Содержание

Введение

Изучая геометрические образы, человек всегда стремится привлечь для этих целей новые действенные методы, аппараты исследования, недоступные для старых методов задачи, а также выявить и изучить новые свойства геометрических объектов.

Так, например, аналитическая геометрия основана на сопоставлении: каждой точке пространства – три числа (координаты); каждой поверхности – уравнение, связывающее текущие координаты; каждой кривой – два таких уравнения. Благодаря этому геометрические факты могут быть переведены на язык алгебры, геометрические задачи – решены приемами алгебры, после чего результат при помощи обратного перехода вновь истолковывается на геометрическом языке. Основная идея здесь состоит в том, чтобы заставить сильный и действенный алгебраический аппарат продуктивно работать для геометрических целей.

Дифференциальная геометрия означает аналогичное использование в геометрических целях аппарата дифференциального исчисления. Тем самым создается новая область геометрических исследований, в которую позволяет проникнуть применение нового аппарата.

Чтобы уяснить себе, чем характеризуется эта область – область дифференциальной геометрии, нужно рассмотреть, где и как вообще находит применение аппарат бесконечно малых.

Приведем элементарный пример. Рассмотрим прямолинейное, но неравномерное движение точки по закону $s=s(t)$. Изучим это движение за бесконечно малый промежуток времени от t до $t+\Delta t$. Тогда пройденный за время Δt путь будет выражаться величиной $\Delta s=s'(t)\ \Delta t+\varepsilon\Delta t$, где $\varepsilon\to 0$ при $\Delta t\to 0$. Если пренебречь $\varepsilon\Delta t$, бесконечно малой высшего порядка по отношению к Δt, то зависимость от Δt окажется линейной с коэффициентом $s'(t)$, т.е. движение можно считать равномерным.

Эта идея лежит в основе всех приложений дифференциального исчисления: сложные зависимости становятся в бесконечно малом линейными, неравномерные процессы – равномерными и т.д., если пренебречь бесконечно малыми высших порядков. Этим самым мы получаем возможность изучать интересующие нас зависимости в чрезвычайно упрощенном виде, правда, лишь в бесконечно малом.

Дифференциальная геометрия является осуществлением этой же идеи в области геометрии. Здесь геометрические объекты – линии и поверхности, семейства линий и поверхностей, – могут быть изучены с точки зрения строения в бесконечно малых кусках. И это «микроскопическое исследование» помогает нам обнаружить ряд стройных закономерностей, не видимых простым глазом и обнаруживающихся лишь в бесконечно малом. Возникает новый мощный метод исследования геометрических объектов, т.к. выделив те или иные особенности кривой или поверхности в отдельных их замечательных точках, мы тем самым можем составить представление о форме кривой или поверхности в целом.

Итак, дифференциальная геометрия является обширной областью приложений анализа бесконечно малых (дифференциального и интегрального исчислений и теории дифференциальных уравнений) к исследованию геометрических объектов.

На первоначальных этапах своего развития дифференциальная геометрия почти неотделима от анализа бесконечно малых, хотя многие факты из теории плоских кривых были уже известны и до создания дифференциального исчисления. Х. Гюйгенс, старший современник Г. Лейбница, имевший на него большое влияние, в своей теории часов с маятником (1673) изучает специальные кривые – эволюты и эвольвенты, трактрису, логарифмическую кривую цепную линию, показывает, что идеальный маятник (период колебаний не зависит от амплитуды) описывает циклоиду. Известно, что задача проведения касательной к кривой (Г. Лейбниц) наравне с задачей определения скорости движения точки (И. Ньютон) привели к понятию производной. Естественно, что уже у Лейбница имеются исследования о соприкасании кривых, об огибающих. Яков и Иван Бернулли изучали цепную линию и лемнискату (1694), логарифмическую спираль (Яков). Тогда же было получено дифференциальное уравнение геодезической линии на поверхности (1697, Иван). В 1731 г. появилось исследование А. Клеро «О кривых двоякой кривизны». Здесь кривая рассматривалась как пересечение двух поверхностей, искались длина дуги, касательная, нормаль к одной из поверхностей.

Л. Эйлер (1707-1783) родился в Швейцарии в г. Базель. Отец Эйлера учился у Якова Бернулли, сам Эйлер – у Ивана Бернулли.

В 1727 г. Л. Эйлер выехал в Петербург в созданную Петром Первым Академию наук и пробыл там (с двадцатилетним перерывом) до смерти, поражая научной продуктивностью. Он сделал существенные вклады во все математические дисциплины того времени. К теории поверхностей относится общее исследование (1760) кривизны нормальных сечений поверхности в данной точке, определение главных направлений, главных радиусов кривизны. В 1782 г. Л. Эйлер рассматривает поверхность в параметрическом представлении. Он строит сферическую индикатрису касательных, вводит бинормаль, главную нормаль. Рассматривает развертывающиеся поверхности.

Новую эпоху в развитии дифференциальной геометрии открыл Г. Монж (1746-1818). Г. Монж родился в семье мелкого торговца во Франции. Окончил монастырскую школу и уже в 23 года получил положение профессора. В 1780 г. Г. Монж избирается членом Парижской академии наук. Революция 1789 г. захватила его. В течение восьми месяцев ученый занимает пост морского министра. Он отдается организации детища революции – Политехнической школы. Здесь лекции читались лучшими учеными. Г. Монж в своих лекциях «Приложения анализа» строит теорию пространственных кривых: вводит ось кривизны, показывает, что она описывает развертывающуюся поверхность, на которой лежат все эволюты кривой и множество ее центров кривизны. В изумительных мемуарах

1784 г. «О насыпях и выемках» он приходит к своей теореме о развертывающихся поверхностях, образованных нормалями вдоль линии кривизны. Его учениками были: Ж. Менье, который перестроил Эйлерово учение о кривизне плоских сечений поверхности; Ф. Дюпен, который с помощью индикатрисы ввел понятие сопряженных направлений и асимптотических линий; Ж. Понселе, который после русского плена привез из Саратова первые идеи проективной геометрии.

Третья эпоха дифференциальной геометрии связана с именем К. Гаусса (1777-1855). Сын поденщика в Брауншвейге (Германия), К. Гаусс своими исключительными способностями счета поразил мецената, и тот дал ему возможность закончить университет. К. Гаусс был всеобъемлющим гением. Он не любил преподавать и занимал пост директора обсерватории Геттингенского университета. К. Гаусс систематически вводил параметрическое представление поверхности, ее две квадратичные формы, рассматривал сферическое изображение поверхности, а также теорему о сумме углов геодезического треугольника. Чтобы две квадратичные формы могли служить основными формами поверхности, коэффициенты их должны удовлетворять трем уравнениям: одному – конечному и двум – дифференциальным. К. Гаусс нашел конечное уравнение, которое и привело его к знаменитой теореме о кривизне поверхности. В его бумагах были все элементы, чтобы получить два других, но он не понял их значения.

К. М. Петерсон (1828-1880) родился в Риге в бюргерской латышской семье. Учился в Дерптском университете. В то время кафедру геометрии возглавлял Ф. Г. Миндинг (1806-1885). Ф. Г. Миндинг составил себе имя работами по дифференциальной геометрии, среди которых следует назвать исследования по изгибанию поверхностей постоянной отрицательной кривизны (псевдосфере). К. М. Петерсон написал сочинение «Об изгибании кривых поверхностей». В нем он нашел уравнения для главных радиусов кривизны и для дифференцирования вдоль линии кривизны. Он отнес поверхность к произвольной системе координат линий и определил поверхность кроме линейного элемента и двух главных радиусов кривизны еще углом одного из главных направлений с координатной линией. В обоих случаях он получил кроме конечного уравнения два дифференциальных и доказал, что они достаточны для доказательства существования поверхности.

В 1865 г. К. М. Петерсон поступил преподавателем математики в среднюю школу Москвы. За год до смерти он получил в Одесском университете степень доктора математики без защиты диссертации. Им была написана статья «Об отношениях и сродствах между кривыми поверхностями» (1866), в которой рассматривались вопросы наложимости, о сопряженной сети линий, о преобразованиях, названных позже преобразованиями Петерсона.

К. М. Петерсон создал первую московскую школу дифференциальной геометрии. Например, Б. К. Млодзеевский (1858-1923) много времени посвятил разработке идей К. М. Петерсона. Д. Ф. Егоров (1869-1930) создал школу теории функций, но большинство его работ принадлежит дифференциальной геометрии.

На развитии дифференциальной геометрии не могло не сказаться великое открытие Н. И. Лобачевского (1793-1856), которое явилось поворотным пунктом в развитии геометрии вообще, а также и в развитии математики. Н. И. Лобачевский первым доказал, что разрабатывающаяся в течение двух тысячелетий евклидова геометрия является не единственной возможной моделью с достаточной степенью точности окружающее нас физическое пространство. Он полно развил другую геометрию, отличающуюся от евклидовой одной аксиомой (аксиомой о параллельных), из которой, в частности, вытекало, что сумма углов треугольника меньше двух прямых на величину, пропорциональную площади треугольника.

В то же самое время к этой мысли независимо от Н. И. Лобачевского приходили и другие математики (Гаусс, Бойаи), но никто из них не изложил своих идей с достаточной смелостью и полнотой, и первая публикация по неевклидовой геометрии принадлежит Лобачевскому(1829). Идеи Н. И. Лобачевского не были поняты вначале его современниками. Но уже через 10 лет после его смерти итальянский геометр Э. Бельтрами обратил внимание на то, что на поверхности отрицательной гауссовой кривизны, по крайней мере, локально осуществляются все факты геометрии Н. И. Лобачевского, если в качестве прямых рассматривать геодезические линии.

Следующий важный шаг в изучении геометрии сделал знаменитый немецкий математик Б. Риман (1826-1866). Он выделил из всех существовавших к тому времени фактов теории поверхности то, что обеспечивает строение внутренней геометрии: первую квадратичную форму и гауссову кривизну. Он показал, что неограниченное число геометрий может быть построено на основе задания квадратичных форм $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} dx^i dx^j$ и вычисленных при помощи коэффициентов a_{ij}, играющих роль гауссовой кривизны (n считается произвольной). Построенные таким образом геометрии получили название римановых геометрий, а соответствующие пространства называются римановыми. Стало ясно, что всякая поверхность постоянной гауссовой кривизны К несет на себе некоторую планиметрию, которая при К = 0 совпадает с евклидовой. Так возникли неевклидовы геометрии: эллиптическая (геометрия Римана, К = const > 0), гиперболическая (геометрия Лобачевского, К = const < 0). Сумма углов треугольника в геометрии Римана больше двух прямых. Идеи Б. Римана привлекли всеобщее внимание, когда в теории относительности Эйнштейна законы тяготения и прохождения света стали объясняться свойствами кривизны четырехмерного пространства, три первые координаты которого определяют точку физического пространства, а четвертая – время. Новая теория излагалась в особом алгоритме, который использовал абсолютное дифференцирование Г. Риччи (1884) и вырос в стройную систему тензорного анализа.

У нас неутомимым проповедником новых методов в геометрии является В. Ф. Каган. Он создал большую тензорную школу, которая объединяет в себе саратовскую школу В. В. Вагнера, казанскую школу А. П. Нордена, московскую П. К. Рашевского.

Одной из основных тенденций развития дифференциальной геометрии в 20 веке является переход от изучения геометрических объектов «в малом», в какой-то окрестности точки, к их изучению «в целом». Кривые поверхности, служащие основными объектами изучения классической дифференциальной геометрии, все больше вытесняются теперь n-мерными дифференцируемыми многообразиями с заданными на них различными геометрическими структурами. Выдающуюся роль в развитии современной дифференциальной геометрии сыграли Э. Картан, А. Д. Александров, А. В. Погорелов, Н. В. Ефимов, С. П. Новиков.

1 Векторная функция скалярного произведения

Тема 1 Векторная функция

Определение. Пусть даны переменные скаляры $t_1, t_2, .., t_n$, которые изменяются в некоторой области Т, и переменный вектор $\vec{r}$, принимающий значения из некоторой совокупности векторов $\vec{R}$ трёхмерного Евклидова пространства. Тогда переменный вектор $\vec{r}$ называется вектор-функцией от n аргументов $t_1, t_2, .., t_n$, если каждой совокупности скаляров $t_1, t_2, .., t_n$, из области Т соответствует по некоторому закону единственный вектор $\vec{r}$ из совокупности $\vec{R}$. Записываем $\vec{r} = \vec{r}\,(t_1, t_2, .., t_n)$.

Если $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы базиса в трёхмерном пространстве и $\vec{r} = (x, y, z)$, то $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. В этом случае задание векторной функции $\vec{r} = \vec{r}\,(t_1, t_2, .., t_n)$ равносильно заданию трёх скалярных функций:

$$\begin{gathered} x = x(t_1, t_2, .., t_n), \\ y = y(t_1, t_2, .., t_n), \\ z = z(t_1, t_2, .., t_n). \end{gathered}$$

Если все значения векторной функции одного или двух аргументов будем откладывать от одной и той же точки пространства и эту точку пространства мы примем за начало координат, то все значения их станут радиус-векторами $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$, $\vec{r} = \vec{r}\,(u, v)$.

Определение. Множество концов радиус-векторов, являющихся значениями вектор-функции одного или двух аргументов, называется годографом этой функции (рис. 1).

$\vec{r} = \vec{r}\,(t)$, $t = t_1$, $t = t_2$, .., $t = t_n$

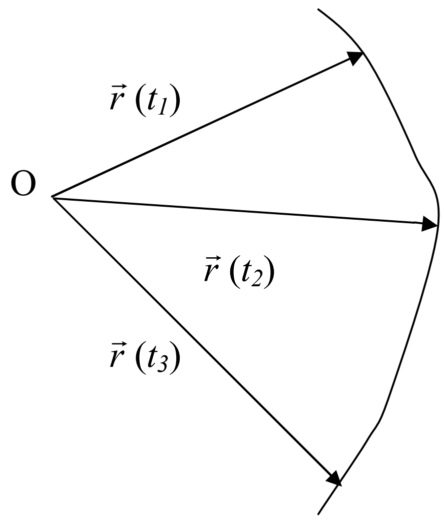

Рисунок 1 – Годограф

Напишем векторное уравнение прямой линии (рис. 2):

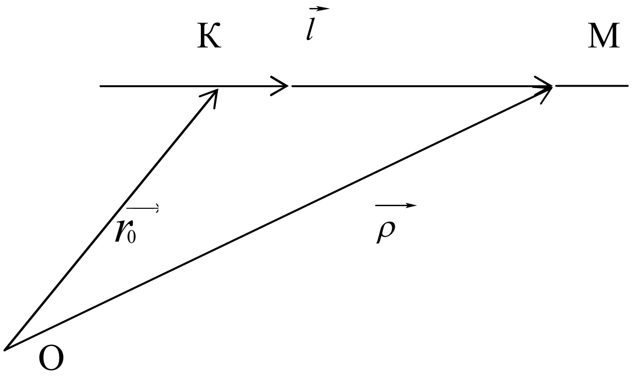

Рисунок 2

$\overrightarrow{OM} = \vec{\rho}$, $\overrightarrow{OK} = \vec{r_0}$, $\vec{\rho}$ – радиус-вектор произвольной точки прямой (в дальнейшем через $\vec{\rho}$ будем обозначать радиус-вектор произвольной точки искомого множества),

$\vec{\rho} = \vec{r_0} + \overrightarrow{KM}$,

$\vec{\rho} = \vec{r_0} + t\,\vec{l}$.

Напишем векторное уравнение плоскости (рис. 3):

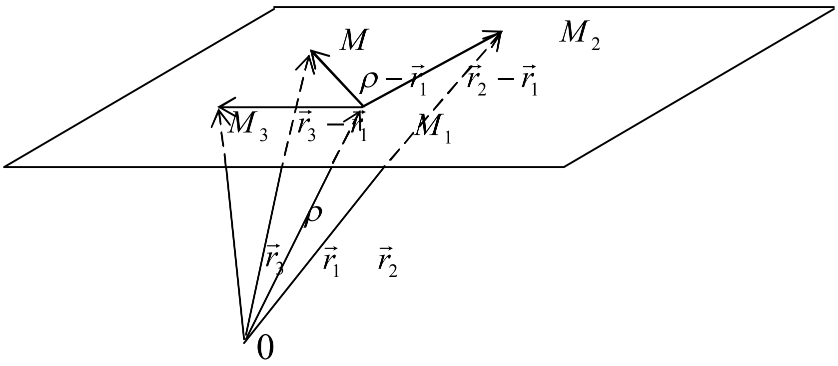

Рисунок 3

$(\vec{\rho} - \vec{r}_1)(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0$ – уравнение плоскости, проходящей через три данные точки и имеющие постоянные радиус-векторы $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3 : \vec{\rho} - r_1 = u(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + v(\vec{r}_{3_1} - \vec{r}_1) \Rightarrow \vec{\rho} = \vec{a} + u\vec{b} + v\vec{c}$.

<u>Определение.</u> Постоянный вектор $\overrightarrow{r_0}$ назовем <u>пределом</u> переменного вектора $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$ при $t \to t_0$, если $\lim\limits_{t \to t_0} \left| \vec{r}(t) - \overrightarrow{r_0} \right| = 0$.

<u>Теорема 1.</u> Если существует предел переменного вектора, то предел его модуля также существует и $\lim\limits_{t \to t_0} \left| \vec{r}(t) \right| = \left| \overrightarrow{r_0} \right|$.

◀Доказательство.

Нужно показать, что $\lim\limits_{t\to t_0}\left\|\vec r(t)\right| - \left|\vec{r_0}\right\| = 0$. Так как $\left\|\vec r(t)\right| - \left|\vec{r_0}\right\| \le \left|\vec r(t) - r_0\right|$, то из определения предела следует, что $\lim\limits_{t\to t_0}\left|\vec r(t) - \vec{r_0}\right| = 0$, следовательно, $\lim\limits_{t\to t_0}\left\|\vec r(t)\right| - \left|\vec{r_0}\right\| = 0$. ▶

В дальнейшем будем обозначать $\lim\limits_{t\to t_0}\vec r(t) = \vec{r_0}$, $\lim\limits_{t\to t_0}\vec b(t) = \vec{b_0}$, $\lim\limits_{t\to t_0} m(t) = m_0$.

<u>Теорема 2.</u> Предел суммы векторных функций существует и равен сумме пределов слагаемых векторных функций.

◀Доказательство.

$$\left|(\vec a(t) + \vec b(t)) - (\vec a_0 + \vec b_0)\right| = \left|(\vec a(t) - \vec a_0) + (\vec b(t) - \vec b_0)\right| \le \left|(\vec a(t) - \vec a_0)\right| + \left|(\vec b(t) - \vec b_0)\right|.$$

По определению предела каждое слагаемое в правой части $\to$ 0. Значит, $\left|(\vec a(t) + \vec b(t)) - (\vec a_0 + \vec b_0)\right| = \to 0$. Следовательно,

$\lim\limits_{t\to t_0}(\vec a(t) + \vec b(t)) = \vec a_0 + \vec b_0 = \lim\limits_{t\to t_0}(\vec a(t) + \lim\limits_{t\to t_0}\vec b(t)$. ▶

<u>Теорема 3.</u> Пределы произведения вида:

1) $m(t)\vec a(t)$,

2) $a(t)\vec b(t)$,

3) $\vec a(t)\vec b(t)$

существуют и равны произведениям соответствующих пределов.

◀Доказательство. 1) Так как $m\vec a - m_0\vec{a_0} = m(\vec a - \vec{a_0}) + (m - m_0)\vec{a_0}$, то $\left|m\vec a - m_0\vec{a_0}\right| \le \left|\ m\ \right|\left|(\vec a - \vec{a_0})\right| + \left|m - m_0\right|\left|\vec{a_0}\right|$, то

$\left|m\vec a - m_0\vec{a_0}\right| \le \underbrace{\underbrace{\left|\ m\ \right|}_{\downarrow m_0}\underbrace{\left|\vec a - \vec{a_0}\right|}_{\downarrow 0} + \underbrace{\left|m - m_0\right|}_{\downarrow 0}\underbrace{\left|\vec{a_0}\right|}_{\downarrow const}}_{\substack{\text{ïðè } t\to t_0 \\ \downarrow 0}}$. Значит $\lim\limits_{t\to t_0}\left|m\vec a - m_0\vec{a_0}\right| = 0$, то есть $\lim\limits_{t\to t_0} m\vec a$ существует и равен $m_0\vec{a_0}$.

2) $\vec a\vec b - \vec{a_0}\vec{b_0} = (\vec a - \vec{a_0})\vec{b_0} + \vec{a_0}(\vec b - \vec{b_0})$. $\left|\vec a\vec b - \vec{a_0}\vec{b_0}\right| \le \left|(\vec a - \vec{a_0})\vec b\right| + \left|\vec{a_0}(\vec b - \vec{b_0})\right|$.

Но $\vec p\vec q = \left|\vec p\right|\left|\vec q\right|\cos\varphi \le \left|\vec p\right|\left|\vec q\right| \Rightarrow \left|\vec a\vec b - \vec{a_0}\vec{b_0}\right| \le \underbrace{\underbrace{\left|\vec a - \vec{a_0}\right|}_{\downarrow 0}\underbrace{\left|\vec b\ \right|}_{\downarrow \vec{b_0}} + \underbrace{\left|\vec{a_0}\right|}_{\downarrow \vec{a_0}}\underbrace{\left|\vec b - \vec{b_0}\right|}_{\downarrow 0}}_{\text{ïðè } t\to t_0}$.

Таким образом, $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{a}(t)\vec{b}(t)=\overrightarrow{a_0}\overrightarrow{b_0}$.

3) Известно, что $\left|\left[\vec{p},\vec{q}\right]\right|=\left|\vec{p}\right|\left|\vec{q}\right|\sin\varphi\le\left|\vec{p}\right|\left|\vec{q}\right|$.

$$\left|\;\left[\vec{a},\vec{b}\right]-\left[\overrightarrow{a_0},\overrightarrow{b_0}\right]\;\right|=\left|\;\left[\vec{a}-\overrightarrow{a_0},\vec{b}\right]+\left[\overrightarrow{a_0},\vec{b}-b_0\right]\;\right|\le\left|\;\left[\vec{a}-\overrightarrow{a_0},\vec{b}\right]\;\right|+\left|\;\left[\overrightarrow{a_0},\vec{b}-b_0\right]\;\right|\le$$

$$\le\underbrace{\underbrace{\left|\vec{a}-\overrightarrow{a_0}\right|}_{\downarrow 0}\underbrace{\left|\vec{b}\right|}_{\downarrow\overrightarrow{b_0}}+\underbrace{\left|\overrightarrow{a_0}\right|}_{\downarrow\overrightarrow{a_0}}\underbrace{\left|\vec{b}-\overrightarrow{b_0}\right|}_{\downarrow 0}}_{\text{ïðè }t\to t_0}.$$

Таким образом, $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{a}(t)\vec{b}(t)=\overrightarrow{a_0}\overrightarrow{b_0}$. ►

Определение. Векторная функция $\vec{r}=\vec{r}\,(t)$ называется непрерывной при $t=t_0$, если $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)$.

Тема 2 Дифференцирование векторной функции

Определение. Векторная функция $\vec{r}=\vec{r}\,(t)$ называется дифференцируемой при $t=t_0$, если существует $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)}{t-t_0}=\vec{r}(t_0)$. Вектор $\vec{r}\,'(t_0)$ называется производной векторной функции в точке $t=t_0$.

Если производная векторной функции $\vec{r}=\vec{r}\,(t)$ существует при каждом значении $t\in[t_1,t_2]$, то $\vec{r}\,'(t_0)$ также является вектор-функцией от этого аргумента. И мы можем поставить вопрос о нахождении её производной. Это вторая производная: $\vec{r}\,''(t)=(\vec{r}\,'(t))'$. Производная *n*-ого порядка определяется по формуле: $\vec{r}^{\,(n)}(t)=(\vec{r}^{\,(n-1)}(t))'$.

Производные обозначаются:

$$\vec{r}\,'(t)=\frac{d\vec{r}}{dt};\;\;\vec{r}\,''(t)=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2};\;\ldots,\;\;\vec{r}^{\,n}(t)=\frac{d^n\vec{r}}{dt^n}.$$

Теорема 4.

1) $(\vec{a}+\vec{b}+\ldots)'=\vec{a}\,'+\vec{b}\,'+\ldots$;

2) $(m\vec{a})'=m'\vec{a}+m\vec{a}\,'$;

3) $(\vec{a}\vec{b})'=\vec{a}\,'\vec{b}+\vec{a}\vec{b}\,'$;

4) $\left[\vec{a},\vec{b}\right]'=\left[\vec{a}\,'\vec{b}\right]+\left[\vec{a}\vec{b}\,'\right]$.

◀Доказательство.

1) $$\frac{(\vec{a}+\vec{b}+...)-(\vec{a}_0+\vec{b}_0+...)}{t-t_0}=\frac{(\vec{a}-\vec{a}_0)}{t-t_0}+\frac{(\vec{b}-\vec{b}_0)}{t-t_0}+...$$

Переходя к пределу и используя определение производной, получаем утверждение 1 данной теоремы.

2) Пусть $m_0=m(t_0)$; $\vec{a}_0=\vec{a}(t_0)$. Тогда

$$\lim_{t\to t_0}\frac{m\vec{a}-m_0\vec{a}_0}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{m-m_0}{t-t_0}\lim_{t\to t_0}a_0+\lim_{t\to t_0}m\lim_{t\to t_0}\frac{\vec{a}-\vec{a}_0}{t-t_0}=m'(t_0)\vec{a}(t_0)+m(t_0)\vec{a}'(t_0).$$

Так как это выполнимо для любого t из указанного промежутка $[t_1,t_2]$, то утверждение 2 справедливо. ▶

Доказательства 3, 4 проводятся аналогично, используя следующие равенства:

$$\frac{\vec{a}\vec{b}-\vec{a}_0\vec{b}_0}{t-t_0}=\frac{\vec{a}-\vec{a}_0}{t-t_0}\vec{b}+\frac{\vec{b}-\vec{b}_0}{t-t_0}\vec{a}_0,$$

$$\frac{[\vec{a},\vec{b}]-[\vec{a}_0,\vec{b}_0]}{t-t_0}=\left[\frac{\vec{a}-\vec{a}_0}{t-t_0},\vec{b}\right]+\left[\frac{\vec{b}-\vec{b}_0}{t-t_0},\vec{a}_0\right].$$ ▶

<u>Теорема 5.</u> Пусть задана функция $\vec{r}=\vec{r}\,(t)$, $t=t(s)$, $t'_S=t'(s_0)$, $\vec{r}'_t=\vec{r}'(t_0)$, $t(s_0)=t_0$. Тогда $\vec{r}'_s(t(s))=\vec{r}'_t t'_s$.

◀Доказательство.

$$\frac{\vec{r}(t(S))-\vec{r}(t(S_0))}{S-S_0}=\frac{\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)}{t-t_0}\frac{t(S)-t(S_0)}{S-S_0},\ \text{где } t_0=t(S_0).$$

Переходя к пределу от левой и правой частей последнего равенства, мы получаем наше утверждение:

$$\lim_{S\to S_0}\frac{\vec{r}(t(S))-\vec{r}(t(S_0))}{S-S_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)}{t-t_0}\lim_{S\to S_0}\frac{t(S)-t(S_0)}{S-S_0}=\vec{r}'_t t'_s.$$ ▶

Формулы и правила для вычисления частных производных для вектор-функций формулируются и записываются точно так же, как и в математическом анализе для обыкновенных функций:

$$\vec{r}=\vec{r}\,(u,v),\ \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\vec{r}(u+\Delta u,v)-\vec{r}(u,v)}{\Delta u}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}=\vec{r}_u,\ \lim_{\Delta v\to 0}\frac{(u,v+\Delta v)-(u,v)}{\Delta v}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=\vec{r}_v.$$

Теорема 6. Необходимым и достаточным условием непрерывности (дифференцируемости) вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$ является непрерывность (дифференцируемость) её координат $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

◀Доказательство.

Достаточность.

Пусть x, y, z непрерывны (дифференцируемы). В силу выше доказанных теорем вектор-функция $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ непрерывна (дифференцируема).

Необходимость.

Пусть $\vec{r}\,(t)$ непрерывная (дифференцируемая) функция и $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Умножим обе части поочередно на $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Тогда $x = \vec{r}\vec{i}$, $y = \vec{r}\vec{j}$, $z = \vec{r}\vec{k}$. Так как $\vec{r}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ непрерывны (дифференцируемы), то x, y, z непрерывны (дифференцируемы). ▶

Теорема 7. Если при данном значении аргумента t, производная $\vec{r}\,'(t)$ функции $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$ существует и не равна нулю, то она параллельна касательной к годографу этой функции в данной точке (рис. 4).

◀Доказательство.

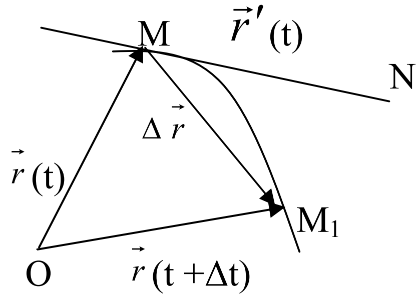

Рисунок 4

Вектор $\dfrac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ направлен по хорде $\overrightarrow{MM_1}$. Так как векторная функция непрерывна, то $\lim\limits_{\Delta t \to 0}\left(\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)\right) = 0$, т. е. длина хорды $\overrightarrow{MM_1}$ стремится к 0 при $\Delta t \to 0$. Следовательно, когда приращение аргумента $\to$ 0, точка M_1 годографа стремится к исходной точке M. Таким образом, непрерывность векторной функции можно истолковать как непрерывность её годографа.

При $\Delta t \to 0$ $\dfrac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \to \vec{r}\,'(t)$, а точка M_1 стремится по годографу к точке M. Следовательно, секущая MM_1 вращается в пространстве вокруг точки M, стремясь к своему предельному положению прямой MN, направленной по вектору $\vec{r}\,'(t)$. Предельное положение MN секущей MM_1 будем называть касательной к линии в данной точке. ▶

Определение. Произведение $\vec{r}\,'(t)d(t)$ называется главной линейной частью приращения $\Delta\vec{r}\,(t)$ вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$ или дифференциалом векторной функции и обозначается $d\overleftarrow{r} = \vec{r}\,'(t)dt$.

Теорема 8. Если вектор $\left|\vec{r}(t)\right|$ – const, то $\vec{r}\,'(t) \perp \vec{r}(t)$.

◀Доказательство.

Возьмём скалярное произведение $\vec{r}\vec{r} = \left|\vec{r}\right|^2$ – const. Тогда
$2\vec{r}\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{r}\vec{r}\,' = 0 \Rightarrow \vec{r} \perp \vec{r}\,'$. ▶

Теорема 9. Предел отношения модуля приращения $\Delta\vec{m}$ единичного вектора $\vec{m} = \vec{m}\,(t)$ к её углу поворота φ при $\Delta t \to 0$ равен единице (рис. 5).

◀Доказательство.

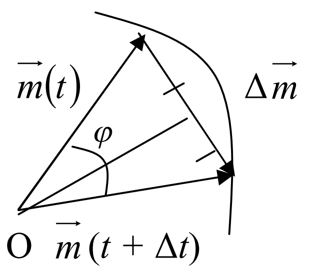

Рисунок 5

Из рисунка 5 видно, что $|\Delta\vec{m}| = 2\sin\varphi/2$. Тогда

$$\left|\frac{\overline{\Delta m}}{\varphi}\right| = \left|\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}}\right|.$$ Так как $\Delta t \to 0$, то $\varphi \to 0$ и $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}}\right| = 1 \Rightarrow \lim\limits_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\overline{\Delta m}}{\varphi}\right| = 1$. ▶

Определение. Неопределённым интегралом от векторной функции $\vec{u}(t)$ называется векторная функция $\vec{v}(t) = \int \vec{u}(t)dt$, если $\dfrac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{u}(t)$.

Эта функция определяется с точностью до постоянного слагаемого (вектора).

Определение. Определенным интегралом будем называть следующий постоянный вектор $\int\limits_a^b \vec{u}(t)dt = \vec{v}(b) - \vec{v}(a)$.

Тема 3 Параметрические уравнения кривой

Определение. Топологическим или непрерывным соответствием двух точечных множеств называется такое взаимнооднозначное соответствие между их точками, при котором всяким двум бесконечно сближающимся точкам одного множества соответствует бесконечно сближающиеся точки другого множества (рис. 6).

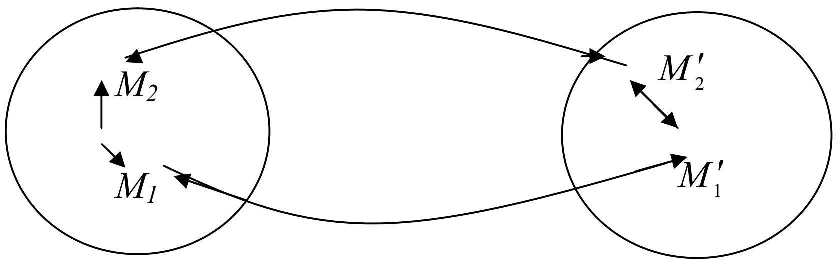

Рисунок 6

Если между точками множества можно установить указанное соответствие, то эти множества топологически эквивалентны между собой.

Определение. Простой дугой называется такое множество точек, которое топологически эквивалентно отрезку прямой. Точки, соответствующие конечным точкам отрезка, называются конечными точками дуги. Две дуги называются примыкающими, если одна пара концов этих дуг и обе пары этих концов совпадают между собой. Кривой линией называется такое множество точек, которое состоит из конечного или счётного множества простых дуг, примыкающих друг к другу.

Пусть простая дуга AB отображена топологически на прямолинейный отрезок $A_0B_0 : M \rightarrow M_0$ (рис. 7).

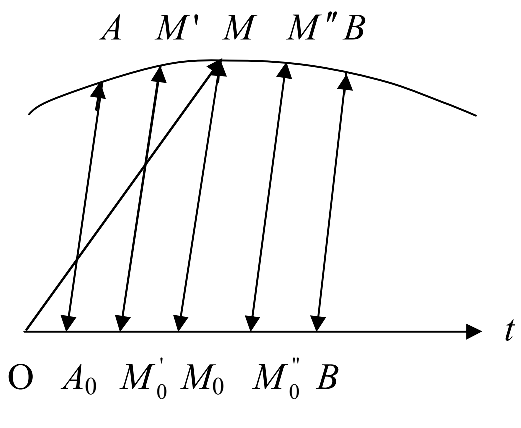

Рисунок 7

$\vec{r}\,'(t) = (x, y, z)$; $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$

$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \vec{r}(t)$

Всякая точка прямой A_0B_0 определяется при помощи её абсциссы, то есть выберем начало координат О, некоторое положительное направление и будем измерять отрезки некоторым масштабным отрезком. Всякой точке прямой мы отнесём, таким образом, её абсциссу. Если известен закон, по которому точки дуги отображаются в точки отрезка, то задание абсциссы t определит также и положение точки M на этой дуге. Этим способом мы отнесём всякой точке M дуги AB некоторое число $t \in [t_1, t_2]$, где t_1 абсцисса точки A_0, а t_2 – абсцисса точки B_0. Соответствие между точками дуги и числами будет взаимно-однозначным и непрерывным. Бесконечно близким абсциссам t', и t'' соответствуют бесконечно близкие точки M_0' и M_0'' отрезка A_0B_0. А им в свою очередь соответствуют бесконечно близкие точки M' и M'' данной дуги.

Если указанное соответствие между числами и точками дуги осуществлено, то говорят, что дуга параметризована, а значение числа t называют параметром соответствующей точки. Если теперь в пространстве задано начало координат О, то всякая точка M дуги определяется радиус-вектором $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. Если дуга параметризована, то положение этой же точки определяется заданием значения параметра t. При этом всякому значению параметра будет соответствовать вполне определённое значение радиус-вектора $\vec{r}$. Другими словами, радиус-вектор точки дуги является функцией параметра, определяющего эту точку, т. е. $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Соотношение, которое определяет зависимость радиус-вектора точки параметризованной дуги от её параметра, называется параметрическим уравнением этой дуги. Подобным образом параметризуется и кривая, составленная из ряда простых дуг, и устанавливается её параметрическое уравнение. Итак, параметрическое уравнение кривой выражает такую зависимость радиус-вектора от её точки, от параметра, для которой кривая является годографом.