3 Евклидовы и псевдоевклидовы пространства

Тема 8 Системы координат

Школьная геометрия изучает различные метрические свойства простейших геометрических фигур, то есть в основном находит соотношения между длинами и углами треугольников и многоугольников, а также на базе этого вычисляются площади, поверхности и объёмы некоторых тел. Центральными понятиями, на которых строится геометрия, являются длина отрезка или кривой, угол между двумя пересекающимися линиями.

Целью аналитической геометрии было описание геометрических фигур при помощи уравнений в декартовой системе координат на плоскости или в трёхмерном пространстве. Дифференциальная геометрия изучает то же, но в ней глубоко будут использоваться как средства аналитической геометрии, так и дифференциального исчисления и линейная алгебра.

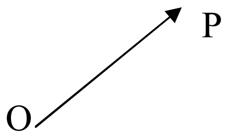
Итак, геометрия разворачивается в некотором пространстве, которое состоит из точек P, Q, R, …. В это пространство введём декартовы координаты $(x^1, \dots, x^n)$, то есть поставим в соответствие каждой точке пространства определённые наборы чисел $(x^1, x^2, \dots, x^n)$, которые будем называть координатами. Число координат есть размерность пространства. Потребуем также, чтобы разным точкам соответствовали разные наборы чисел. Две точки $P(x^1,\dots, x^n)$ и $Q(y^1, \dots, y^n)$ совпадают тогда и только тогда, когда $x^i = y^j$, для всех $i = 1, \dots, n$. И наоборот, каждому набору чисел $(x^1,\dots, x^n)$ должна соответствовать какая-либо точка изучаемого пространства. Такое пространство называется декартовым.

Пример. Пусть $n = 3$.

1) Пусть каждой точке Р соответствуют три её координаты (x^1, x^2, x^3);

2) $P(x^1, x^2, x^3)$, $Q(y^1, y^2, y^3)$, $|PQ|^2 = \ell^2 = \sum_{i-1}^{3} (y^i - x^i)^2$.

Если условия 1 и 2 выполняются, то пространство называется евклидовым, а декартовы координаты с такими свойствами, называются евклидовыми координатами. С точками евклидова пространства свяжем векторы:



$\overrightarrow{OP}$ – радиус-вектор

Точка О – начало координат. Вектор, идущий из точки О в изучаемую точку P, называется радиус-вектором этой точки. Декартовы координаты $(x^1,\dots, x^n)$ точки P, называются координатами вектора. Пусть $\xi = (x^i)$, $\eta = (y^i)$, $\xi + \eta = (x^i + y^i)$. Можно также вектор умножить на число. $\ell_1 = (1, 0, 0)$, $\ell_2 = (0, 1, 0)$, $\ell_3 = (0, 0, 1)$ – единичные векторы. Если $\xi = (x^1, x^2, x^3)$, то $\xi = x^1\ell_1 + x^2\ell_2 + x^3\ell_3$. Для любых n аналогично.

Поэтому евклидово пространство можно рассматривать как линейное или векторное пространство, в котором расстояние между точками (концами радиус-векторов) $\xi = (x^{i})$, $\eta = (y^{i})$ измеряется $\ell^2 = \sum_{i-1}^{3}(y^i - x^i)^2$.

Определение. Евклидовым скалярным произведением векторов $\xi = (x^{i})$, $\eta = (y^{i})$, называется число $\xi\,\eta = \eta\,\xi = \sum_{i-1}^{3} y^i x^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (рис. 22). Следовательно,

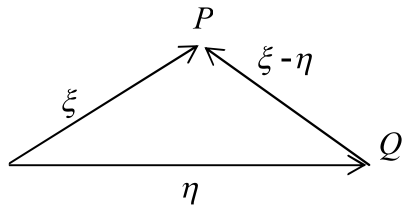


Рисунок 22

$PQ^2 = (\xi - \eta)^2$, $\gamma = (z^i)$, то $||\gamma| = \sqrt{\gamma\gamma}$.

Из аналитической геометрии известно, что $\cos\varphi = \dfrac{\xi\eta}{|\xi||\eta|}$. Таким образом, длины и углы связаны с понятием скалярного произведения. Это понятие будет взято за первичное, на котором строится геометрия.

Пусть в евклидовом пространстве задана кривая в параметрической форме $x^{i} = f^{i}(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где $f^{i}(t)$ – дифференцируемые функции от параметра t, а $a \le t \le b$. Касательным вектором или вектором скорости кривой в момент времени t мы определяли вектор $v(t) = \left(\dfrac{df^i}{dt}\right)$. Кривая называется регулярной, если её вектор скорости отличен от нуля в каждой точке этой кривой.

Определение. Длиной линии называется число $\ell = \int_a^b \sqrt{v(t)v(t)}dt = \int_a^b |v(t)|dt$.

Пусть $x^i = f^{i}(t)$ и $x^i = g^i(t)$ – две линии, которые пересекаются при $t = t_0$.

$v = \left(\dfrac{df^i}{dt}\right)_{t=t_0}$, $w = \left(\dfrac{dg^i}{dt}\right)_{t=t_0}$ – касательные векторы в точке $t = t_0$.

Определение. Углом между двумя линиями в точке их пересечения при заданном аргументе $t = t_0$ называется угол между векторами v, w, то есть $\cos\varphi = \dfrac{wv}{|w||v|}$.

Можно выбрать параметр t так, чтобы $|v| = c$, где c – константа. Тогда $\ell = \int_a^b |v|dt = c(b-a)$. Такой параметр t, что $|v(t)| = 1$, мы называли натуральным параметром – он равен длине линии, которую мы пробегаем.

В евклидовой геометрии будет встречаться лишь положительное скалярное произведение вектора самого на себя.

$\xi\,\xi = x^1 x^1 + x^2 x^2 + \ldots + x^n x^n$,

$x^{1^2} + x^{2^2} + \ldots + x^{n^2} > 0$.

Приведём пример неположительного скалярного произведения векторов четырёхмерного пространства: (x^1, x^2, x^3, $x^0 = ct$). Это пространство играет важную роль в специальной теории относительности. Пусть

$\xi = (x^1, x^2, x^3, x^0)$, $\eta = (y^1, y^2, y^3, y^0)$. Тогда $\xi\,\eta = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 - x^0 y^0$.

Такое пространство называется псевдоевклидовым или пространством Минковского.

В этом пространстве существуют векторы трёх типов:

1) пространственноподобные векторы: $\xi\,\xi > 0$;
2) времениподобные векторы: $\xi\,\xi < 0$;
3) световые векторы: $\xi\,\xi = 0$.

Здесь длины векторов могут оказаться мнимыми или нулевыми.

Определение. Областью без границы называется совокупность точек в трёхмерном пространстве такая, что вместе с любой точкой из этой совокупности ей принадлежат все достаточно близкие к ней точки пространства.

Область с границей получается, если добавить к области без границы её предельные точки (то есть точки, которые можно достичь изнутри области сходящимися к ним последовательностями внутренних точек). Область без границы: $\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 < 1$, с границей: $\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 \le 1$. Всё пространство – область.

Определение. Градиентом функции $f(x^1,\ldots, x^n)$ в точке $P(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ в заданной декартовой системе координат евклидова пространства (или его области) называется вектор

$$\operatorname{grad} f\,|_{\,P} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{x'=x_0'} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\ell_i,$$ где ℓ_i – базисные орты.

Если рассматривать градиент как функцию от заданной точки P, то мы получаем векторное поле, то есть когда в каждой точке пространства или его области задан вектор, прикреплённый к этой точке.

Пусть заданы теперь в пространстве функция $f(x^1, \ldots, x^n)$ и некоторая кривая $x^i = x^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, $a \le t \le b$. С какой скоростью изменяется функция $f(x^1(t)), \ldots, f(x^n(t)) = \varphi(t)$ при изменении параметра t?

Найдем

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{dx^1}{dt} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}\frac{dx^n}{dt} = (grad\ f)v,$$ где $grad\ f = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}\ell_i$, $v = \sum_{n=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x}\ell_i$, ℓ_i – базисные орты.

Определение. Производной функции $f(x^1, \ldots, x^n)$ по направлению вектора $\xi = (y^1,\ldots,y^n)$, вычисленной в точке $P = (x_0^i)$, называется скалярное произведение градиента функции f, вычисленного в точке P, на вектор ξ.

Обозначается $\left.\dfrac{df}{d\xi}\right|_P = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x^i} y^i$, $x^i = x_0^i$

Теорема. Если задана кривая $x^i = x^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, такая, что в точках этой кривой скалярное произведение градиента f и вектора скорости равно нулю, то функция f постоянна вдоль этой кривой.

◀Доказательство. Если $x^i = x^i(t)$ – кривая, $\varphi(t) = f\left(x^i(t)\right)$, то $\dfrac{df}{dt} = \dfrac{d\varphi}{dt} = grad\, f \cdot v$, где $v = \left(\dfrac{dx^i}{dt}\right)$ – вектор скорости кривой. Так как $grad\ f \cdot v \equiv 0$, то $\dfrac{d\varphi}{dt} \equiv 0$, $\varphi(t)$ – const. ▶

Общеизвестны следующие типы координат (рис. 23):

1) декартовы координаты $(x^1, \ldots, x^n)$;

2) на плоскости – полярные координаты (r, φ); $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$;

3) цилиндрические координаты (r, φ, z); $z = z$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, то есть полярные координаты в плоскости 0xy;

4) сферическая система координат (r, φ, θ); $z = r\cos\theta$, $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$.

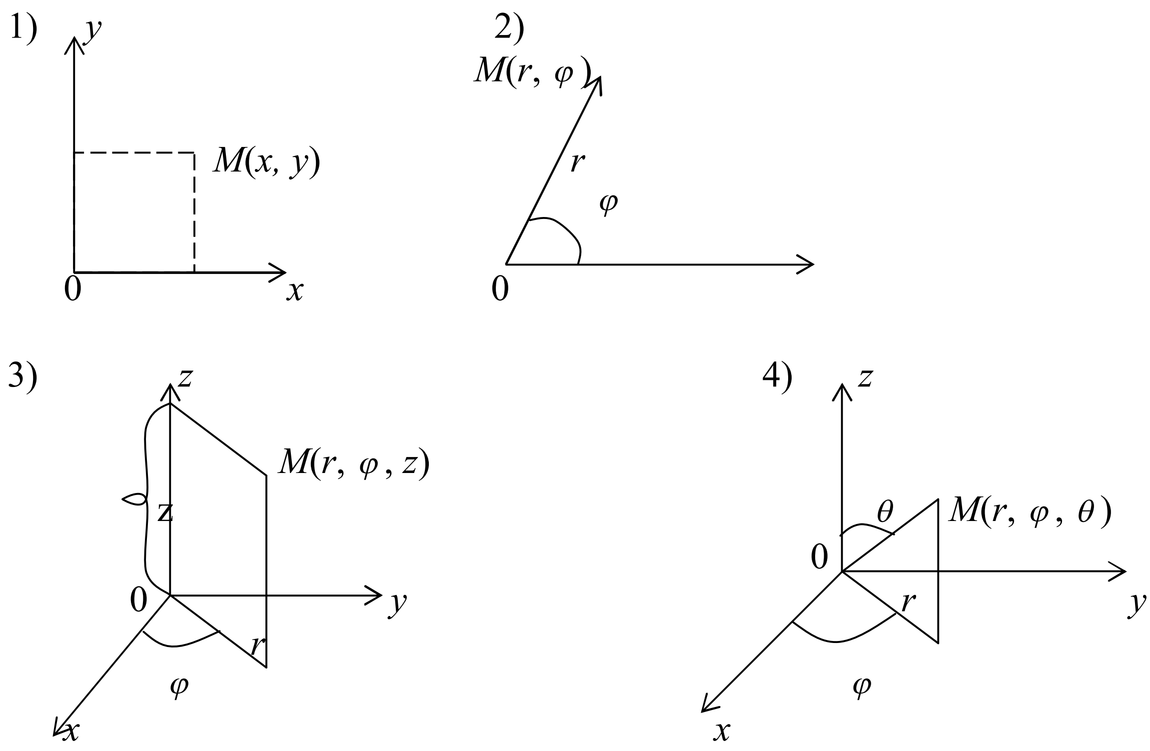


Рисунок 23

Пусть заданы декартовы (первичные) координаты (x^1, …, x^n). Пусть теперь заданы и какие-то другие координаты в той же области (z^1, …, z^n). Это значит, что каждая $x^i = x^i$ (z^1, …, z^n) или $z^i = z^i(x^1$, …, $x^n)$.

Значит, каждой точке области можно сопоставить как набор первичных координат $(x) = (x^i)$, так и набор новых координат (z) = (z^j). Поэтому декартовы координаты можно выразить через новые и наоборот. Пусть $x^i = \sum_j^n a_j^i z^j$, $i = 1, \ldots, n$ – линейная замена координат в пространстве. А чтобы теперь выразить z через x, необходимо и достаточно, как известно из линейной алгебры, чтобы матрица $A = (a_j^i)$ имела обратную матрицу: $A^{-1} = B = (b_j^i)$. Обратная матрица B определяется так: $B = (b_j^i)$, где $\sum_{j=1}^n b_j^i a_k^j = \delta_k^i$; $\delta_k^i = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}$; $E = \left(\delta_k^i\right)$ – единичная матрица.

Условимся делать такую запись: $\sum_j^n a_j^i z^j = a_j^i z^j$, где суммирование будет производиться по двум входящим в эту формулу индексам.

Итак, если точке P соответствовал набор координат (x^1, …, x^n), то в новых координатах этой точке будет соответствовать набор (z^1, …, z^n), причём $x^i = \sum_j^n a_j^i z^j$, $i = 1, \ldots, n$, где $a_j^i = \dfrac{\partial x^i}{\partial z^j}$.

Рассмотрим произвольные координаты $x^i = x^i$ (z^1, …, z^n), $i = 1, \ldots, n$ и точку $P = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$. Предположим, что координаты определяют каждую точку в нашем пространстве, то есть любому набору чисел $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ соответствует хотя бы один набор $(z_0^1, \ldots, z_0^n)$ такой, что $x_0^i = x_0^i(z_0^1, \ldots, z_0^n)$.

<u>Определение.</u> Точка $P = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$ называется <u>неособой точкой системы</u> координат (z^1, …, z^n) при $z^i = z_0^i$, где $i = 1, \ldots, n$ и $x_0^i = x^i(z_0^1, \ldots, z_0^n)$, тогда и только тогда, если $A = \left(\left. \dfrac{\partial x^i}{\partial z^j} \right|_{z^q = z_0^q} \right) = \left(a_j^i\right)$. Эта матрица и называется <u>матрицей Якоби</u>$\left(\dfrac{\partial x}{\partial z}\right)$, а $J = \left|\dfrac{\partial x}{\partial z}\right|$ называется <u>якобианом.</u>

Известно, что если $x = Az$, $x = (x^i)$, $a_j^i = \dfrac{\partial x^i}{\partial z^j}$, $z = (z^i)$, где $x^i = \sum_j^n a_j^i z^j$, $a_j^i = \dfrac{dx^i}{dz^j}$, $i = 1, \ldots, n$, то $z = Bx$, где B есть обратная матрица по отношению к матрице A.

Поставим вопрос: вычислить длину кривой в общих координатах z, где

$x^1 = x^1(z^1, z^2)$, $x^2 = x^2(z^1, z^2)$, (x^1, x^2) – декартовы координаты. Кривая $z^1 = z^1(t)$, $z^2 = z^2(t)$ или $x^1 = x^1(z^1(t), z^2(t))$, $x^2 = x^2(z^1(t), z^2(t))$

$\ell = \int_a^b |v(t)| dt$, где $v(t) = \left(\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}\right)$ – вектор скорости.

$|v| = \sqrt{\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2}$. Так как $x^1 = x^1(z^1(t), z^2(t))$,

$x^2 = x^2(z^1(t), z^2(t))$, то $\frac{dx^1}{dt} = \frac{\partial x^1}{\partial z^1}\frac{dz^1}{dt} + \frac{\partial x^1}{\partial z^2}\frac{dz^2}{dt}$, $\frac{dx^2}{dt} = \frac{\partial x^2}{\partial z^1}\frac{dz^1}{dt} + \frac{\partial x^2}{\partial z^2}\frac{dz^2}{dt}$,

$\frac{dx^1}{dt} = a_1^1\frac{dz^1}{dt} + a_2^1\frac{dz^2}{dt}$, $\frac{dx^2}{dt} = a_1^2\frac{dz^1}{dt} + a_2^2\frac{dz^2}{dt}$, $v_x^1 = a_1^1 v_z^1 + a_2^1 v_z^2$, $v_x^2 = a_1^2 v_z^1 + a_2^2 v_z^2$.

$$|v_x|^2 = (v_x^1)^2 + (v_x^2)^2 = (a_1^1 v_z^1 + a_2^1 v_z^2)^2 + (a_1^2 v_z^1 + a_2^2 v_z^2)^2 = a_1^1 a_1^1 v_z^1 v_z^1 + 2a_1^1 a_2^1 v_z^1 v_z^2 +$$
$$+ a_2^1 a_2^1 v_z^2 v_z^2 + a_1^2 a_1^2 v_z^1 v_z^1 + 2a_1^2 a_2^2 v_z^1 v_z^2 + a_2^2 a_2^2 v_z^2 v_z^2 = (a_1^1 a_1^1 + a_1^2 a_1^2) v_z^1 v_z^1 +$$
$$+ 2(a_1^1 a_2^1 + a_1^2 a_2^2) v_z^1 v_z^2 + (a_2^1 a_2^1 + a_2^2 a_2^2) v_z^2 v_z^2 = \sum_{i,k=1}^{2} g_{ik} \cdot v_z^i v_z^k,$$

где $g_{ik} = \sum_{j=1}^{2} a_i^j a_k^j$, $i,k = 1,2$.

Итак, для любого n можно записать, что

$$|V_x|^2 = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} \frac{dz^i}{dt}\cdot\frac{dz^k}{dt}, \text{ где } g_{ik} = g_{ki} = \sum_{j=1}^{n} a_i^j a_k^j = \sum_{j,q=1}^{n} \delta_{jq} a_i^j a_k^q.$$

Координаты $z^1, \ldots, z^n$ называются евклидовыми, если длина вектора в них выражается формулой $|V_Z|^2 = \sum_{j=1}^{n} (y^j)^2$, где $V_Z = (y^1, \ldots, y^n) = (\frac{dz^1}{dt}, \ldots, \frac{dz^n}{dt})$.

Если $x^j = x^j(z), (a_j^i) = (\frac{dx^i}{dz^j}) = A$, то необходимо и достаточно для евклидовости координат, чтобы выполнялось условие: $g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$.

Выясним, как преобразуются компоненты g_{ij} матрицы G при переходе к новым координатам. Пусть в системе (x) $\xi_1 = (\xi_1^1, \ldots, \xi_1^n)$, $\xi_2 = (\xi_2^1, \ldots, \xi_2^n)$. В системе ($Z$) $\xi_1 = (\eta_1^1, \ldots, \eta_1^n)$, $\xi_2 = (\eta_2^1, \ldots, \eta_2^n)$. Пусть заданы новые координаты (y) в той же области и $z^j = z^j(y^1, \ldots, y^n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть $B = (B_j^i) = \left(\frac{\partial z^i}{\partial y^i}\right)$. Векторы ξ_1, ξ_2 в координатах $(y^1, \ldots, y^n)$ имеют тогда компоненты $(\varepsilon_1^1, \ldots, \varepsilon_1^n)$, $(\varepsilon_2^1, \ldots, \varepsilon_2^n)$, причём $\eta_1^i = \sum_{k=1}^{n} b_k^i \varepsilon_1^k$, $\eta_2^j = \sum_{\ell=1}^{n} b_\ell^j \varepsilon_2^\ell$ (*). Пусть матрица, дающая выражение для скалярного произведения в координатах (y), равна h_{ij}. Это значит, что $\xi_1\xi_2 = \sum_{k,\ell=1}^{n} h_{k\ell}\varepsilon_1^k\varepsilon_2^\ell = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\eta_1^i\eta_2^j$.

Используя (*), имеем:

$$\sum_{k,\ell=1}^{n} h_{k\ell}\varepsilon_1^k\varepsilon_2^\ell = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\eta_1^i\eta_2^j = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^i\varepsilon_1^k\right)\left(\sum_{\ell=1}^{n} b_\ell^j\varepsilon_2^\ell\right) = \sum_{k,\ell=1}^{n}\left(\sum_{i,j=1}^{n} b_k^i g_{ij} b_\ell^j\right)\varepsilon_1^k\varepsilon_2^\ell \Rightarrow h_{k\ell} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} b_k^i g_{ij} b_\ell^j.$$

Тема 9 Риманова и псевдориманова метрика

Пусть задано пространство (или область) с декартовыми координатами (x^i) и заданы новые координаты (z^i), $x^i = x^i(z^1,\ldots z^n)$, причём новая система не имеет особых точек. Мы показали, что $g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x^k}{\partial z^i}\frac{\partial x^k}{\partial z^j} = \sum_{k,q=1}^{n} \delta_{kq}\frac{\partial x^k}{\partial z^i}\frac{\partial x^q}{\partial z^j}$. Значит, в координатах (z) имеем для скалярного произведения формулу $\xi_1\xi_2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\xi_1^i\xi_2^j$. Риманова метрика в области пространства с произвольными регулярными координатами (z) задаётся набором функций $g_{ij}(z) = g_{ji}(z)$, причём если задана кривая $z^i = z^i(t)$, i = 1, …, n, то квадратом длины её вектора скорости $v_z = \left(\frac{dz^i}{dt}\right)_{t=t_0}$ в точке $t = t_0$ называется число $\ell^2 = g_{ij}\frac{dz^i}{dt}\frac{dz^j}{dt}$.

Определение. Будем говорить, что набор функций $g_{ij}(z) = g_{ji}(z)$ задаёт риманову метрику в координатах (z), если при любых $(z^1, \ldots, z^n)$ форма $\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\eta^i\eta^j$ положительна. Если $\det(g_{ij}) \neq 0$, но указанная форма знаконеопределённая, то будем говорить, что набор задаёт псевдориманову метрику.

Определение. Длиной кривой по отношению к римановой или псевдоримановой метрике будем называть число $\ell = \int_a^b \sqrt{g_{ij}\frac{dz^i}{dt}\frac{dz^j}{dt}}dt$.

Если заданы новые координаты (y) в той же области такие, что $z^i = z^i(y)$, $\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| \neq 0$, то в новых координатах (y) риманова метрика определяется набором функций $g'_{ij}(y)$, где $g'_{ij}(y) = g'_{ji}(y)$ и $g_{ij} = \frac{\partial z^k}{\partial y^i} g_{kl}\frac{\partial z^l}{\partial y^i} = g_{ij}(y^1,\ldots,y^n)$. На матричном языке $g' = \mathrm{A}g\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$, где $\mathrm{A} = \left(\frac{\partial z^i}{\partial y^k}\right)$. $g' = (g'_{ij})$, $g = (g_{ij})$.

Определение. Будем говорить, что метрика евклидова, если найдутся новые координаты (x^1, …, x^n), $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^n)$, $\left|\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right| \neq 0$, такие, что $g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x^k}{\partial z^i}\frac{\partial x^k}{\partial z^j} = \sum_{k,q=1}^{n} \delta_{kq}\frac{\partial x^k}{\partial z^i}\frac{\partial x^q}{\partial z^j}$. В координатах ($x^1$, …, x^n) имеем $g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$, и координаты ($x$) называются евклидовыми.

Мы всегда требуем, чтобы $|g_{ij}| \neq 0$ или ещё говорят, чтобы метрика g_{ij} была невырожденной. Если матрица ($g_{ij}(z)$) определяет положительную квадратичную форму, то есть длины всех ненулевых векторов положительны, то мы говорим, что g_{ij} задаёт риманову метрику. Если $|g_{ij}| \neq 0$, но форма $\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\xi^i\xi^j$ знакопеременная, то будем говорить, что имеется псевдориманова метрика.

Важен случай при $n = 4$ и форма $\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\xi^i\xi^j$ в каждой точке (z_0^1, …, z_0^n) может быть приведена к виду: $\left(\xi^1\right)^2 + \left(\xi^2\right)^2 + \left(\xi^3\right)^2 - \left(\xi^4\right)^2$. Это такие метрики, на которых построена общая теория относительности.

Определение. Линейное вещественное пространство размерности n называется псевдоевклидовым пространством индекса s, если в этом пространстве задана билинейная форма $\xi\eta = -\xi^1\eta^1 - \ldots - \xi^s\eta^s + \xi^{s+1}\eta^{s+1} + \ldots + \xi^{s+q=n}\eta^{s+q=n}$.

Если $s = 0$, то получаем евклидово пространство R^n. Выше приведенное пространство будем обозначать R_s^n.

Пространство R_1^4 является пространством специальных теорий относительности и называется пространством Минковского.

Длина вектора ξ в псевдоевклидовом пространстве R_s^n определяется следующей формулой: $|\xi|_s = \sqrt{(\xi\xi)_s}$, где

$$(\xi\xi)_S = -\xi^1\xi^1 - \ldots - \xi^s\xi^s + \xi^{s+1}\xi^{s+1} + \ldots + \xi^{s+q=n}\xi^{s+q=n}.$$

Тема 10 Псевдоевклидово пространство

В отличие от пространства R^n в пространстве R_s^n длины векторов могут быть нулевыми и мнимыми. В пространстве R^n совокупность всех точек ξ, таких что $|\xi| = \rho$ образует ($n - 1$)–мерную сферу, S^{n-1} (гиперсфера). В псевдоевклидовом пространстве R_s^n также рассматривается множество точек ξ, удаленных от начала координат на расстояние ρ, где ρ может быть действительным, мнимым числами или нулём. Это множество точек называется псевдосферой индекса S и обозначается S_s^{n-1}. Будем различать псевдосферы действительного, мнимого и нулевого радиусов. Псевдосфера нулевого радиуса имеет уравнение: $-(\xi^1)^2-(\xi^2)^2-\ldots-(\xi^s)^2+(\xi^{s+1})^s+\ldots+(\xi^{s+q=n})^2=0$. Это есть конус второго порядка в пространстве R_s^n с вершиной в начале координат. Все векторы, выходящие из начала координат и лежащие на этом конусе, имеют нулевую длину. Векторы, лежащие вне этого конуса, имеют длину, отличную от нуля.

Псевдосфера S_s^{n-1} нулевого радиуса называется изотропным или световым конусом. Векторы, лежащие внутри конуса, имеют положительный квадрат длины, $|\xi|^2>0$ и, называются времениподобными, а векторы лежащие вне этого конуса имеют отрицательный квадрат длины, $|\xi|^2<0$, и называются пространственноподобными. Векторы, лежащие на изотропном конусе, называются изотропными или световыми, $|\xi|=0$.

Примеры.

1) Пусть $n=1$, $s=0$. R_0^1 совпадает с обычной вещественной прямой.

2) Пусть $n=2$, $s=1$ и пусть заданы декартовы координаты (x^1, x^2). Тогда получаем изотропный конус $-(x^1)^2+(x^2)^2=0 \Rightarrow x^1=\pm x^2$. Этот конус разбивает пространство R^2 на две области. В одной из них скалярное произведение $(\xi\xi)_1>0$, когда $\left|x^2\right|>\left|x^1\right|$ и $(\xi\xi)_1<0$, когда $\left|x^2\right|<\left|x^1\right|$ (рис. 24).

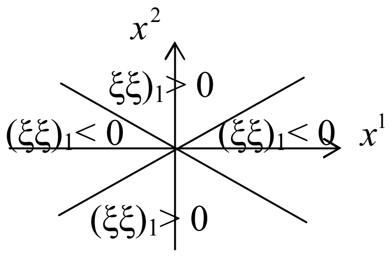


Рисунок 24

Псевдосфера действительного радиуса – это гипербола $-(x^1)^2+(x^2)^2=\alpha^2(\alpha=\rho)$ и псевдосфера мнимого радиуса – гипербола $-(x^1)^2+(x^2)^2=-\alpha^2(\rho=\alpha i)$ (рис. 25).

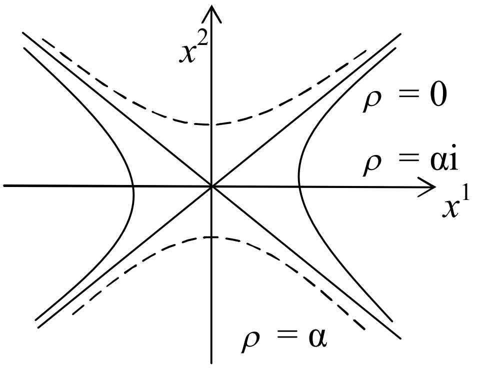


Рисунок 25

3) Пусть $n = 3$, $s = 1$. Изотропный конус (псевдосфера нулевого радиуса) является обычным конусом второго порядка с осью x^1:

$$-(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0.$$

Он разбивает всё пространство на две области: внутреннюю и внешнюю (рис. 26).

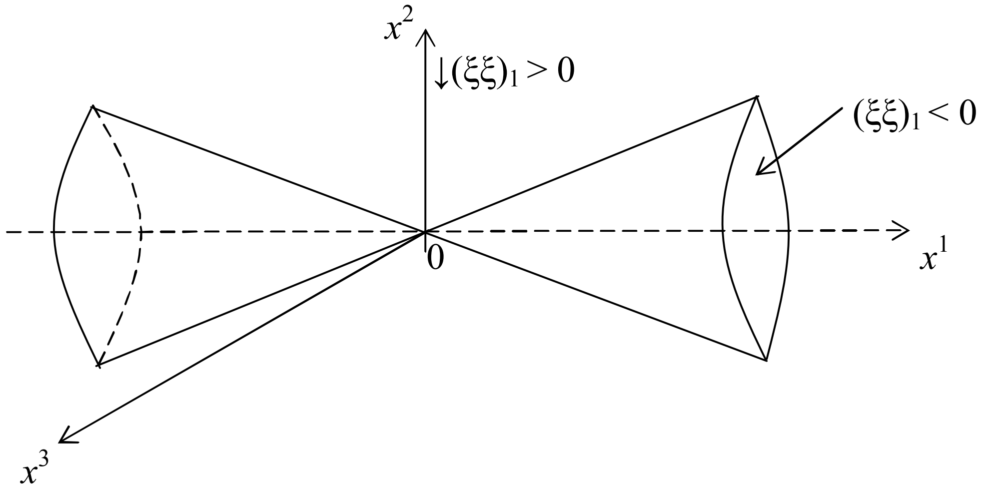


Рисунок 26

Псевдосферы вещественного радиуса – это однополостные гиперболоиды: $-(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = \alpha^2 (\alpha = \rho)$, а псевдосферы мнимого радиуса – это двуполостные гиперболоиды: $-(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = -\alpha^2 (\rho = \alpha i)$ (рис. 27).

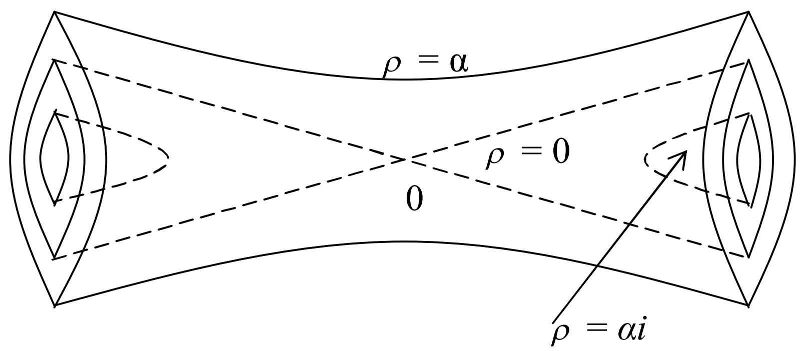


Рисунок 27

Изучим метрические свойства пространства R_1^3. Это пространство будем моделировать в пространстве R^3. Через (x, y, z) обозначим декартовы координаты пространства R^3. Тогда псевдоскалярное произведение имеет вид $(\xi\xi)_1 = -x^2 + y^2 + z^2$.

Гиперсферой или псевдосферой мнимого радиуса $i\rho$ в пространстве R_1^3 является двуполостный гиперболоид $-\rho^2 = -x^2 + y^2 + z^2$. Так как этот гиперболоид вложен в R^3, то можно сказать, что геометрия пространства R_1^3 индуцирует некоторую геометрию на гиперболоиде или с точки зрения римановой метрики метрика пространства R_1^3 индуцирует некоторую метрику на гиперболоиде.

Рассмотрим гиперболоид $-\rho^2 = -x^2 + y^2 + z^2$, $x > 0$ (рис. 28).

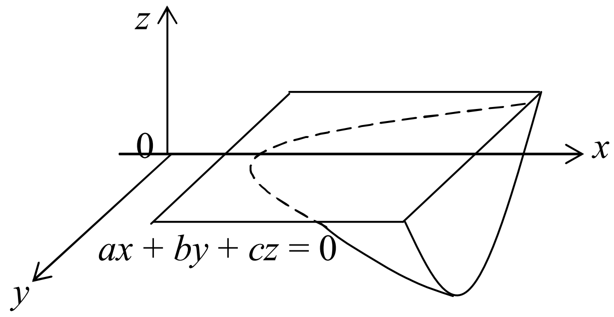


Рисунок 28

Точками индуцированной на гиперболоиде геометрии мы назовём обычные точки гиперболоида, а прямыми индуцированной геометрии назовём всевозможные линии на гиперболоиде, которые получаются при пересечении гиперболоида плоскостями $ax + by + cz = 0$, проходящими через начало координат. Установим соответствие между геометрией на гиперболоиде и геометрией в круге на евклидовой плоскости. Такое преобразование называется стереографической проекцией.

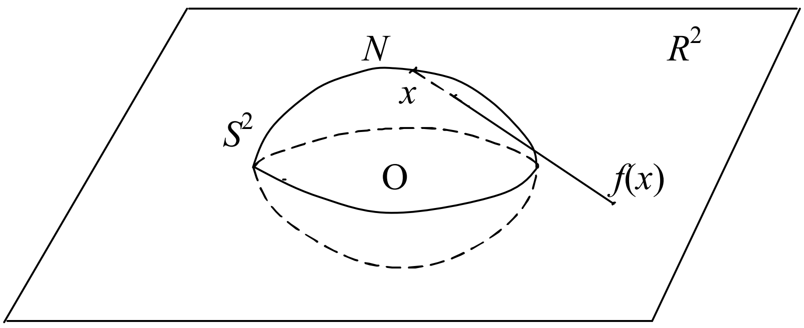


Рисунок 29

Плоскость R^2 проходит через центр O сферы S^2 и стереографическая проекция $f : S^2 \to R^2$ сопоставляет каждой точке x, не совпадающей с северным полюсом N сферы, точку $f(x)$ – точку пересечения луча Nx с плоскостью R^2 (рис. 29).

При этом северному полюсу соответствует бесконечно удалённая точка расширенной комплексной плоскости. Стереографическая проекция псевдосферы S_1^2 на плоскость R_1^2 определяется подобным же образом. Центром псевдосферы $S_1^2 = \{-\rho^2 = -x^2 + y^2 + z^2\}$ является начало координат O. Северный полюс есть точка с декартовыми координатами (ρ, 0, 0). Плоскость, на которую осуществляем проекцию, есть плоскость YOZ. Так как мы рассмотрели только одну часть гиперболоида $x > 0$, то образ этой плоскости при проекции f покрывает не всю плоскость R^2 = YOZ, а только открытый круг радиуса ρ.

Теорема. Пусть (x, y, z) – координаты точки $x \in S_1^2$ $(x > 0)$, и пусть (u^1, u^2) – координаты точки $f(x)$ є YOZ, где f – стереографическая проекция.

Тогда

$$x = \rho\left(-1 + \frac{2\rho^2}{-(u^1)^2 - (u^2)^2 + \rho^2}\right),$$

$$y = \frac{-2\rho\, u^1}{-(u^1)^2 - (u^2)^2 + \rho^2},$$

$$z = \frac{2\rho\, u^2}{-(u^1)^2 - (u^2)^2 + \rho^2}.$$

◀Доказательство.

Сечение гиперболоида плоскостью, проходящей через ось OX, имеет следующий вид:

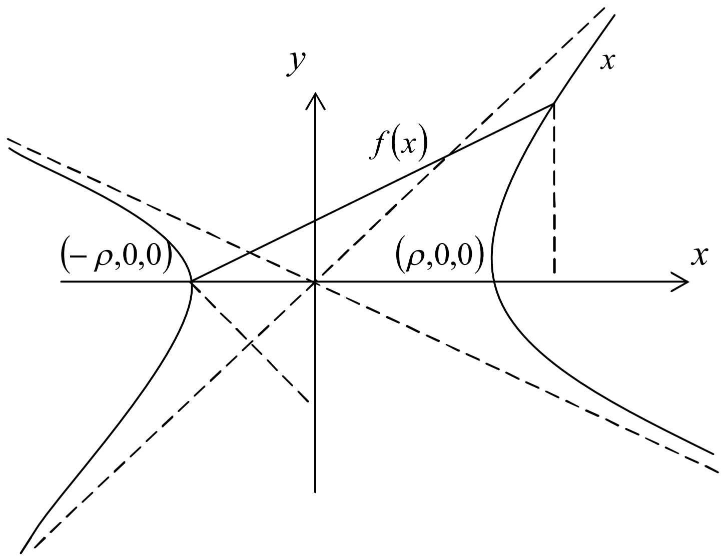


Рисунок 30

Тогда из рисунка 30 видно, что

$\frac{y}{u^1} = \frac{x+\rho}{\rho}$, $\frac{z}{u^2} = \frac{x+\rho}{\rho}$, $y = u^1\left(1 + \frac{x}{\rho}\right)$, $z = u^2\left(1 + \frac{x}{\rho}\right) - \rho^2 = -x^2 + y^2 + z^2$. Так как $-\rho^2 = -x^2 + y^2 + z^2$, то подставляя y и z в это уравнение, получим, что

$$-\rho^2 = -x^2 + (u^1)^2\left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 + (u^2)^2\left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 \Rightarrow x = -\rho\left(1 + \frac{2\rho^2}{(u^1)^2 + (u^2)^2 - \rho^2}\right).$$

Аналогичное доказательство для y и z. ▶

При стереографической проекции $f:\ S_1^2 \to (y^2 + z^2 < \rho^2) = D^2$ точки гиперболоида переходят в точки двумерного круга D^2 радиуса ρ. В какие кривые на круге D^2 перейдут прямые геометрии на гиперболоиде, то есть линии пересечения гиперболоида плоскостями $ax + by + cz = 0$?

<u>Теорема.</u> Каждая линия пересечения S_1^2 плоскости $ax + by + cz = 0$ переходит при отображении f в дугу окружности, пересекающую окруж-

ность $y^2 + z^2 = \rho^2$ под прямым углом.

◀Доказательство. Для доказательства достаточно подставить в уравнение плоскости $ax + by + cz = 0$ выражение x, y, z через u^1, u^2, $u \neq 0$.

Тогда $-a - \dfrac{2a\rho^2}{-(u^1)^2 - (u^2)^2 - \rho^2} + \dfrac{2bu^1}{-(u^1)^2 - (u^2)^2 + \rho^2} + \dfrac{2cu^2}{-(u^1)^2 - (u^2)^2 - \rho^2} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(u^1 - \dfrac{b}{a}\right)^2 + \left(u^2 - \dfrac{c}{a}\right)^2 = \dfrac{b^2 + a^2}{a^2} - \rho^2$ – окружности с центром в точке $\left(\dfrac{b}{a}, \dfrac{c}{a}\right)$ и $r = \sqrt{\dfrac{b^2 + c^2}{a^2} - \rho^2}$, пересекающая окружность $y^2 + z^2 = \rho^2$ в точках A и B под прямым углом $\rho^2 + r^2 = \left(\dfrac{b}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{c}{a}\right)^2$. ▶

Итак, геометрия, индуцированная на псевдосфере S_1^2 геометрией псевдоевклидового пространства R_1^3, совпадает с геометрией, возникающей в круге радиуса ρ на евклидовой плоскости R, если в качестве точек этой геометрии взять обычные точки этого круга, а в качестве прямых этой геометрии взять дуги окружностей, пересекающих границу круга под прямым углом.

Геометрия, индуцированная на псевдосфере геометрией R_1^3, называется геометрией Лобачевского, а её модель в круге радиуса ρ на евклидовой плоскости называется моделью Пуанкаре геометрии Лобачевского. Сам Лобачевский получил свою геометрию без псевдоевклидовых пространств. Если $\rho \to \infty$, то геометрия Лобачевского превращается в обычную геометрию Евклида.

Можно рассматривать ещё одну геометрию на сфере, в которой “точками ” являются обычные точки сферы ρ^2: $(|x| = 1 \hat{a} R^2)$, а “прямыми” являются всевозможные экваторы сферы R^2 (пересечение со всевозможными плоскостями, проходящими через центр сферы). Если в качестве точек взять пары $(x, -x)$, где x пробегает всю ρ^2, то в этой геометрии будут выполнены все постулаты Евклида, кроме аксиом порядка и пятого постулата.

Подведем некоторые итоги.

Пусть задано пространство (область) с декартовыми координатами $(x^1,\ldots, x^n)$ и заданы новые координаты $(z^1, \ldots, z^n)$, $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^n)$, $x = x(z)$, причём новая система координат не имеет особых точек. $\mathrm{I} \neq 0 = \left|\dfrac{\partial x}{\partial z}\right|$ – якобиан. Если длина кривой $x^i = x^i(t)$ измерялась по формуле $\ell = \int\limits_a^b \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n \left(\dfrac{dx^i}{dt}\right)^2}\, dt$, то мы имеем дело с евклидовыми координатами. В новых координатах (z) имеем $z^i = z^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$. Длина той же самой кривой в новых координатах $\ell = \int_a^b \sqrt{g_{ij}\frac{dz^i}{dt}\frac{dz^j}{dt}}dt$, где $x^i = x^i(z^1(t),\ldots, z^n(t))$ и $\sqrt{g_{ij}\frac{dz^i}{dt}\frac{dz^j}{dt}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n\left(\frac{dx^i}{dt}\right)}$; $\frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{dz^j}\frac{dz^j}{dt}$. Поэтому $g_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial z^i}\frac{\partial x^k}{\partial z^j} = \sum_{k,q=1}^n \delta_{kq}\frac{\partial x^k}{\partial z^i}\frac{\partial x^q}{\partial z^j}$, где $\delta_{ij} = \begin{cases}1, i=j\\0, i\neq j\end{cases}$.

Заметим, что $\frac{dz}{dt} = \left(\frac{dz^1}{dt},\ldots,\frac{dz^n}{dt}\right)$ – вектор скорости кривой в новых координатах. $\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx^1}{dt},\ldots,\frac{dx^n}{dt}\right)$ – тот же самый вектор в старых координатах: $\frac{dx}{dt} = \eta$, $\frac{dz}{dt} = \varepsilon$. Если имеются две кривые $z^i = f^i(t)$ и $z^i = g^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, пересекающиеся в одной точке $t = t_0$, φ – угол между их векторами скорости, то $\cos\varphi = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{|\varepsilon_1||\varepsilon_2|}$, где $\varepsilon_1 = \left(\frac{df^i}{dt}\right)_{t=t_0}$, $\varepsilon_2 = \left(\frac{dg^i}{dt}\right)_{t=t_0}$. В координатах ($z$) для скалярного произведения имеем формулу: $\varepsilon_1\varepsilon_2 = g_{ij}\varepsilon_1^i\varepsilon_2^j$, $i = 1, \ldots, n$. Риманова метрика в области пространства с регулярными координатами $z^1,\ldots, z^n$ задаётся набором функций $g_{ij}(z) = g_{ji}(z)$, причём, если задана кривая $z^i = z^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, то квадратом длины её вектора скорости $v_z = \left(\frac{dz^i}{dt}\right)_{t=t_0}$ в точке $t = t_0$ называется число $\ell^2 = g_{ij}\frac{\partial z^i}{dt}\frac{\partial z^j}{dt}$.

Набор функций $g_{ij}(z) = g_{ji}(z)$ адаёт <u>риманову метрику</u> (в координатах ($z^1, \ldots, z^n$)), если при любых $z^1, \ldots, z^n$ форма $g_{ij}\eta^i\eta^j$ положительна. Если $\det(g_{ij}) \neq 0$, но указанная форма знакопеременная, то говорят, что набор задаёт псевдориманову метрику. Если заданы новые координаты $y^1,\ldots,y^n$, такие что $z^i = z^i(y^1, \ldots, y^n)$, $\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| \neq 0$, то в новых координатах $y^1, \ldots, y^n$ риманова метрика определяется набором функций $g'_{ij}(y^1, \ldots, y^n)$, $g'_{ij} = g'_{ji}$, где $g'_{ij} = \frac{\partial z^k}{\partial y^i} g_{kl}\frac{\partial z^l}{\partial y^j} = g'_{ij}(y',\ldots,y^n)$. На матричном языке $g' = A \circ g \circ A^T$, где $A = \left(\frac{\partial z^i}{\partial y^k}\right)$, $g' = (g'_{ij})$, $g = (g_{ij})$.

Метрика евклидова, если найдутся новые координаты $x^1, \ldots, x^n$, $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^n)$, $\left|\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right| \neq 0$, такие, что $g_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial z^i}\frac{\partial x^k}{\partial z^j} = \sum_{k,q=1}^n \delta_{kq}\frac{\partial x^k}{\partial z^i}\frac{\partial x^q}{\partial z^j}$. В координатах $x^1, \ldots, x^n$ имеем $g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases}1, i=j\\0, i\neq j\end{cases}$, и координаты $x^1, \ldots, x^n$ называются евклидовыми.

Линейное вещественное пространство размерности n называется псевдоевклидовым пространством индекса s, если в этом пространстве задана билинейная форма $(\varepsilon,\eta)_s = -\varepsilon^1\eta^1 - \ldots - \varepsilon^s\eta^s + \varepsilon^{s+1}\eta^{s+1} + \ldots + \varepsilon^n\eta^n$. Если s = 0, то получаем евклидово пространство. Псевдоевклидово пространство индекса s обозначается S_s^n. Пространство R_1^4 является пространством специальных теорий относительности и называется пространством Минковского. Длина вектора ε в псевдоевклидовом пространстве R_s^n определяется следующей формулой: $|\varepsilon|_s = \sqrt{(\varepsilon\varepsilon)_s}$.

Тема 11 Движение псевдоевклидового пространства

Изучим несколько подробнее псевдоевклидово пространство. Рассмотрим движение псевдоевклидовой плоскости R_1^2. Предположим, что это движение оставляет неподвижным начало координат. И пусть в n-мерном пространстве заданы две области: $\sum_x$ с координатами (x^1, …, x^n) = (x) и $\sum_z$ с координатами (z^1, …, z^n) = (z). И пусть каждой точке области $\sum_z$ поставлена в соответствие точка области $\sum_x$, так, что $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^n)$. Если координаты $z^1, \ldots, z^n$ можно выразить через $x^1, \ldots, x^n$, то есть $z^j = z^j(x^1,\ldots,x^n)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, то будем говорить, что задано преобразование области $\sum_z$ в области $\sum_x$. При этом требуется, чтобы функции $z^i(x)$ и обратные им функции $z^j(x)$ были гладкими. Пусть теперь в области $\sum$ имеется риманова или псевдориманова метрика, которая задаётся в координатах $x^1, \ldots, x^n$ симметричной невырожденной матрицей $g_{ij} = g_{ji}(x)$. Если задано преобразование $x^i = x^i(z)$, то в координатах (z) эта же метрика задаётся матрицей $g_{ij} = g_{ji}(z)$, где $g'_{ij} = \dfrac{\partial x^k}{\partial z^i} g_{kl} \dfrac{\partial x^l}{\partial z^j}$.

Определение. Преобразование $x^i = x^i(z)$ называется движением данной метрики, если $g'_{ij}(z) = g_{ij}(x(z))$.

Так как мы изучаем движение псевдоевклидовой плоскости, то рассматриваемое движение задаётся матрицей

$$A:\begin{cases} x^0 = ay^0 + by^1 \\ x^1 = cy^0 + dy^1 \end{cases}, \tag{1}$$

где (x^0, x^1) – псевдоевклидовы координаты, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Метрика в этих координатах имеет вид: $g_{ij} = \left(g_{00} = 1, g_{11} = -1, g_{10} = g_{01} = 0\right)$. Так как преобразование (1) является движением, то

$$G = (g_{ij}) = A^T G A \,. \tag{2}$$

Учитывая, что $\det A^T = \det A$ и определитель произведения равен произведению определителей, получаем: $(\det A)^2 = 1$, det A = ±1. Таким образом, из равенства (2) имеем:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & -c\\ b & -d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^2 - c^2 & ab - cd\\ ab - cd & b^2 - d^2\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - c^2 = 1 \\ b^2 - d^2 = -1 \\ ab - cd = 0 \end{cases}$$. Полагаем, что $a \neq 0$.

Пусть $\beta = \dfrac{c}{a}$, $b = \dfrac{c}{a} d$, $\dfrac{c^2 d^2}{a^2} - d^2 = -1$, $\beta^2 d^2 - d^2 = -1$, $d = \pm\sqrt{\dfrac{1}{1-\beta^2}}$, $b = \pm\beta\sqrt{\dfrac{1}{1-\beta^2}}$. Рассмотрим $a^2 - c^2 = 1$, $c^2 = a^2 - 1$, $\dfrac{a^2}{a^2} - \dfrac{c^2}{a^2} = \dfrac{1}{a^2}$, $1 - \beta^2 = \dfrac{1}{a^2}$, $a^2 = \dfrac{1}{1-\beta^2}$, $a = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $a^2 - c^2 = 1$, $c^2 = a^2 - 1$, $c^2 = \dfrac{1}{1-\beta^2} - 1 = \dfrac{1 - 1 + \beta^2}{1-\beta^2}$, $c = \pm\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Здесь знак a совпадает со знаком c, а знак b – со знаком d.

$A = \pm\begin{pmatrix}\sqrt{\dfrac{1}{1-\beta^2}} & \pm\sqrt{\dfrac{\beta}{1-\beta^2}}\\ \sqrt{\dfrac{\beta}{1-\beta^2}} & \pm\sqrt{\dfrac{1}{1-\beta^2}}\end{pmatrix}$. Если обозначим $\beta = tg\varphi$, тогда $ch\varphi = \sqrt{\dfrac{1}{1-\beta^2}}$, $sh\varphi = \sqrt{\dfrac{\beta}{1-\beta^2}}$. Итак,

$$A = \pm\begin{pmatrix}ch\varphi & \pm sh\varphi\\ sh\varphi & \pm ch\varphi\end{pmatrix}. \tag{3}$$

Множество преобразований (1) псевдоевклидовой плоскости с матрицей A вида (3) образует группу, которая называется <u>группой гиперболических</u> <u>поворотов</u> или <u>псевдоортогональной группой</u> и обозначается O(1, 1):

$$A_0 = \begin{pmatrix}+ & +\\ + & +\end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix}- & +\\ - & +\end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix}+ & -\\ + & -\end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix}- & -\\ - & -\end{pmatrix}.$$

<u>Определение.</u> Преобразования R_1^2 с матрицами A_0, A_3 называются <u>собственными движениями</u> псевдоевклидовой плоскости, а с матрицами A_1, A_2 называются <u>ортохронными преобразованиями.</u>

Рассмотрим преобразование (1) в случае, когда A = A_0, тогда

$x^0 = \dfrac{y^0 + \beta y^1}{\sqrt{1-\beta^2}}$; $x^1 = \dfrac{\beta y^0 + \beta y^1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Так как $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $y^0 = ct'$, $y^1 = y$, то

$ct = \dfrac{ct' + \beta y}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow t = \dfrac{t + \dfrac{\beta}{c} y}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $x = \dfrac{\beta ct' + y}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Найдём выражения y и t' через x и t:

$t' = t\sqrt{1-\beta^2} - \dfrac{\beta}{c} y$; $x\sqrt{1-\beta^2} - \beta ct' = y \Rightarrow t' = t\sqrt{1-\beta^2} - \dfrac{\beta}{c}\left(x\sqrt{1-\beta^2} - \beta ct'\right)$,

$t'\left(1 - \dfrac{\beta}{c}\beta c\right) = \left(t - \dfrac{\beta}{c} x\right)\sqrt{1-\beta^2}$, $t' = \dfrac{t - \dfrac{\beta}{c} x}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Аналогично можно получить, что $y = -\dfrac{\beta ct + x}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Выясним физический смысл параметра β. Пусть в системе координат Y находится в состоянии покоя заданная точка M – начало координат. В этом случае $y = 0$. А это значит, что $x - \beta ct = 0, \beta c = \dfrac{x}{t}$. Но $\dfrac{x}{t} = v$ есть скорость точки M в системе координат X, равная скорости в системе координат Y относительно X. Значит $\beta = \dfrac{v}{c}$.

Итак, $t = \dfrac{t' + \dfrac{v}{c^2} y}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$; $x = \dfrac{v\ t' + y}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$; $t' = \dfrac{t - \dfrac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$; $y = \dfrac{-v\ t + x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$ – преобразования Лоренца.

Приведем некоторые интересные выводы.

1 Замедление времени.

Пусть в системе координат X на неподвижных часах происходит время $\Delta t = t_2 - t_1$. Найдём значения t_1' и t_2', соответствующие соответственно t_1 и t_2, в одной и той же точке с абсциссой y в системе координат Y. Из формул преобразования Лоренца имеем, что $t_1 = \dfrac{t_1' + \dfrac{v}{c^2} y}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$; $t_2 = \dfrac{t_2' + \dfrac{v}{c^2} y}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$;

$\Delta t = t_2 - t_1 = \dfrac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$. Отсюда следует, что $\Delta t' < \Delta t$. Таким образом, движущиеся часы идут медленнее неподвижных часов.

2 Сокращение длин.

Пусть в системе координат X находится стержень, длина которого ℓ, где x_1 – координаты начала стержня, x_2 – координаты конца стержня, то есть $\ell = x_2 - x_1$. Если координаты концов этого стержня в системе координат Y измерены в один и тот же момент времени t', равный, y_1 и y_2, то, используя формулы преобразования Лоренца, имеем, что $x_1 = \dfrac{v\ t' + y_1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$;

$$x_2 = \frac{v\ t' + y_2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}};$$

$\ell = x_2 - x_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{\ell'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$. Таким образом, длина ℓ' стержня в той системе отсчёта, относительно которой этот стержень движется, меньше, чем его длина ℓ в той системе отсчёта, относительно которой он находится в состоянии покоя.

Тема 12 Кривые в псевдоевклидовом пространстве

Параметризованной кривой в евклидовом пространстве R^3 называется отображение $r : I \to R^3$, где $t \to (x(t), y(t), z(t))$.

Пусть задано трёхмерное псевдоевклидово пространство R_1^3. Векторы ортонормированного репера $\{0; \overrightarrow{a_0}; \overrightarrow{a_1}; \overrightarrow{a_2}\}$ удовлетворяют условию: $\overrightarrow{a_0}\overrightarrow{a_0} = -1$, $\overrightarrow{a_i}\overrightarrow{a_j} = 0$, $i, j = 0, 1, 2$, $\overrightarrow{a_i}\overrightarrow{a_i} = 1$, $i = 1, 2$.

Координаты любой точки в этом репере будем обозначать так:
$a = (x^0, x^1, x^2)$, $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, так как $\overrightarrow{R_1^3}$ – подпространство Минковского. В векторном пространстве $\overrightarrow{R_1^3}$, связанным с точечным пространством R_1^3, существуют времениподобные, пространственноподобные и изотропные векторы. В зависимости от того, каким будет в каждой точке кривой вектор касательной, кривые в пространстве R_1^3 также будем называть времениподобными, пространственноподобными и изотропными.

<u>Определение.</u> Отображение $r : I \to R_1^3 : t \to (x^0(t), x^1(t), x^2(t))$ будем называть <u>параметризованной кривой в псевдоевклидовом пространстве</u> R_1^3 и обозначать $\vec{r}(t) = (x^0(t), x^1(t), x^2(t))$.

<u>Определение.</u> Параметризованная кривая называется <u>времениподобной</u>

n-параметризованной кривой, если $\vec{r}'(t)\vec{r}(t) = -1$. Будем обозначать через σ натуральный параметр, а n-параметризованную кривую будем записывать в виде: $\vec{r}\,(\sigma) = (x^0(\sigma), x^1(\sigma), x^2(\sigma))$.

Найдём производную: $\frac{d\vec{r}}{d\sigma} = \vec{r}'(\sigma) = \vec{\tau}(\sigma)$, где $\vec{\tau}(\sigma)\vec{\tau}(\sigma) = -1$. Из этого равенства получаем, что $(d\vec{r})^2 = -(d\sigma)^2$. С другой стороны $(d\vec{r})^2 = -(dx^0)^2 +$ $+ (dx^1)^2 + (dx^2)^2$. Итак, $(d\sigma)^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2$. Так как $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, то $(d\sigma)^2 = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2$. Следовательно, $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = c^2 - \left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)$, где $V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$. Тогда

$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = c^2 - v^2 \Rightarrow \boxed{\sigma = c\int_a^b \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,dt}$ – длина дуги времениподобной кривой, $\frac{\sigma}{c}$ в теории специальной относительности называется <u>собственным временем частицы.</u>

<u>Определение.</u> Времениподобная кривая $\vec{r}(\sigma)$ называется регулярной, если $\vec{r}'(\sigma) \neq 0$ и бирегулярной, если $\vec{r}'(\sigma) \neq \lambda\vec{r}'''(\sigma)$.

<u>Определение.</u> Вектором кривизны времениподобной n-параметризованной кривой в точке σ называется вектор $\vec{k}(\sigma) = \vec{r}''(\sigma)$, а кривизной – величина $\vec{k}(\sigma) = \left|\vec{r}''(\sigma)\right|$.

К каждой точке времениподобной кривой прикрепим правый ортонормированный репер: $\vec{\tau}(\sigma) = \vec{r}'(\sigma)$, $\vec{v}(\sigma) = \frac{\vec{r}''(\sigma)}{\left|\vec{r}''(\sigma)\right|} = \frac{\vec{k}(\sigma)}{k(\sigma)}$. Третий вектор $\vec{\beta}(\sigma)$ должен быть ортогонален векторам $\vec{\tau}$ и $\vec{v}$, $\left|\vec{\beta}\right| = 1$. Чтобы его определить, введём в пространстве R_1^3 векторное произведение двух векторов так, чтобы для векторов ортонормированного базиса выполнялись следующие условия: $[\vec{a}_0, \vec{a}_1] = \vec{a}_2; [\vec{a}_1, \vec{a}_2] = -\vec{a}_0; [\vec{a}_2, \vec{a}_0] = \vec{a}_1$ (рис. 31).

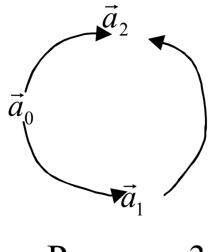


Рисунок 31

Для векторов $\vec{\tau}, \vec{v}, \vec{\beta}$ должны выполняться соотношения (рис. 32):

$\vec{\beta}=\left[\vec{\tau},\vec{\nu}\right],\ -\vec{\tau}=\left[\vec{\nu},\vec{\beta}\right],\ \vec{\nu}=\left[\vec{\beta},\vec{\tau}\right]$

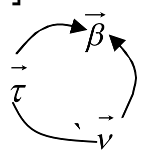


Рисунок 32

Репер $\left\{\vec{r}(\sigma);\vec{\tau}(\sigma);\vec{\nu}(\sigma);\vec{\beta}(\sigma)\right\}$ называется репером Френе кривой $r = r(\sigma)$ в точке σ, где $\vec{\tau}$ – вектор касательной, $\vec{\nu}$ – главная нормаль, $\vec{\beta}$ – бинормаль. Плоскость, содержащую вектора $\vec{\tau}$ и $\vec{\nu}$, будем называть соприкасающейся, плоскость, содержащую вектора $\vec{\nu}$ и $\vec{\beta}$, – нормальной, а вектора $\vec{\beta}$ и $\vec{\tau}$ – спрямляющейся:

$L\left(\vec{\tau},\vec{\nu}\right)$ – соприкасающаяся плоскость,

$L\left(\vec{\nu},\vec{\beta}\right)$ – нормальная плоскость,

$L\left(\vec{\beta},\vec{\tau}\right)$ – спрямляющаяся плоскость.

Выведем аналог формул Френе для времениподобной кривой. Так как $\vec{\tau}(\sigma)=\vec{r}\,'(\sigma)$, то $\vec{\tau}\,'(\sigma)=\vec{r}\,''(\sigma)=k\vec{\nu}$, $\vec{\tau}(\sigma)=k\vec{\nu}$. Так как репер Френе правый ортонормированный репер, то для него выполнимы равенства: $\vec{\tau}\vec{\tau}=-1$; $\vec{\nu}\vec{\nu}=1$; $\vec{\beta}\vec{\beta}=1$; $\vec{\tau}\vec{\nu}=\vec{\nu}\vec{\beta}=\vec{\tau}\vec{\beta}=0$. Нужно найти $\vec{\beta}'$. Вектор $\vec{\beta}'$ ортогонален векторам $\vec{\beta}$ и $\vec{\tau}$, то есть он коллинеарен вектору $\vec{\nu}$: так как $\vec{\beta}\vec{\beta}=1\Rightarrow 2\vec{\beta}\vec{\beta}=0$, то есть $\vec{\beta}\perp\overline{\beta'}=$; $\vec{\tau}\vec{\beta}=0\Rightarrow \underbrace{\vec{\tau}\,'}_{k\nu}\vec{\beta}+\vec{\tau}\vec{\beta}'=0$. Значит, что

$\vec{\tau}\,'=k\vec{\nu}\Rightarrow \underbrace{k\vec{\nu}\vec{\beta}}_{0}+\vec{\tau}\vec{\beta}'=0\Rightarrow\vec{\tau}\perp\vec{\beta}'$.

Таким образом, $\vec{\tau}\,'=k\vec{\nu}$; $\vec{\beta}'=-æ\vec{\nu}$. Так как $\vec{\nu}=\left[\vec{\beta},\vec{\tau}\right]$, то

$\vec{\nu}\,'=\left[\vec{\beta}',\vec{\tau}\right]+\left[\vec{\beta},\vec{\tau}\,'\right]=-æ\left[\vec{\nu},\vec{\tau}\right]+k\left[\vec{\beta},\vec{\nu}\right]=k\vec{\tau}+æ\vec{\beta}$.

Итак,

$\vec{\tau}\,'=k\vec{\nu}$

$\vec{\nu}\,'=k\vec{\tau}+æ\vec{\beta}$ – формулы Френе времениподобной n-параметризованной

$\vec{\beta}'=-æ\vec{\nu}$ кривой.

В этих формулах функции $k(\sigma)$ и $æ(\sigma)$ назовём кривизной и кручением. Найдём формулы для их вычисления: $\vec{r}\,'=\vec{\tau}$; $\vec{r}\,''=\overline{k\nu}$; $\vec{r}\,'''=k^2\vec{\tau}+k\,æ\vec{\beta}$. Найдём векторное произведение: $\left[\vec{r}\,',\vec{r}\,''\right]=\left[\vec{\tau},k\vec{\nu}\right]=k\beta\Rightarrow k=\left|\left[\vec{r}\,',\vec{r}\,''\right]\right|$, то есть

$k(\sigma)=\left|\left[\vec{r}\,'(\sigma)\vec{r}\,''(\sigma)\right]\right|$.

Найдём теперь произведение

$\left[\vec{r}\,',\vec{r}\right]\vec{r}\,'''=\left[\vec{\tau},k\vec{\nu}\right]\left(k^2\vec{\tau}+k\,æ\vec{\beta}\right)=k^3\underbrace{\left[\vec{\tau},\vec{\nu}\right]\vec{\nu}}_{0}+k^2æ\underbrace{\left[\vec{\tau},\vec{\nu}\right]\vec{\beta}}_{1}=0+k^2æ\overline{\beta\beta}=k^2æ$.

Таким образом, $æ(\sigma)=\dfrac{\vec{r}'(\sigma)\vec{r}''(\sigma)\vec{r}'''(\sigma)}{|[\vec{r}'(\sigma),\vec{r}''(\sigma)]|^2}$.

Пусть кривая $\vec{r}(\sigma)$ имеет другую эквивалентную параметризацию, отличную от n-параметризации, то есть пусть $\vec{\rho}\,(t) = (x^0(t), x^1(t), x^2(t))$, где $t = t(\sigma)$ – функция перехода, то есть $\vec{r}(\sigma)=\vec{\rho}(t(\sigma))$. Тогда $\vec{r}'(\sigma)=\dfrac{d\vec{\rho}}{dt}\dfrac{dt}{d\sigma}=\vec{\rho}'t'$; $\vec{r}''(\sigma)=\vec{\rho}''(t')^2+\vec{\rho}'t''$; $\vec{r}'''(\sigma)=\vec{\rho}'''(t')^3+3\vec{\rho}''t't''+\vec{\rho}'t'''$.

Подставив полученные формулы в выражения для вычисления кривизны и кручения, получаем: $(\vec{r}'(\sigma))^2=(\vec{\rho}')^2(t')^2$. $(t')^2=\dfrac{1}{(\vec{\rho}')^2}$, то есть

$t'=\dfrac{1}{\sqrt{-(\vec{\rho}')^2}}$, т. к. $\vec{r}'(\sigma)\cdot\vec{r}'(\sigma)=-1$. Тогда

$$k(\sigma)=\left|\left[\vec{r}'(\sigma)\vec{r}''(\sigma)\right]\right|=\left|\left[\vec{\rho}'t',\vec{\rho}''(t')^2+\vec{\rho}'t''\right]\right|=(t')^3\left|\left[\vec{\rho}',\vec{\rho}''\right]\right|=\frac{\left|\left[\vec{\rho}',\vec{\rho}''\right]\right|}{\left(\sqrt{1-(\vec{\rho}')^2}\right)^3},$$

$$æ(\sigma)=\frac{\vec{r}'(\sigma)\vec{r}''(\sigma)\vec{r}'''(\sigma)}{\left|[\vec{r}',\vec{r}'']\right|^2}=\frac{[\vec{r}',\vec{r}'']\vec{r}'''}{\left|[\vec{r}',\vec{r}'']\right|^2}=\frac{(t')^3\left[\vec{\rho}',\vec{\rho}''\right]\left(\vec{\rho}'''(t')^3+3\vec{\rho}'''t't''+\vec{\rho}'t'''\right)}{\left((t')^3\left|\left[\vec{\rho}',\vec{\rho}''\right]\right|\right)^2}=$$

$$=\frac{(t')^6\vec{\rho}'\vec{\rho}''\vec{\rho}'''}{(t')^6\left|\left[\vec{\rho}',\vec{\rho}''\right]\right|^2}=\frac{\vec{\rho}'\vec{\rho}''\vec{\rho}'''}{\left[\vec{\rho}',\vec{\rho}''\right]^2}.$$

Итак,

кривизна: $k(t)=\dfrac{\left|\left[\vec{r}'(t),\vec{r}''(t)\right]\right|}{\left(\sqrt{1-\left(\vec{r}'(t)\right)^2}\right)^3}$,

кручение: $æ(t)=\dfrac{\vec{r}'(t)\vec{r}''(t)\vec{r}'''(t)}{\left[\vec{r}'(t),\vec{r}''(t)\right]}$.