kF&N-kG\end{vmatrix}=0$. Отсюда $k_1k_2=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}=K$ – полная или гауссова кривизна поверхности в данной точке, $k_1+k_2=\dfrac{EN+LG-2MF}{EG-F^2}=2H$, H – средняя кривизна поверхности.

Пусть $\vec{\tau}$ – единичный касательный вектор нормального сечения в данной точке, $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ – единичные главные векторы, φ – угол поворота от $\vec{e}_1$ до $\vec{\tau}$ в направлении от $\vec{e}_1$ до $\vec{e}_2$. Тогда $k_n = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi$ – <u>формула Эйлера</u>.

Если $k_1 = k_2$, то $k_n = const$. Такие точки называются <u>омбилическими</u>. В такой точке коэффициенты первой и второй квадратичных форм пропорциональны: $\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}$.

Если в данной точке поверхности $K > 0$, то данная точка поверхности называется <u>эллиптической</u>, если $K < 0$, то – <u>гиперболической</u>, и если $K = 0$, то – <u>параболической</u>.

Пусть $A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$,

$u^1 = u, u^2 = v$ – криволинейные координаты. Дифференцирование вектора $\vec{r}$ поверхности по u^1 будем обозначать индексом 1, а по u^2 – индексом 2 снизу: $\vec{r}_u = \vec{r}_1$, $\vec{r}_v = \vec{r}_2$, $\vec{r}_{uu} = \vec{r}_{11}$, $\vec{r}_{vv} = \vec{r}_{22}$, $\vec{r}_{uv} = \vec{r}_{12}$. Тогда $g_{ij} = \vec{r}_i \vec{r}_j, b_{ij} = \vec{r}_{ij} \vec{m}$, где $i, j = 1,2$. Для каждой точки поверхности однозначно определяется <u>натуральный репер поверхности</u> – $(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{m})$. Формулы, выражающие первые производные этого репера через базис этого репера, называются <u>деривационными формулами</u>:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{r}_1}{\partial u^i} = \Gamma_{1i}^1 \vec{r}_1 + \Gamma_{1i}^2 \vec{r}_2 + b_{1i} \vec{m}, \\ \dfrac{\partial \vec{r}_2}{\partial u^i} = \Gamma_{2i}^1 \vec{r}_1 + \Gamma_{2i}^2 \vec{r}_2 + b_{2i} \vec{m}, \\ \dfrac{\partial \vec{m}}{\partial u^i} = -b_i^1 \vec{r}_1 - b_i^2 \vec{r}_2, \end{cases}$$

где $\Gamma_{ij}^\ell = \dfrac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{2} g^{k\ell} \left(\dfrac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} + \dfrac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} \right)$, $\quad g^{11} = \dfrac{g_{22}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}$,

$g^{12} = g^{21} = -\dfrac{g_{12}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}$, $g^{22} = \dfrac{g_{11}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}$, $b_i^k = -\sum\limits_{j=1}^{2} b_{ij} g^{ik}$. Выражения Γ_{ij}^k называются <u>символами Кристоффеля</u> поверхности.

<u>Формула Гаусса</u>:

$$b_{11} b_{12} - b_{12}^2 = \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1} + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{12}^i \Gamma_{12}^j g_{ij} - \sum_{k,\ell=1}^{2} \Gamma_{11}^k \Gamma_{22}^\ell g_{k\ell}.$$

<u>Геодезической линией</u> на поверхности называется линия, главная нормаль которой в каждой ее точке совпадает с нормалью к поверхности в той же точке. Если кривая на поверхности задана параметрическим уравнением $\vec{r}(\ell) = \vec{r}\left(u^1(\ell), u^2(\ell)\right)$, где ℓ натуральный параметр, то уравнение геодезических линий имеет вид: $\dfrac{d^2 u^k}{d\ell^2} + \sum\limits_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \dfrac{du^i}{d\ell} \dfrac{du^j}{d\ell} = 0, k = 1, 2$.

<u>Геодезической кривизной</u> k_g кривой C в точке на поверхности называется кривизна в этой точке ортогональной проекции C' кривой C на касательную плоскость K поверхности в данной точке. Пусть кривая на поверхности задана параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(\ell) = \vec{r}\left(u^1(\ell), u^2(\ell)\right)$, где ℓ – натуральный параметр на кривой. Тогда геодезическая кривизна вычисляется по формуле:

$$k_g = \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} \Big| (u^2)'' (u^1)' - (u^2)' (u^1)'' + \Gamma_{11}^2 (u^1)'^3 + (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1)(u^1)'^2 (u^2)' +$$
$$+ (\Gamma_{22}^2 + 2\Gamma_{12}^1)(u^1)'(u^2)'^2 - \Gamma_{22}^1 (u^2)'^3 \Big|.$$

1.4 Тензоры

Тензоры – это важнейший из классов величин, числовая запись которых меняется при изменении координат. Тензором (тензорным полем) типа *(p, q)* ранга $p+q$ называется объект, задаваемый набором чисел $\mathrm{T}^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ в произвольной системе координат $\left(x^1,\ldots,x^n\right)$, числовая запись которого зависит от системы координат по следующему закону: если $x^i = x^i\left(z^1,\ldots,z^n\right), z^j = z^j\left(x^1,\ldots,x^n\right)$, то имеет место формула: $\mathrm{T}^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = \sum\limits_{(k),(\ell)} \mathrm{T}^{k_1 \ldots k_p}_{\ell_1 \ldots \ell_q} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial z^{k_1}} \ldots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial z^{k_p}} \frac{\partial z^{\ell_1}}{\partial x^{j_1}} \ldots \frac{\partial z^{\ell_q}}{\partial x^{j_q}}$, где $\mathrm{T}^{k_1 \ldots k_p}_{\ell_1 \ldots \ell_q}$ – числовая запись тензора в координатах $\left(z^1,\ldots,z^n\right)$, $\mathrm{T}^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ – числовая запись тензора в координатах $\left(x^1,\ldots,x^n\right)$, индексы $(i)=\left(i_1,\ldots,i_p\right)$, $(j)=\left(j_1,\ldots,j_q\right)$, $(k)=\left(k_1,\ldots,k_p\right)$, $(\ell)=\left(\ell_1,\ldots,\ell_q\right)$ меняются от 1 до n.

Приведем примеры тензоров:

1) скаляр – тензор 0-го ранга;

2) векторы (типа вектора скорости) – тензор типа (1,0):
$\vec{\xi} = \left(\xi^i\right)_x \to \vec{\xi} = \left(`\xi^j\right)_z$; $`\xi^j = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial z^j}{\partial x^i}$;

3) ковектор (типа градиента функции) – тензор типа (0,1):
$\vec{\xi} = \left(\xi_i\right)_x \to \left(\xi_j\right)_z = \vec{\xi}$; $\xi_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial x^i}{\partial z^j}$;

4) квадратичная форма на векторах (скалярное произведение векторов) – тензор типа (0,2):

$$\left(g_{ij}\right) \to \left(g'_{ij}\right); \qquad g'_{ij} = \sum_{k,\ell} g_{k\ell} \frac{\partial x^k}{\partial z^i} \frac{\partial x^\ell}{\partial z^j}; (x) \to (z);$$

5) квадратичная форма на ковекторах (скалярное произведение ковекторов) – тензор типа (2,0):

$$\left(g^{ij}\right) \to '(g^{ij}); ' g^{ij} = \sum_{k,\ell} g^{k\ell} \frac{\partial z^i}{\partial x^k} \frac{\partial z^j}{\partial x^\ell};$$

6) линейный оператор на векторах (ковекторах) – тензор типа

$$(1,1): \quad \mathrm{A} = \left(a^i_j\right) \to ' \mathrm{A} = ('a^i_j); ' a^i_j = \sum_{k,\ell} a^k_\ell \frac{\partial x^\ell}{\partial z^j} \frac{\partial z^i}{\partial x^k}.$$

Говорят, что два тензора $\mathrm{T}^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ и $\widetilde{\mathrm{T}}^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ одного типа получаются друг из друга перестановкой верхних индексов, если найдется такая перестановка $\begin{pmatrix} i_1 \ldots i_p \\ \ell_1 \ldots \ell_p \end{pmatrix}$, где $i_k \to j_\ell$, что имеет место равенство при всех $i_1,\ldots,i_p, j_1,\ldots,j_q, \ell_1,\ldots,\ell_p$: $\widetilde{\mathrm{T}}^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = \mathrm{T}^{\ell_1 \ldots \ell_p}_{j_1 \ldots j_q}$.

Аналогично определяется перестановка нижних индексов.

Для тензора $\mathrm{T}^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ типа *(p,q)* его сверткой (следом) по индексам $\left(i_k, \ell_k\right)$ будет тензор $\widetilde{\mathrm{T}}^{i_1 \ldots i_{p-1}}_{j_1 \ldots j_{q-1}}$ типа *(p-1, q-1)*, определяемый формулой

$$\widetilde{\mathrm{T}}^{i_1 \ldots i_{p-1}}_{j_1 \ldots j_{q-1}} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{T}^{i_1 \ldots i_{k-1} i i_{k+1} \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_{\ell-1} i j_{\ell+1} \ldots j_q}.$$

Если заданы два тензора $\mathrm{T} = \left(\mathrm{T}^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}\right)$ и $\mathrm{P} = \left(\mathrm{P}^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_\ell}\right)$ типа *(p, q)* и (k, ℓ) соответственно, то их произведением будет тензор $S = T \otimes P$ типа $\left(p+k, q+\ell\right)$ с компонентами $S^{i_1 \ldots i_{p+k}}_{j_1 \ldots j_{q+\ell}} = T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \cdot P^{i_{p+1} \ldots i_{p+k}}_{j_{q+1} \ldots j_{q+\ell}}$.

Произведение вектора $\left(\xi^i\right)$ и ковектора $\left(\eta_j\right)$ есть тензор 2-го ранга $T^i_j = \left(\xi^i \eta_j\right)$, а его след $T^i_i = \xi^i \eta_i$ – скалярное произведение $\lambda = \xi^i \eta_i$.

Произведение вектора $\left(\xi^i\right)$ и линейного оператора A^k_ℓ есть тензор типа (2,1): $T^{ik}_\ell = A^k_\ell \xi^i$, а свертка (след) этого произведения $\eta^k = T^i_\ell \eta^\ell = A^k_\ell \eta^\ell$ есть вектор.

Если в пространстве заданы риманова метрика $\left(g_{ij}\right)$ и тензор $\mathrm{T}^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ в какой-то системе координат $\left(x^1,\ldots,x^n\right)$, то можно рассмотреть новый тензор $T^{i_2 \ldots i_p}_{i_1 j_1 \ldots j_q} = g_{i_1 k} T^{k i_2 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$. Результат этой операции называется опусканием индекса i_1 с помощью римановой метрики $\left(g_{ij}\right)$. Если $\left(\xi^i\right)$ – вектор, то после опускания индекса мы получим ковектор $\xi_i = g_{ij} \xi^j$.

Для <u>поднятия нижних индексов вверх</u> при наличии римановой метрики (g_{ij}) необходимо рассмотреть обратную матрицу (g^{ij}), такую, что $g^{ij}g_{jk}=\delta^i_k=\begin{cases}1,\ i=k,\\0,\ i\neq k\end{cases}$. По определению имеем $T^{j_1 i_1\dots i_p}_{j_2\dots j_q}=g^{j_1 k}T^{i_1\dots i_p}_{k j_2\dots j_q}$.

Отметим, что совокупность всех тензоров типа *(p,q)* в заданной точке пространства образует линейное пространство: если $T=\left(T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\right)$ и $S=\left(S^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\right)$ – тензоры типа (p,q), то их линейная комбинация $\lambda T+\mu S=U$ с компонентами $U^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}=\lambda T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}+\mu S^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ тоже есть тензор типа (p,q) в этой же самой точке.

<u>Кососимметрическим тензором</u> $T_{i_1\dots i_k}$ или $T^{i_1\dots i_k}$ называется такой тензор, который меняет знак при нечетной перестановке индексов и сохраняет свое значение при любой четной перестановке индексов.

Если $T_{i_1\dots i_k}$ – кососимметрический по всем индексам тензор в n-мерном пространстве с координатами $(x^1,\dots,x^n)$, $i_q=1,2,\dots,n$, то <u>его градиентом</u> $\left(\nabla^S T\right)_{j_1\dots j_k j_{k+1}}$ называется кососимметрический тензор $(k+1)$-го ранга типа $(0,k+1)$ с компонентами $\left(\nabla^S T\right)_{j_1\dots j_{k+1}}=\sum\limits_{q=1}^{k+1}\dfrac{\partial T_{j_1\dots\hat{j}_q\dots j_{k+1}}}{\partial x^{jq}}\cdot(-1)^q$. (Здесь значок $\hat{i}_q$ означает, что индекс i_q пропущен).

Рассмотрим примеры.

Пусть $k+1=1$ и $T=f(x)$ – функция. Тогда согласно определению $\left(\nabla^S T\right)_i=\dfrac{\partial T}{\partial x^i}$ – обычный градиент функции.

Пусть $T=(T_i)$ – ковектор. Тогда $\left(\nabla^S T\right)_{ij}=\dfrac{\partial T_i}{\partial x^j}-\dfrac{\partial T_j}{\partial x^i}=-\left(\nabla^S T\right)_{ji}$.

Этот тензор $\left(\nabla^S T\right)_{ij}$ называется <u>ротором ковекторного поля</u>, $\left(\nabla^S T\right)_{ij}=rot\ T$. Ротор – это кососимметрический тензор типа (0,2) ранга 2. Если $n=3$ и координаты (x^1,x^2,x^3) эвклидовы, то тензору $\left(\nabla^S T\right)_{ij}$ сопоставляют вектор $(\eta^k)=rot\ T$, где

$$\eta^1=\frac{\partial T_2}{\partial x^3}-\frac{\partial T_3}{\partial x^2}=\left(\nabla^S T\right)_{23},$$

$$\eta^2=\frac{\partial T_3}{\partial x^1}-\frac{\partial T_1}{\partial x^3}=\left(\nabla^S T\right)_{31}=-\left(\nabla^S T\right)_{13},$$

$$\eta^3=\frac{\partial T_1}{\partial x^2}-\frac{\partial T_2}{\partial x^1}=\left(\nabla^S T\right)_{12}.$$

Пусть $n=3$ и задан кососимметрический тензор $T_{ij}=-T_{ji}$. Тогда кососимметрический тензор 3-го ранга $\left(\nabla^S T\right)_{123}$ имеет вид $\left(\nabla^S T\right)_{123}=\dfrac{\partial T_{12}}{\partial x^3}-\dfrac{\partial T_{13}}{\partial x^2}-\dfrac{\partial T_{23}}{\partial x^1}$. Если координаты евклидовы (x^1,x^2,x^3) и $\eta^1=T_{23},\eta^2=-T_{13},\eta^3=T_{12}$ согласно указанному выше правилу сопоставления вектора кососимметрическому тензору, то имеем $\left(\nabla^S T\right)_{123}=\dfrac{\partial\eta^1}{\partial x^1}+\dfrac{\partial\eta^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial\eta^3}{\partial x^3}=\sum\limits_{i=1}^{3}\dfrac{\partial\eta^i}{\partial x^i}=\dfrac{\partial\eta^i}{\partial x^i}$. В евклидовых координатах операция, сопоставляющая векторному полю $\vec{\eta}=(\eta^i)$ число $div\vec{\eta}=\dfrac{\partial\eta^i}{\partial x^i}$, называется <u>дивергенцией</u>.

Отметим, что ∇^S – единственная не связанная ни с какой геометрией операция. Что же касается обычного обобщения градиента функции на тензоры $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q,k}=\dfrac{\partial T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}}{\partial x^k}$ в пространстве с декартовыми координатами $(x^1,\dots,x^n)$, то результат этой операции не является тензором. Однако, если в пространстве заданы координаты и тензорное поле $T=\left(T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\right)$, то поле $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q,k}=\dfrac{\partial T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}}{\partial x^k}$ <u>преобразуется как тензор при всех линейных координатах</u>:

$x^i=a^i_j z^j$, $a^i_j=const$, $z^i=b^i_j x^j$, $b^i_j\,a^j_k=\delta^i_k$.

А как же быть в других системах координат, связанных с евклидовой нелинейной заменой?

Если градиент $T^{(i)}_{(j),q}$ любого тензорного поля $T^{(i)}_{(j)}$ типа (m,n) ведет себя как тензор при любых заменах координат и в евклидовой системе координат (x) определяется по формуле $T^{(i)}_{(j),k} = \frac{\partial T^{(i)}_{(j)}}{\partial x^k}$, то в любой другой системе координат (z) он вычисляется по формуле

$$\widetilde{T}^{(k)}_{(\ell),r} = \frac{\partial \widetilde{T}^{(k)}_{(\ell)}}{\partial z^r} + \sum_{s=1}^{p} \widetilde{T}^{k_1 \dots k_s = i \dots k_p}_{\ell_1 \dots \ell_q} \Gamma^{k_s}_{ir} - \sum_{s=1}^{q} \widetilde{T}^{k_1 \dots k_p}_{\ell_1 \dots \ell_s = i \dots \ell_q} \Gamma^{i}_{\ell_3},$$

где набор функций Γ^p_{kq} вычисляется по формуле

$$\Gamma^p_{kq} = -\frac{\partial x^i}{\partial z^p}\frac{\partial x^m}{\partial z^q}\frac{\partial^2 z^k}{\partial x^i \partial x^m}.$$

Например, для тензоров 2-го ранга имеем

$\widetilde{T}^i_{j,k} = \frac{\partial \widetilde{T}^i_j}{\partial z^k} + \widetilde{T}^p_j \Gamma^i_{pk} - \widetilde{T}^i_p \Gamma^p_{jk}$; $\widetilde{T}_{ij,k} = \frac{\partial \widetilde{T}_{ij}}{\partial z^k} - \widetilde{T}_{pj}\Gamma^p_{ik} - \widetilde{T}_{ip}\Gamma^p_{jk}$;

$\widetilde{T}^{ij}_{,k} = \frac{\partial \widetilde{T}^{ij}}{\partial z^k} + \widetilde{T}^{pj}\Gamma^i_{pk} + \widetilde{T}^{ip}\Gamma^j_{pk}$. Для векторного поля (T^i) имеем $\widetilde{T}^k_{;r} = \frac{\partial \widetilde{T}^k}{\partial z^r} + \widetilde{T}^S \, \Gamma^k_{sr}$, а для ковекторного поля

$(T_i) = \widetilde{T}_{i,k} = \frac{\partial \widetilde{T}_i}{\partial z^k} - \widetilde{T}_r \, \Gamma^r_{ik}$.

Будем говорить, что задана операция ковариантного дифференцирования (взятия градиента) тензоров любого типа, если в любой системе координат $(z^1,\dots,z^n)$ задан набор функций $\Gamma^k_{pq}(z)$, который при замене координат $z = Z(z')$ преобразуется по формуле $\Gamma^{k'}_{p'q'} = \frac{\partial z^{k'}}{\partial z^k}\left(\Gamma^k_{pq}\frac{\partial z^p}{\partial z^{p'}}\frac{\partial z^q}{\partial z^{q'}} + \frac{\partial^2 z^k}{\partial z^{p'}\partial z^{q'}}\right)$. Величины $\Gamma^k_{pq}(k)$ называются символами Кристоффеля. Операцию ковариантного дифференцирования (градиента) часто называют дифференциально-геометрической связностью или аффинной связностью. Связность называется евклидовой, если существуют такие координаты $(x^1,\dots,x^n)$, что $\Gamma^k_{ij} = 0$ (или $T^{(i)}_{(j),k} = \frac{\partial T^{(i)}_{(j)}}{\partial x^k}$). Такие координаты называются евклидовыми. Операция ковариантного дифференцирования обозначается символом ∇: $\nabla_q T^i = T^i_{,q}$.

Альтернативное выражение $T^i_{kj} = \Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{[kj]}$ образует тензор, называемый тензором кручения.

Ковариантное дифференцирование Γ^k_{ij} (связность) называется симметричной, если тензор кручения $\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}$ тождественно равен нулю в каждой системе координат или $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

Ковариантной производной векторного поля (T^i)(или ковекторного поля (T_i)) по направлению вектора (ξ^k) в некоторой точке $P = (z^1,\dots,z^n)$ называется выражение $\nabla_{\vec{\xi}}(T^i) = \xi^k \nabla_k T^i$ в точке P (или выражение $\nabla_{\vec{\xi}}(T_i) = \xi^k \nabla_k T_i$ в точке P для ковекторного поля). Результат ковариантного дифференцирования векторного поля по направлению $\vec{\xi}$ в некоторой точке P есть вектор в этой точке.

Говорят, что векторное (тензорное) поле T является ковариантно постоянным или параллельным вдоль кривой $z^i = z^i(t)$ на отрезке $a \le t \le b$, если ковариантная производная поля T в точках кривой по направлению вектора скорости кривой равна нулю: $\nabla_{\vec{\xi}} T = \xi^k \nabla_k T = 0, 0 \le t \le b, \xi^k = \frac{dz^k}{dt}$. Для векторных полей имеем: $\nabla_{\vec{\xi}} T = \xi^k \nabla_k T^i = \xi^k\left(\frac{\partial T^i}{\partial z^k} + \Gamma^i_{jk}T^j\right) = 0$.

Параллельным переносом вектора T^i_p из точки $P = (z^1_0,\dots,z^n_0)$ в точку $Q = (z^1_1,\dots,z^n_1)$ вдоль кривой $z^i = z^i(t)$, ведущей из P в Q, называется векторное поле (T^i), заданное во всех точках кривой и параллельное вдоль этой кривой: $\frac{dx^k}{dt}\nabla_k T^i = 0$ во всех $0 \le t \le 1$. При $t = 0$ векторное поле (T^i) в точке P должно совпадать с исходным вектором $(T^i)_p$; при $t = 1$ векторное поле (T^i) в точке Q есть вектор $\left(T^i\right)_Q$, называющийся <u>результатом параллельного переноса</u> вектора $T_p^{\,i}$ вдоль заданной кривой $z^i = z^i(t)$ из P в Q. В координатах $z^1, \dots, z^n$ имеем:

$$\frac{dz^k}{dt}\nabla_\alpha T^i = \frac{\partial T^i}{\partial z^\alpha}\frac{dz^\alpha}{dt} + \Gamma^i_{p\alpha}\frac{dz^\alpha}{dt} = \frac{dT^i}{dt} + \left(\frac{dz^\alpha}{dt}\Gamma^i_{p\alpha}\right)T^P = 0$$

– <u>уравнение параллельного переноса</u>. Начальное условие $T^i(0) = T^i_p$. <u>Линия</u> $x^i = x^i(t)$ <u>называется геодезической</u>, если ее вектор скорости $T^i = \dfrac{dx^i}{dt}$ параллелен вдоль нее самой: $\nabla_T(T) = 0$ (или ковариантная производная векторного поля $T^i = \dfrac{dx^i}{dt}$ вдоль этой кривой равна нулю).

<u>Уравнение геодезических линий</u>:

$$\frac{d^2x^j}{dt^2} + \Gamma^j_{ki}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^i}{dt} = 0,\ j = 1, \dots, n.$$

Вектор $\nabla_T(T^j) = \dfrac{d^2x^j}{dt^2} + \Gamma^j_{ki}\dfrac{dx^k}{dt}\dfrac{dx^i}{dt} = K^i_g(t)$ называется <u>вектором геодезической кривизны</u> данной линии, $T^i = \dfrac{dx^i}{dt}$.

<u>Геодезической кривизной</u> называется длина вектора

$$\vec{K}^i_g(\ell) : k_g(\ell) = \left|\vec{K}^i_g(\ell)\right| = \sqrt{g_{ij}\vec{K}^i_g(\ell)\vec{K}^i_g(\ell)},$$

где ℓ – натуральный параметр. <u>Связность</u> Γ^k_{ij} <u>называется согласованной с метрикой</u> g_{ij}, если ковариантная производная метрического тензора тождественно равна нулю: $\nabla_k g_{ij} = 0,\ \ k, i, j = 1, \dots, n$. Связность, согласованная с данной метрикой g_{ij}, задается формулами:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{k\ell}\left(\frac{\partial g_{\ell j}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell}\right)$$

(формулы Кристоффеля).

Тензор $R^i_{qk\ell}$ называется <u>тензором Римана</u> или <u>римановой кривизной</u>, где $-R^i_{qk\ell} = \dfrac{\partial \Gamma^i_{q\ell}}{\partial x^k} - \dfrac{\partial \Gamma^i_{qk}}{\partial x^\ell} + \Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{q\ell} - \Gamma^i_{p\ell}\Gamma^p_{qk}$.

Тензор кривизны обладает следующими свойствами:

1) $R^i_{qk\ell} = -R^i_{q\ell k}$;

2) для симметричной связности $-R^i_{qk\ell} + R^i_{k\ell q} + R^i_{\ell qk} = 0$;

3) для связности, согласованной с метрикой g_{ik}, тензор $R_{iqk\ell} = g_{ip}R^p_{qk\ell}$ кососимметричен по индексам $i, q : R_{iqk\ell} = -R_{qik\ell}$;

4) для тензора кривизны симметричной связности, согласованной с метрикой g_{ik}, имеется симметрия $R_{iqk\ell} = R_{k\ell iq}$.

Известно, что $df = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$ – дифференциал функции. Если задана замена $x^i = x^i\left(x^{1'}, \dots, x^{n'}\right)$, то

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}dx^{i'}, df = \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right)dx^{i'} = \frac{\partial f}{\partial x^{i'}}dx^{i'},$$

т.е. выражение df инвариантно относительно замен координат.

Аналогично, если любому ковектору T_i поставить в соответствие выражение $T_i dx^i$ (<u>дифференциальную форму</u>), то это выражение инвариантно относительно замены координат. Базисные координатные поля e^i преобразуются по закону $e^i = \dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}e^{i'}, T_i e^i = T_{i'}e^{i'}$. Базисные ковекторы e^i преобразуются по тому же закону, что и $dx^i : e^i = \dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}e^{i'} \leftrightarrow dx^i = \dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}dx^{i'}$, $e^i \leftrightarrow dx^i$, $e^{i'} \leftrightarrow dx^{i'}$. Можно сказать, что символы dx^i – это базисные ковекторы e^i. Дифференциальная форма $T_i dx^i$ соответствует разложению $T_i e^i$ ковектора по базису. Разложение симметрического тензора типа *(0,2)* g_{ij} по базису $dx^i\,dx^j$ имеет вид $g_{ij}\,dx^i\,dx^j$.

Для кососимметрических тензоров часто используется язык дифференциальных форм. Базис в пространстве таких тензоров состоит из элементов $dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_k}, i_1 < \dots < i_k$, где

$dz^{i_1} \wedge \ldots \wedge dz^{i_k} = \sum_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma) e^{\sigma(i_1 \ldots e^{ik})}$. Для кососимметрического тензора $T_{i_1 \ldots i_k}$ имеем соответствующую дифференциальную форму $T_{i_1 \ldots i_k} e^{i_1} \ldots e^{i_k} = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} T_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, где $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ кососимметрично относительно перестановок индексов $dx^{\sigma(i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k)}$.

Каждый кососимметрический тензор $T_{i_1 \ldots i_n}$ в n-мерном пространстве определяется одним числом $T_{12 \ldots n}$, и мы здесь имеем единственный базисный тензор $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n}$. Выражение $\sqrt{|g|}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n}$ называется <u>элементом объема</u>, задаваемым метрикой g_{ij}, где $g = det\,(g_{ij})$. Он является тензором относительно таких замен координат, что $I = det\, A = det\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right) > 0$.

Определим <u>внешнее произведение двух дифференциальных форм</u> ранга p и q соответственно. Пусть

$$\omega_1 = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} T_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

$$\omega_2 = \sum_{j_1 < \ldots < j_q} S_{j_1 \ldots j_q} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}.$$

Определим форму ω ранга $(p+q)$

$\omega = \omega_1 \wedge \omega_2 = \sum_{k_1 < \ldots < k_{p+q}} R_{k_1 \ldots k_{p+q}} dx^{k_1} \wedge \ldots \wedge dx^{k_{p+q}}$, полагая

$R_{k_1 \ldots k_{p+q}} = \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \frac{sgn(\sigma)}{p!\,q!} T_{\sigma(k_1 \ldots k_p} . S_{k_{p+1} \ldots k_{p+q})}$. Внешнее произведение дифференциальных форм – билинейная ассоциативная операция, причем $\omega_2 \wedge \omega_1 = (-1)^p \omega_1 \wedge \omega_2$, если ω_1 – форма ранга p, ω_2 – ранга q.

Определим <u>форму</u> $d\omega$ <u>степени</u> $k+1$, полагая

$d\omega = \sum_{\substack{i_0 \\ i_1 < \ldots < i_k}} \frac{\partial T_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x^{i_0}} dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, где тензору $T_{i_1 \ldots i_k}$ соответствует форма $\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} T_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$ и имеют место тождества:

1) $d\omega = \sum_{j_1 < \ldots < j_{q+1}} (dT)_{j_1 \ldots j_{k+1}} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_{k+1}}$;

2) $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$, где ω_1, ω_2 – дифференциальные формы степеней p и q соответственно;

3) $d(d\omega) = 0$.

Определим <u>операцию ограничения тензора</u> типа $(0,k)$ на поверхность. Для поверхности $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^k)$ рассмотрим выражение $\sum_{i_1 < \ldots < i_k} T_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, где $T_{i_1 \ldots i_k}(x(z))$ выражено через $z^1, \ldots, z^k$ в точках поверхности и $dx^j = \frac{\partial x^j}{\partial z^k} dz^k$. В точках поверхности $x = x(z)$ имеем $\sum_{i_1 < \ldots < i_k} T_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} I^{i_1 \ldots i_k}_{12 \ldots k} T_{i_1 \ldots i_k} dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^k$, где $I^{i_1 \ldots i_k}_{12 \ldots k}$ – минор матрицы $\left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right)$. Это выражение называется <u>ограничением кососимметрического тензора</u> $T_{i_1 \ldots i_k}$ на поверхность $x = x(z)$. Это тензор k-го ранга в k-мерном пространстве.

Обычный кратный интеграл от ограничения $\int_U \ldots \int \left(\sum_{i_1 < \ldots < i_k} T_{i_1 \ldots i_k} I^{i_1 \ldots i_k}_{1 \ldots k} \right) dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^k$ тензора $T_{i_1 \ldots i_k}$ по области U на поверхности называется <u>интегралом от кососимметрического тензорного поля</u> $T_{i_1 \ldots i_k}$, заданного в n- мерном пространстве по области U на любой поверхности $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^k)$, $i = 1, \ldots, n$.

Для любой дифференциальной формы

$T = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} T_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ с гладкими коэффициентами $T_{i_1 \ldots i_k}$, любой гладкой поверхности $x^i(z^1, \ldots, z^k)$ и ограниченной области U на ней с гладкой границей Γ, состоящей из одного куска, имеет место формула (общая формула Стокса): $\pm\int\limits_{\Gamma} T = \int\limits_{U} dT$.

Формула Грина: $\int\limits_{\Gamma} T_\alpha \frac{dx^\alpha}{dt}\, dt = \iint\limits_{U}\left(\frac{\partial T_1}{\partial x^2} - \frac{\partial T_2}{\partial x^1}\right) dx^1 \wedge dx^2$ или

$$\int\limits_{\Gamma}\left(T_1 dx + T_2 dy\right) = \iint\limits_{U}\left(\frac{\partial T_1}{\partial y} - \frac{\partial T_2}{\partial x}\right) dx \wedge dy.$$

Формула Гаусса – Остроградского:

$$\iint\limits_{\Gamma}\sum_{i<j} T_{ij} dx^i \wedge dx^j = \iiint\limits_{U}\left(\frac{\partial T_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x^1} - \frac{\partial T_{13}}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 =$$

$$= \iiint\limits_{U}\left(divT\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \iint\limits_{\Gamma} < T, \vec{n} > d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{\Gamma} < T, \vec{n} > \sqrt{|g|}\, dz^1 \wedge dz^2 ,$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности Γ, а z^1, z^2 – координаты на поверхности.

Формула Стокса:

$$\oint\limits_{\Gamma} T_\alpha dx^\alpha = \iint\limits_{U} < rotT, \vec{n} > \sqrt{|g|}\, dz^1 \wedge dz^2 = \iint\limits_{U}\left(\left(\frac{\partial T_1}{\partial x^2} - \frac{\partial T_2}{\partial x^1}\right) dx^1 \wedge dx^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial T_1}{\partial x^3} - \frac{\partial T_3}{\partial x^1}\right) dx^1 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial T_2}{\partial x^3} - \frac{\partial T_3}{\partial x^2}\right) dx^2 \wedge dx^3\right),$$

где U – область на поверхности $x^i = x^i\left(z^1, z^2\right), i = 1, 2, 3$; Γ – граница этой области.

Дифференцируемым n-мерным многообразием называется произвольное множество точек M, в котором введена следующая структура:

– множество M представлено в виде объединения конечного или счетного числа областей U_q n-мерного евклидова пространства, $M = \bigcup\limits_q U_q$;

– в каждой области U_q заданы координаты $\left(x_q^\alpha\right), \alpha = 1,...,n$, называемые локальными координатами. Сами области U_q при этом

называются координатными окрестностями или картами.

Касательным вектором к многообразию M в произвольной точке x называется вектор, записываемый в системе локальных координат $\left(x_q^\alpha\right)$ набором чисел ξ_q^α; записи одного и того же вектора в разных системах локальных координат, содержащих эту точку, связаны формулой $\xi_p^\alpha = \sum\limits_{\beta=1}^{n}\left(\frac{\partial x_p^\alpha}{\partial x_q^\beta}\right)_x \xi_q^\beta$.

Римановой (псевдоримановой) метрикой на многообразии M называется положительная (невырожденная) квадратичная форма, заданная на касательных векторах в каждой точке многообразия и гладко зависящая от локальных координат. В каждой области U_p действия локальных координат $\left(x_p^\alpha\right)$ метрика задается симметрической матрицей $g_{\alpha\beta}^{(p)}\left(x_p^1,...,x_p^n\right), \left|\vec{\xi}\right|^2 = g_{\alpha\beta}^{(p)}\xi_p^\alpha\xi_p^\beta$ для любого вектора $\vec{\xi}$ в точке x (по повторяющимся индексам α, β подразумеваем суммирование). Метрика задает скалярное произведение двух векторов в одной и той же точке: $< \vec{\xi}, \vec{\eta} >= \vec{\xi}\,\vec{\eta} = g_{\alpha\beta}^{(p)}\xi_p^\alpha\eta_p^\beta$.

Тензор типа (k, ℓ) на многообразии задается в каждой системе локальных координат $\left(x_p^\alpha\right)$ набором функций ${}^{(p)}T_{j_1...j_\ell}^{i_1...i_k}(x)$. В других локальных координатах $\left(x_q^\beta\right)$, содержащих точку x, этот же тензор задается величинами ${}^{(q)}T_{t_1...t_\ell}^{s_1...s_k}(x)$, причем

$${}^{(q)}T_{t_1...t_\ell}^{s_1...s_k}(x) = \frac{\partial x_q^{s_1}}{\partial x_p^{i_p}} \cdots \frac{\partial x_q^{s_k}}{\partial x_p^{i_k}} \frac{\partial x_p^{j_1}}{\partial x_q^{t_1}} \cdots \frac{\partial x_p^{j_\ell}}{\partial x_q^{t_\ell}}\, {}^{(p)}T_{j_1...j_\ell}^{i_1...i_k}(x).$$

Все утверждения, сформулированные для тензоров в области n-мерного пространства, переносятся на тензоры на многообразии.

1.5 Краткие исторические сведения

Изучая геометрические образы, человек всегда стремится привлечь для этих целей новые действенные методы, аппараты исследования, недоступные для старых методов задачи, а также выявить и изучить новые свойства геометрических объектов.

Так, например, аналитическая геометрия основана на сопоставлении: каждой точке пространства – три числа (координаты); каждой поверхности – уравнение, связывающее текущие координаты; каждой кривой – два таких уравнения. Благодаря этому геометрические факты могут быть переведены на язык алгебры, геометрические задачи – решены приемами алгебры, после чего результат при помощи обратного перехода вновь истолковывается на геометрическом языке. Основная идея здесь состоит в том, чтобы заставить сильный и действенный алгебраический аппарат продуктивно работать для геометрических целей.

Дифференциальная геометрия означает аналогичное использование в геометрических целях аппарата дифференциального исчисления. Тем самым создается новая область геометрических исследований, в которую позволяет проникнуть применение нового аппарата.

Чтобы уяснить себе, чем характеризуется эта область – область дифференциальной геометрии, нужно рассмотреть, где и как вообще находит применение аппарат бесконечно малых.

Приведем элементарный пример. Рассмотрим прямолинейное, но неравномерное движение точки по закону $s=s(t)$. Изучим это движение за бесконечно малый промежуток времени от t до $t+\Delta t$. Тогда пройденный за время Δt путь будет выражаться величиной $\Delta s=s'(t)\,\Delta t+\varepsilon\Delta t$, где $\varepsilon\to 0$ при $\Delta t\to 0$. Если пренебречь $\varepsilon\Delta t$, бесконечно малой высшего порядка по отношению к Δt, то зависимость от Δt окажется линейной с коэффициентом $s'(t)$, т.е. движение можно считать равномерным.

Эта идея лежит в основе всех приложений дифференциального исчисления: сложные зависимости становятся в бесконечно малом линейными, неравномерные процессы – равномерными и т.д., если пренебречь бесконечно малыми высших порядков. Этим самым мы получаем возможность изучать интересующие нас зависимости в чрезвычайно упрощенном виде, правда, лишь в бесконечно малом.

Дифференциальная геометрия является осуществлением этой же идеи в области геометрии. Здесь геометрические объекты – линии и поверхности, семейства линий и поверхностей, – могут быть изучены с точки зрения строения в бесконечно малых кусках. И это «микроскопическое исследование» помогает нам обнаружить ряд стройных закономерностей, не видимых простым глазом и обнаруживающихся лишь в бесконечно малом. Возникает новый мощный метод исследования геометрических объектов, т.к. выделив те или иные особенности кривой или поверхности в отдельных их замечательных точках, мы тем самым можем составить представление о форме кривой или поверхности в целом.

Итак, дифференциальная геометрия является обширной областью приложений анализа бесконечно малых (дифференциального и интегрального исчислений и теории дифференциальных уравнений) к исследованию геометрических объектов.

На первоначальных этапах своего развития дифференциальная геометрия почти неотделима от анализа бесконечно малых, хотя многие факты из теории плоских кривых были уже известны и до создания дифференциального исчисления. Х. Гюйгенс, старший современник Г. Лейбница, имевший на него большое влияние, в своей теории часов с маятником (1673) изучает специальные кривые – эволюты и эвольвенты, трактрису, логарифмическую кривую цепную линию, показывает, что идеальный маятник (период колебаний не зависит от амплитуды) описывает циклоиду. Известно, что задача проведения касательной к кривой (Г. Лейбниц) наравне с задачей определения скорости движения точки (И. Ньютон) привели к понятию производной. Естественно, что уже у Лейбница имеются исследования о соприкасании кривых, об огибающих. Яков и Иван Бернулли изучали цепную линию и лемнискату (1694), логарифмическую спираль (Яков). Тогда же было получено дифференциальное уравнение геодезической линии на поверхности (1697, Иван). В 1731 г. появилось исследование А. Клеро «О кривых двоякой кривизны». Здесь кривая рассматривалась как пересечение двух поверхностей, искались длина дуги, касательная, нормаль к одной из поверхностей.

Л. Эйлер (1707-1783) родился в Швейцарии в г. Базель. Отец Эйлера учился у Якова Бернулли, сам Эйлер – у Ивана Бернулли.

В 1727 г. Л. Эйлер выехал в Петербург в созданную Петром Первым Академию наук и пробыл там (с двадцатилетним перерывом) до смерти, поражая научной продуктивностью. Он сделал существенные вклады во все математические дисциплины того времени. К теории поверхностей относится общее исследование

(1760) кривизны нормальных сечений поверхности в данной точке, определение главных направлений, главных радиусов кривизны. В 1782 г. Л. Эйлер рассматривает поверхность в параметрическом представлении. Он строит сферическую индикатрису касательных, вводит бинормаль, главную нормаль. Рассматривает развертывающиеся поверхности.

Новую эпоху в развитии дифференциальной геометрии открыл Г. Монж (1746-1818). Г. Монж родился в семье мелкого торговца во Франции. Окончил монастырскую школу и уже в 23 года получил положение профессора. В 1780 г. Г. Монж избирается членом Парижской академии наук. Революция 1789 г. захватила его. В течение восьми месяцев ученый занимает пост морского министра. Он отдается организации детища революции – Политехнической школы. Здесь лекции читались лучшими учеными. Г. Монж в своих лекциях «Приложения анализа» строит теорию пространственных кривых: вводит ось кривизны, показывает, что она описывает развертывающуюся поверхность, на которой лежат все эволюты кривой и множество ее центров кривизны. В изумительных мемуарах 1784 г. «О насыпях и выемках» он приходит к своей теореме о развертывающихся поверхностях, образованных нормалями вдоль линии кривизны. Его учениками были: Ж. Менье, который перестроил Эйлерово учение о кривизне плоских сечений поверхности; Ф. Дюпен, который с помощью индикатрисы ввел понятие сопряженных направлений и асимптотических линий; Ж. Понселе, который после русского плена привез из Саратова первые идеи проективной геометрии.

Третья эпоха дифференциальной геометрии связана с именем К. Гаусса (1777-1855). Сын поденщика в Брауншвейге (Германия), К. Гаусс своими исключительными способностями счета поразил мецената, и тот дал ему возможность закончить университет. К. Гаусс был всеобъемлющим гением. Он не любил преподавать и занимал пост директора обсерватории Геттингенского университета. К. Гаусс систематически вводил параметрическое представление поверхности, ее две квадратичные формы, рассматривал сферическое изображение поверхности, а также теорему о сумме углов геодезического треугольника. Чтобы две квадратичные формы могли служить основными формами поверхности, коэффициенты их должны удовлетворять трем уравнениям: одному – конечному и двум – дифференциальным. К. Гаусс нашел конечное уравнение, которое и привело его к знаменитой теореме о кривизне поверхности. В его бумагах были все элементы, чтобы получить два других, но он не понял их значения.

К. М. Петерсон (1828-1880) родился в Риге в бюргерской латышской семье. Учился в Дерптском университете. В то время кафедру геометрии возглавлял Ф. Г. Миндинг (1806-1885). Ф. Г. Миндинг составил себе имя работами по дифференциальной геометрии, среди которых следует назвать исследования по изгибанию поверхностей постоянной отрицательной кривизны (псевдосфере). К. М. Петерсон написал сочинение «Об изгибании кривых поверхностей». В нем он нашел уравнения для главных радиусов кривизны и для дифференцирования вдоль линии кривизны. Он отнес поверхность к произвольной системе координат линий и определил поверхность кроме линейного элемента и двух главных радиусов кривизны еще углом одного из главных направлений с координатной линией. В обоих случаях он получил кроме конечного уравнения два дифференциальных и доказал, что они достаточны для доказательства существования поверхности.

В 1865 г. К. М. Петерсон поступил преподавателем математики в среднюю школу Москвы. За год до смерти он получил в Одесском университете степень доктора математики без защиты диссертации. Им была написана статья «Об отношениях и сродствах между кривыми поверхностями» (1866), в которой рассматривались вопросы наложимости, о сопряженной сети линий, о преобразованиях, названных позже преобразованиями Петерсона.

К. М. Петерсон создал первую московскую школу дифференциальной геометрии. Например, Б. К. Млодзеевский (1858-1923) много времени посвятил разработке идей К. М. Петерсона. Д. Ф. Егоров (1869-1930) создал школу теории функций, но большинство его работ принадлежит дифференциальной геометрии.

На развитии дифференциальной геометрии не могло не сказаться великое открытие Н. И. Лобачевского (1793-1856), которое явилось поворотным пунктом в развитии геометрии вообще, а также и в развитии математики. Н. И. Лобачевский первым доказал, что разрабатывающаяся в течение двух тысячелетий евклидова геометрия является не единственной возможной моделью с достаточной степенью точности окружающее нас физическое пространство. Он полно развил другую геометрию, отличающуюся от евклидовой одной аксиомой (аксиомой о параллельных), из которой в частности вытекало, что сумма углов треугольника меньше двух прямых на величину, пропорциональную площади треугольника.

В то же самое время к этой мысли независимо от Н. И. Лобачевского приходили и другие математики (Гаусс, Бойаи), но никто из них не изложил своих идей с достаточной смелостью и полнотой и, первая публикация по неевклидовой геометрии принадлежит Лобачевскому(1829). Идеи Н. И. Лобачевского не были поняты вначале его современниками. Но уже через 10 лет после его смерти итальянский геометр Э. Бельтрами обратил внимание на то, что на поверхности отрицательной гауссовой кривизны, по крайней мере, локально осуществляются все факты геометрии Н. И. Лобачевского, если в качестве прямых рассматривать геодезические линии.

Следующий важный шаг в изучении геометрии сделал знаменитый немецкий математик Б. Риман (1826-1866). Он выделил из всех существовавших к тому времени фактов теории поверхности то, что обеспечивает строение внутренней геометрии: первую квадратичную форму и гауссову кривизну. Он показал, что неограниченное число геометрий может быть построено на основе задания квадратичных форм $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} dx^i dx^j$ и вычисленных при помощи коэффициентов a_{ij}, играющих роль гауссовой кривизны (n считается произвольной). Построенные таким образом геометрии получили название римановых геометрий, а соответствующие пространства называются римановыми. Стало ясно, что всякая поверхность постоянной гауссовой кривизны К несет на себе некоторую планиметрию, которая при К = 0 совпадает с евклидовой. Так возникли неевклидовы геометрии: эллиптическая (геометрия Римана, К = const > 0), гиперболическая (геометрия Лобачевского, К = const < 0). Сумма углов треугольника в геометрии Римана больше двух прямых. Идеи Б. Римана привлекли всеобщее внимание, когда в теории относительности Эйнштейна законы тяготения и прохождения света стали объясняться свойствами кривизны четырехмерного пространства, три первые координаты которого определяют точку физического пространства, а четвертая – время. Новая теория излагалась в особом алгоритме, который использовал абсолютное дифференцирование Г. Риччи (1884) и вырос в стройную систему тензорного анализа.

У нас неутомимым проповедником новых методов в геометрии является В. Ф. Каган. Он создал большую тензорную школу, которая объединяет в себе саратовскую школу В. В. Вагнера, казанскую школу А. П. Нордена, московскую П. К. Рашевского.

Одной из основных тенденций развития дифференциальной геометрии в двадцатом веке является переход от изучения геометрических объектов «в малом», в какой-то окрестности точки, к их изучению «в целом». Кривые поверхности, служащие основными объектами изучения классической дифференциальной геометрии, все больше вытесняются теперь n-мерными дифференцируемыми многообразиями с заданными на них различными геометрическими структурами. Выдающуюся роль в развитии современной дифференциальной геометрии сыграли Э. Картан, А. Д. Александров, А. В. Погорелов, Н. В. Ефимов, С. П. Новиков.