Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
"Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины"

В. В. АНИСЬКОВ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. КУРС ЛЕКЦИЙ В 3 ЧАСТЯХ. ЧАСТЬ 3. АФФИННАЯ ГЕОМЕТРИЯ

КУРС ЛЕКЦИЙ

Гомель, 2007

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
“Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины”

В. В. АНИСЬКОВ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. КУРС ЛЕКЦИЙ В 3 ЧАСТЯХ. ЧАСТЬ 3. АФФИННАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Курс лекций
для студентов 1 курса
специальности 1-31 03 01-02 — “Математика
(научно-педагогическая деятельность)”

Гомель, 2007

УДК 514.12(075.8)
ББК 22.151.54 я 72
А 674

Рецензент:

кафедра алгебры и геометрии учреждения образования “Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины”

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования “Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины”

Аниськов В.В.

А 674 Аналитическая геометрия. Курс лекций в 3 частях. Часть 3. Аффинная геометрия: курс лекций для студентов 1 курса специальности 1 -31 03 01-02 — “Математика (научно-педагогическая деятельность)”. / В. В. Аниськов; М-во образования РБ, Гомельский гос. ун-т им. Ф.Скорины. — Гомель: ГГУ им. Ф.Скорины, 2008. — **??** с.

Курс лекций предназначен для студентов 1 курса специальности 1 -31 03 01-02 — “Математика (научно-педагогическая деятельность)”, изучающим дисциплину “Аналитическая геометрия”. Может быть использован для самостоятельного изучения.

УДК 514.12(075.8)
ББК 22.151.54 я 73

ISBN

Содержание

1. АФФИННАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1.1. Аффинные преобразования

1. Определение движений и аффинных преобразований
2. Аналитическое выражение аффинных преобразований

1.1.1. Определение движений и аффинных преобразований

Определение 1.1. *Репером на плоскости (в пространстве)* называется упорядоченная пара (тройка) представителей линейно независимых векторов и некоторая точка O, являющаяся общим началом представителей этих векторов. Если векторы ортогональны, то репер называется *прямоугольным.* Если векторы единичные, то репер называется *нормированным.* Репер, который одновременно ортогональный и нормированный, называется *ортонормированным.* Употребляется обозначение $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ $(O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3)$

Определение 1.2. Репер $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ на плоскости называется *правым*, если кратчайший поворот, переводящий вектор $\vec{e}_1$ в вектор $\vec{e}_2$ виден в направлении против часовой стрелки и *левым* в противном случае.

Определение 1.3. Репер $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ в пространстве называется *правым*, если векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ образуют правую тройку и *левым* в противном случае.

Определение 1.4. *Координатами вектора* $\vec{u}$ в некотором репере называются коэффициенты разложения вектора $\vec{u}$ по векторам этого репера. *Координатами точки* M в некотором репере называются координаты ее радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ в этом репере.

Определение 1.5. *Отображением* множества A на множество B называется некоторый закон, который каждому элементу множества A ставит в соответствие некоторый строго определенный элемент множества B.

В дальнейшем будем рассматривать только те отображения плоскости (пространства) в плоскость (пространство) при которых образом некоторого репера является некоторый другой репер.

Определение 1.6. Отображение плоскости (пространства) в плоскость (пространство) называется *собственным*, если старый и новый реперы имеют одинаковую ориентацию и *несобственным* в противном случае.

Определение 1.7. *Преобразованием* множества A называется всякое отображение множества A на себя.

Определение 1.8. *Движением плоскости (пространства)* называется всякое такое отображение плоскости (пространства), которое может быть задано следующим образом:

а) если нам дан некоторый ортонормированный репер (который обычно называют "старым"), то его образом при этом отображении будет являться некоторый другой ортонормированный репер (который обычно называют "новым");

б) если нам дана некоторая точка, то координаты ее образа в новом репере будут равны координатам самой точки в старом репере.

Поскольку движение является частным случаем отображения, то различают собственные (рис. 1.1) и несобственные (рис. 1.2) движения плоскости и собственные (рис. 1.3) и несобственные (рис. 1.4) движения пространства.

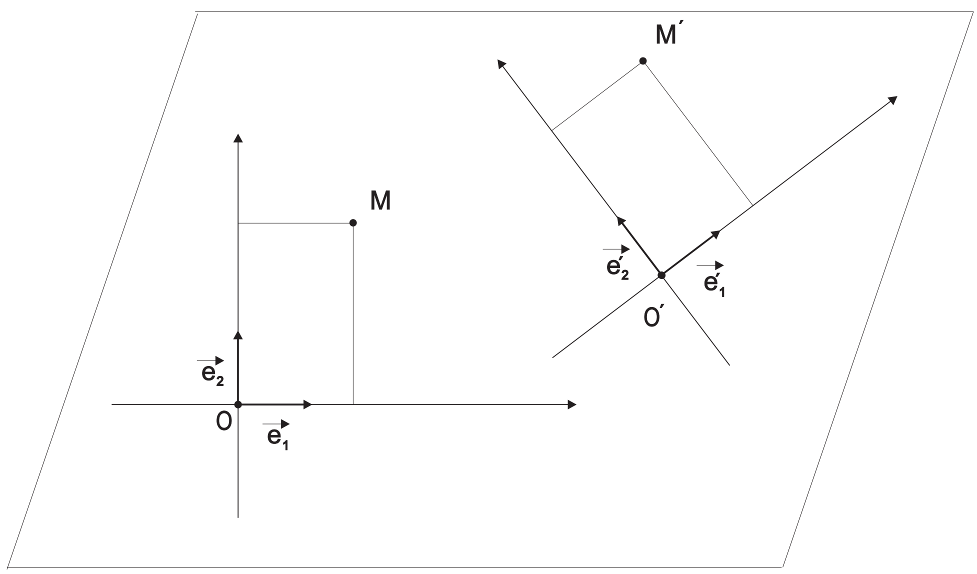


Рис. 1.1:

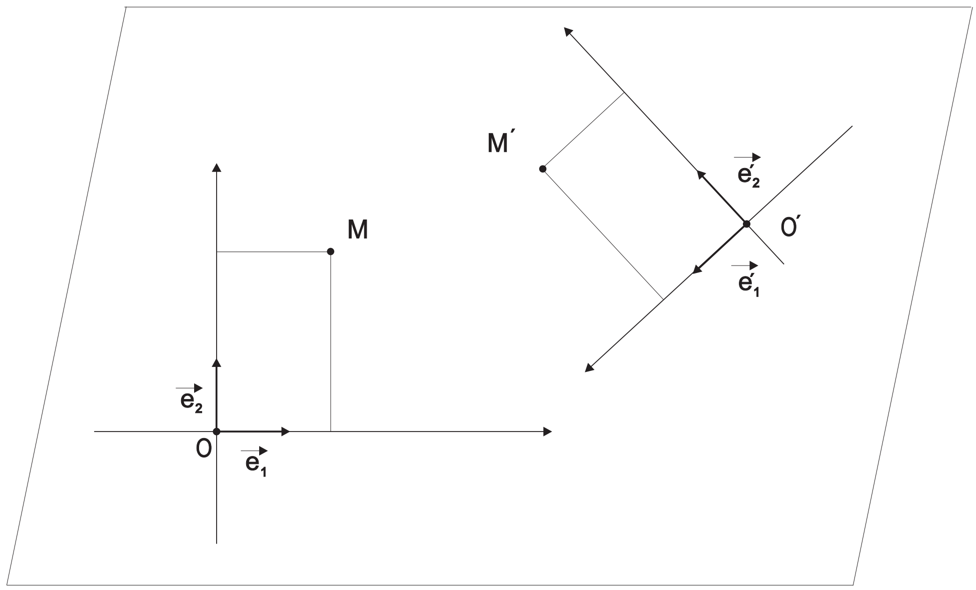


Рис. 1.2:

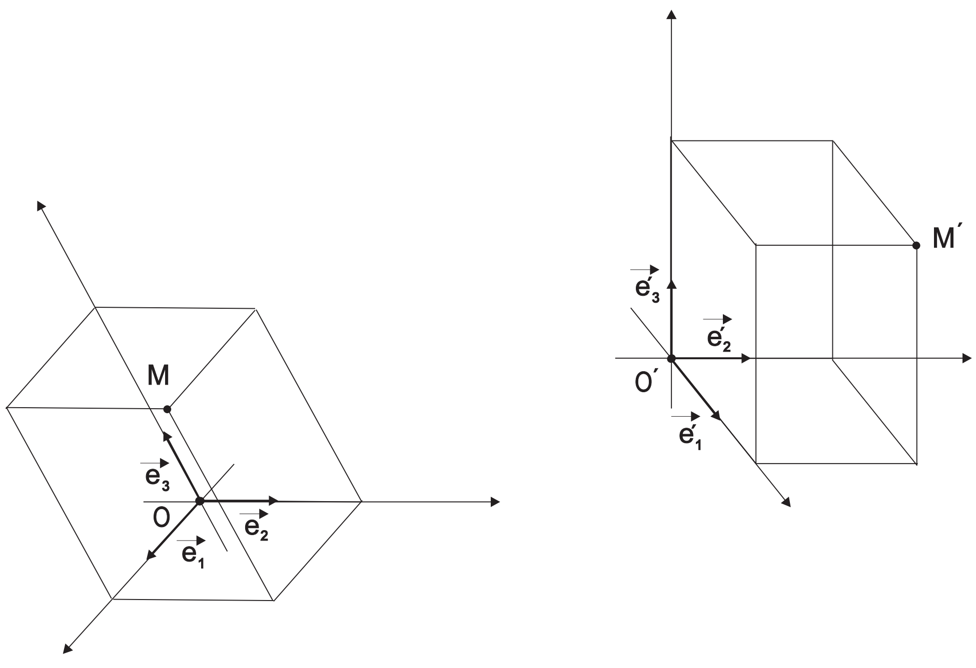


Рис. 1.3:

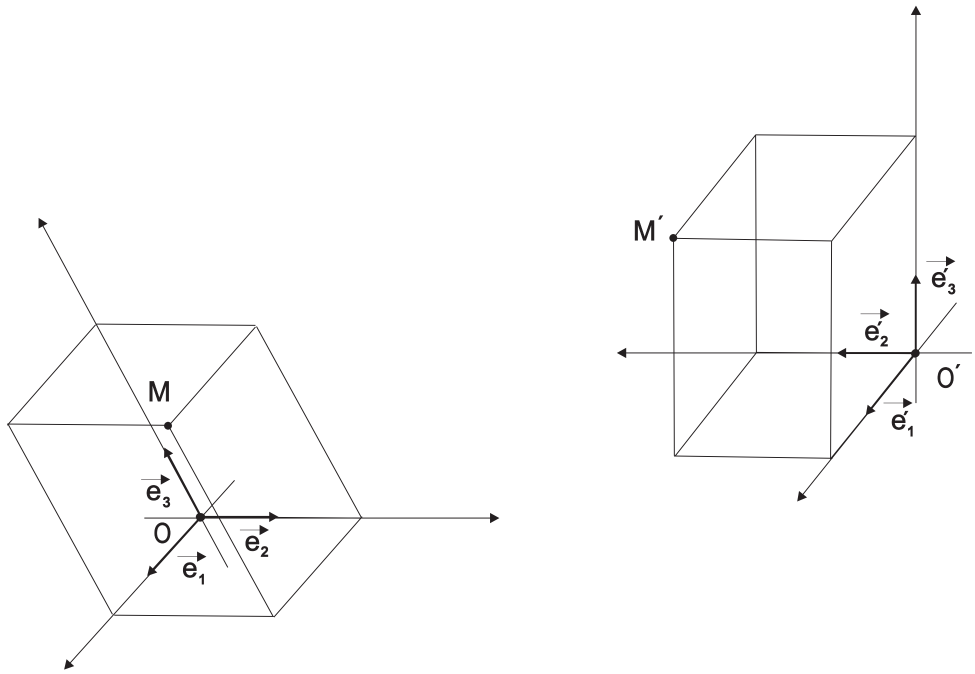


Рис. 1.4:

Определение 1.9. *Преобразованием плоскости (пространства)* называется такое отображение плоскости (пространства), которое определяется так же как и движение, только берутся произвольные (не обязательно ортонормированные) реперы и координаты образа и прообраза не обязательно равны (рис. 1.5)

Так же как и для движения, различают собственные и несобственные преобразования плоскости (пространства).

Определение 1.10. *Аффинным преобразованием плоскости (пространства)* называется такое преобразование плоскости (пространства), что образ произвольной точки при этом преобразовании имеет в новом репере такие же координаты, какие имеет сама точка в старом репере.

Поскольку аффинное преобразование является частным случаем преобразования, то различают собственные и несобственные аффинные преобразования.

Очевидно, что движение как плоскости так и пространства является частным случаем аффинного преобразования.

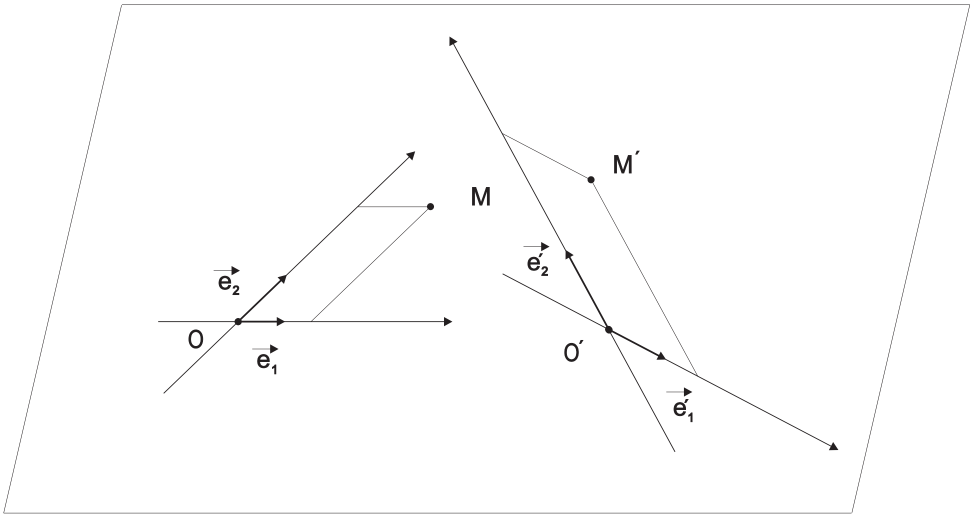


Рис. 1.5:

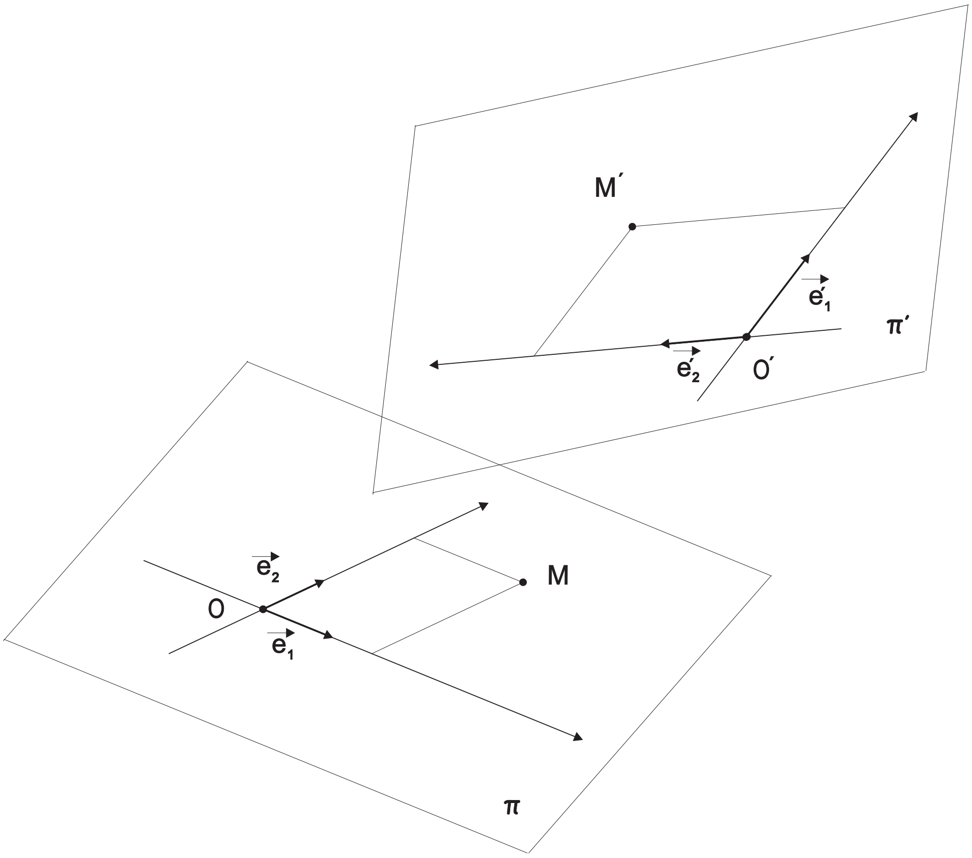


Рис. 1.6:

Определение 1.11. *Аффинным отображением плоскости* π *в плоскость* π' называется всякое отображение, которое можно задать следующим образом:

а) если нам дан некоторый репер $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ в плоскости π, то его образом при этом отображении будет являться некоторый другой репер $O'\vec{e'}_1\vec{e'}_2$ в плоскости π';

в) если M — некоторая точка плоскости π, которая в репере $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ имеет координаты (x_1, x_2), то ее образ M' в репере $O'\vec{e'}_1\vec{e'}_2$ имеет те же координаты (x_1, x_2) (рис. 1.6).

Аналогично можно определить аффинное отображение пространства (хотя наглядный пример, который показал бы различие между аффинным отображением и аффинным преобразованием, привести практически невозможно). С другой стороны, мы можем рассматривать аффинное отображение плоскости как аффинное отображение плоскости на себя и тогда оно оказывается тождественно аффинному преобразованию плоскости. Так же и для пространства. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только аффинные преобразования. Если же понадобится использовать аффинное отображение, то будем рассматривать такие случаи отдельно.

1.1.2. Аналитическое выражение аффинных преобразований

Аффинные преобразования можно задавать аналитически с помощью средств матричной алгебры. Такой подход прежде всего позволяет упрощать операции с аффинными преобразованиями. Кроме того, возникает возможность рассмотрения аффинных преобразований для пространств размерности больше чем 3.

Пусть аффинное преобразование плоскости задано переходом от репера $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ к реперу $O'\vec{e'}_1\vec{e'}_2$ Поскольку $\vec{e'}_1$ и $\vec{e'}_2$ лежат в той же плоскости, то существуют действительные числа $c_{11},\ c_{12},\ c_{21},\ c_2$ такие, что

$$\vec{e'}_1 = c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2;$$

$$\vec{e'}_2 = c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2.$$

Такое расположение элементов матрицы позволит нам в дальнейшем записать другую, более важную матрицу в обычном виде. Тогда матрица, составленная из коэффициентов разложения векторов репера $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ по векторам репера $O'\vec{e'}_1\vec{e'}_2$, т.е. матрица

$$A = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей перехода* от базиса векторов репера $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ к базису векторов репера $O'\vec{e'}_1\vec{e'}_2$. Аналогично, для случая пространства, коэффициенты разложения векторов репера $O_1\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ по векторам репера $O'\vec{e'}_1\vec{e'}_2\vec{e'}_3$ дают матрицу

$$A = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}$$

перехода от базиса векторов репера $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ к базису векторов репера $O'\vec{e'}_1\vec{e'}_2\vec{e'}_3$.

Замечание 1.1. *Поскольку преобразование, обратное к аффинному существует и так же является аффинным, то матрица перехода от векторов одного базиса к векторам другого при аффинном преобразовании является невырожденной.*

Пусть точка O' в репере $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ имеет координаты (a, b) Найдем координаты вектора $\overrightarrow{OM'}$ в репере $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Ими будут являться коэффициенты разложения вектора $\overrightarrow{OM'}$ по векторам репера $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Очевидно, что

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M'}.$$

Пусть числа x и y — координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ в репере $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Такие же координаты имеет вектор $\overrightarrow{O'M'}$ в репере $O'\vec{e'}_1\vec{e'}_2$. Обозначим через x' и y' координаты вектора $\overrightarrow{OM'}$ в репере $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Тогда, поскольку при аффинном преобразовании координаты сохраняются, то

$$\overrightarrow{O'M'} = x\vec{e'}_1 + y\vec{e'}_2 =$$

$$x(c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2) + y(c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2) =$$

$$(c_{11}x + c_{12}y)\vec{e}_1 + (c_{21}x + c_{22}y)\vec{e}_2$$

и
$$\overrightarrow{OO'} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2,$$
то
$$\overrightarrow{OM'} = (c_{11}x + c_{12}y)\vec{e}_1 + (c_{21}x + c_{22}y)\vec{e}_2 + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 =$$
$$(c_{11}x + c_{12}y + a)\vec{e}_1 + (c_{21}x + c_{22}y + b)\vec{e}_2.$$

Таким образом, если некоторое аффинное преобразование задано своей матрицей перехода от базиса старого репера к базису нового репера
$$A = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}$$
и даны координаты (a, b) начала нового репера в старом репере, то формулы перехода от старых координат x, y некоторой точки к ее новым координатам x', y' имеют вид:
$$x' = c_{11}x + c_{12}y + a;$$
$$y' = c_{21}x + c_{22}y + b.$$
Аналогично, для случая пространства, если некоторое аффинное преобразование задано матрицей перехода
$$A = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}$$
от базиса старого репера к базису нового репера и если даны координаты (a, b, c) начала нового репера в старом, то формулы перехода от старых координат x, y, z некоторой точки к ее новым координатам x', y', z' имеют вид:
$$x' = c_{11}x + c_{12}y + c_{13} + a;$$
$$y' = c_{21}x + c_{22}y + c_{23} + b.$$
$$y' = c_{21}x + c_{22}y + c_{33} + c.$$

Обратно, если дана некоторая невырожденная матрица второго порядка и пара действительных чисел, то можно составить некоторое аффинное преобразование плоскости. Аналогичное утверждение справедливо и для случая пространства, если даны некоторая невырожденная матрица третьего порядка и некоторая тройка действительных чисел.

Теперь можно дать определение собственного аффинного преобразования несколько иначе, чем раньше.

Определение 1.12. Аффинное преобразование называется *собственным*, если определитель всякой матрицы перехода этого преобразования положителен и *несобственным* в противном случае.

Определение 1.13. Матрицей аффинного преобразования будем называть транспонированную матрицу перехода от базиса старого репера к базису нового.

1.2. Свойства аффинных преобразований

1. Основные свойства аффинных преобразований
2. Сохранение отношений площадей и объемов при аффинных преобразованиях

1.2.1. Основные свойства аффинных преобразований

Свойство 1.1. *При аффинном преобразовании вектору $\vec{a} = \overrightarrow{M_0M_1}$ ставится в соответствие вектор $\vec{a'} = \overrightarrow{M'_0M'_1}$, причем вектор $\vec{a'}$ имеет в новом репере такие же координаты, какие вектор $\vec{a}$ имеет в старом репере.*

Действительно, координаты вектора вычисляются как разности координат точек на которых они построены. Поскольку же значения этих координат при аффинном преобразовании остаются неизменными, то сохраняются и значения их разностей.

Используя переход к координатам, легко доказать и следующее свойство.

Если при данном аффинном преобразовании векторам $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ соответствуют векторы $\vec{u'}_1, \vec{u'}_2, \ldots, \vec{u'}_n$, то всякой линейной комбинации

$$\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{u}_n$$

векторов $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ соответствует линейная комбинация

$$\lambda_1\vec{u}'_1 + \lambda_2\vec{u}'_2 + \ldots + \lambda_n\vec{u}'_n$$

векторов $\vec{u'}_1, \vec{u'}_2, \ldots, \vec{u'}_n$.

Следствие 1.1. *При аффинном преобразовании линейная зависимость векторов сохраняется. В частности, коллинеарные векторы переходят в коллинеарные, компланарные векторы переходят в компланарные.*

Следствие 1.2. *При аффинном преобразовании всякая линейно независимая система векторов переходит в линейно независимую систему.*

Поскольку при аффинном преобразовании любая точка имеет строго определенный образ, то очевидно, что аффинное преобразование является изоморфизмом. Поэтому для него существует обратное преобразование, которое так же очевидно является аффинным.

Свойство 1.2. *Пусть некоторое аффинное преобразование задано переходом от репера I к реперу I'. Тогда если II — некоторый произвольный репер, то его образом при этом преобразовании будет некоторый репер II'. При этом, если M — некоторая точка, то ее образ при этом преобразовании — точка M' — имеет такие же координаты в репере II', какие точка M имеет в репере II.*

◀ Докажем утверждение для случая плоскости. Пусть аффинное преобразование задано переходом от репера $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ к реперу $O'\vec{e'}_1\vec{e'}_2$. Возьмем некоторый другой репер $O_1\vec{\varepsilon}_1\vec{\varepsilon}_2$. Векторы этого репера образуют по определению линейно независимую систему. Значит, ввиду свойства 3, их образ — система векторов $\vec{\varepsilon'}_1\vec{\varepsilon'}_2$ будет также линейно независима. Образом точки O_1 будет некоторая точка O_1'. Следовательно, система $O_1'\vec{\varepsilon'}_1\vec{\varepsilon'}_2$ может быть выбрана в качестве репера.

Пусть M — некоторая точка и пусть M' — ее образ при данном преобразовании.

Допустим, что точка M в репере $O_1\vec{\varepsilon}_1\vec{\varepsilon}_2$ имеет координаты (x_1, x_2). Нужно доказать, что точка M' в репере $O_1'\vec{\varepsilon'}_1\vec{\varepsilon'}_2$ имеет те же координаты, т.е. (x_1, x_2).

Поскольку аффинное преобразование задано переходом от репера $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ к реперу $O\vec{e'}_1\vec{e'}_2$, то координаты любого вектора в старом репере равны координатам образа этого вектора в новом репере. Координаты точки в данном репере — это координаты в этом репере ее радиус-вектора. Пусть (a, b) — координаты точки O_1 в репере $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Это означает, что $\overrightarrow{OO_1} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$.

Векторы $\vec{\varepsilon}_1$ и $\vec{\varepsilon}_2$ также имеют в репере $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ координаты, т.е. существуют такие действительные числа λ_{11} и λ_{12}, что

$$\vec{\varepsilon}_1 = \lambda_{11}\vec{e}_1 + \lambda_{12}\vec{e}_2$$

и существуют такие действительные числа λ_{21} и λ_{22}, что

$$\vec{\varepsilon}_2 = \lambda_{21}\vec{e}_1 + \lambda_{22}\vec{e}_2.$$

Тогда, согласно свойству 2, те же координаты в репере $O'\vec{e'}_1\vec{e'}_2$ имеют и их образы:

$$\vec{\varepsilon'}_1 = \lambda_{11}\vec{e'}_1 + \lambda_{12}\vec{e'}_2$$

$$\vec{\varepsilon'}_2 = \lambda_{21}\vec{e'}_1 + \lambda_{22}\vec{e'}_2.$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + x_1\vec{\varepsilon}_1 + x_2\vec{\varepsilon}_2 =$$

$$a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + x_1(\lambda_{11}\vec{e}_1 + \lambda_{12}\vec{e}_2) + x_2(\lambda_{21}\vec{e}_1 + \lambda_{22}\vec{e}_2) =$$

$$(a + x_1\lambda_{11} + x_2\lambda_{21})\vec{e}_1 + (b + x_1\lambda_{12} + x_2\lambda_{22})\vec{e}_2.$$

Значит,

$$((a + x_1\lambda_{11} + x_2\lambda_{21}), (b + x_1\lambda_{12} + x_2\lambda_{22}))$$

— координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ в репере $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Они равны координатам вектора $\overrightarrow{O'M'}$ в репере $O'\vec{e'}_1\vec{e'}_2$, т.е.,

$$\overrightarrow{O'M'} = (a + x_1\lambda_{11} + x_2\lambda_{21})\vec{e'}_1 + (b + x_1\lambda_{12} + x_2\lambda_{22})\vec{e'}_2.$$

Поскольку $\overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{O'O'_1} + \overrightarrow{O'_1M'}$, то $\overrightarrow{O'_1M'} = \overrightarrow{O'M'} - \overrightarrow{O'O'_1}$. Координаты точки O'_1 в новом репере равны координатам точки O_1 в старом репере, т.е., $\overrightarrow{O'O'_1} = a\vec{e'}_1 + b\vec{e'}_2$. Следовательно,

$$\overrightarrow{O'_1M'} = (a + x_1\lambda_{11} + x_2\lambda_{21})\vec{e'}_1 + (b + x_1\lambda_{12} + x_2\lambda_{22})\vec{e'}_2 -$$

$$(a\vec{e'}_1 + b\vec{e'}_2) = x_1\lambda_{11}\vec{e'}_1 + x_1\lambda_{12}\vec{e'}_2 + x_2\lambda_{21}\vec{e'}_1 + x_2\vec{e'}_2 =$$

$$x_1\vec{\varepsilon'}_1 + x_2\vec{\varepsilon'}_2.$$

Итак, мы получаем, что координаты точки M' в репере $O'_1\vec{\varepsilon'}_1\vec{\varepsilon'}_2$ равны (x_1, x_2), т.е. координатам точки M в репере $O_1\vec{\varepsilon}_1\vec{\varepsilon}_2$.

Доказательство для случая пространства аналогично и отличается только добавлением третьей координаты. ▶

Свойство 1.3. *Задав аффинное преобразование переходом от репера I к реперу I', мы можем задать его взяв в качестве старого какой-нибудь репер II и указав его образ II' при этом отображении в качестве нового.*

Следствие 1.3. *Произведение двух аффинных преобразований есть аффинное преобразование.*

Действительно, если даны два аффинных преобразования A_1 и A_2, то, взяв в качестве старого репера для преобразования A_2 новый репер преобразования A_1, мы получим аффинное преобразование, которое переводит старый репер преобразования A_1 в новый репер преобразования A_2, т.е. является произведением (или суперпозицией) преобразований A_1 и A_2.

Множество всех преобразований плоскости (пространства) относительно операции суперпозиции образует группу. Действительно, все аксиомы определения группы выполняются:

– последовательное выполнение двух преобразований плоскости (пространства) является преобразованием плоскости (пространства);

– операция суперпозиции преобразований плоскости (пространства) является ассоциативной;

– существует единственное тождественное преобразование плоскости (пространства) которое для операции суперпозиции преобразований плоскости (пространства) является нейтральным элементом;

– для любого преобразования плоскости (пространства) существует единственное обратное для него преобразование;

Определение 1.14. Подгруппа G_1 группы G называется *собственной,* если она является собственным подмножеством множества G.

Приведем важное утверждение для группы, которое называется критерием подгруппы.

Непустое подмножество G_1 группы G является ее подгруппой, если относительно введенной на G операции " для для любых элементов g_1 и g_2 из множества G_1, выполняются следующие условия:*

$$g_1^{-1} \in G_1;$$

$$g_1 * g_2 \in G_1.$$

Не всякое преобразование пространства (плоскости) является аффинным. В то же время, поскольку произведение аффинных преобразований является аффинным преобразование и преобразование, обратное к аффинному снова является аффинным, то получаем следующее свойство.

Свойство 1.4. *В группе всех преобразований плоскости (пространства) множество всех аффинных преобразований плоскости (пространства) образует собственную подгруппу.*

В таком же соотношении находятся аффинные преобразования и движения.

Свойство 1.5. *В группе всех аффинных преобразований плоскости (пространства) множество всех движений плоскости (пространств) образует собственную подгруппу.*

Свойство 1.6. *При аффинном преобразовании плоскости (пространства) прямая переходит в прямую.*

◀ Ограничимся доказательством для случая плоскости, поскольку доказательство для случая пространства отличается лишь добавлением одной координаты.

Пусть аффинное преобразование плоскости задано переходом от репера I к реперу II. Пусть a — некоторая прямая, M_1 и M_2 — некоторые точки, принадлежащие этой прямой, а M_1' и M_2' — соответственно их образы при указанном преобразовании. Если M — некоторая произвольная точка прямой a, то векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{MM_2}$ коллинеарны. Но тогда коллинеарными будут и векторы $\overrightarrow{M_1'M'}$ и $\overrightarrow{M'M_2'}$, где M' — образ точки M. Таким образом, любая точка прямой a перейдет в некоторую точку прямой $M_1'M_2'$. Теперь нужно еще показать, что множество всех точек прямой a перейдет в множество всех точек прямой $M_1'M_2'$. Действительно, поскольку преобразование, обратное к аффинному является аффинным, то, взяв это преобразование, для любой точки M'' прямой $M_1'M_2'$, мы всегда можем указать ее образ на прямой a. Следовательно, при исходном преобразовании, для любой точки прямой $M_1'M_2'$ на прямой a найдется ее прообраз. ▶

Свойство 1.7. *При аффинном преобразовании пространства, плоскости переходят в плоскости. При этом сохраняется параллельность.*

◀ Доказательство этого свойства аналогично доказательству предыдущего, поскольку точки тогда и только тогда лежат в одной плоскости, когда векторы, которые они образуют, могут быть разложены по направляющим векторам этой плоскости. ►

Свойство 1.8. *При аффинном преобразовании плоскости (пространства), определенном переходом от репера I к реперу II, множество всех точек, координаты которых в репере I удовлетворяют некоторому уравнению, переходят в множество точек, координаты которых в репере II удовлетворяют этому же уравнению.*

◄ Действительно, любая точка взаимнооднозначно соответствует своим координатам в некотором репере. Поэтому множество точек можно определить как наборы переменных, которые являются решениями какого-либо уравнения. Поскольку же при аффинном преобразовании координаты точек сохраняются, то очевидно, что множество образов рассматриваемых нами точек будет иметь координаты, удовлетворяющие тому же уравнению. ►

Свойство 1.9. *При аффинном преобразовании плоскости (пространства), отрезок M_0M_1 переходит в отрезок $M_0'M_1'$, а точка M, делящая отрезок M_0M_1 в соотношении λ переходит в точку M', делящую отрезок $M_0'M_1'$ в том же соотношении λ.*

◄ Пусть точка M делит отрезок M_0M_1 в отношении λ. Это значит, что

$$\lambda = \frac{M_0M}{MM_1}.$$

Отсюда получаем, что $\overrightarrow{M_0M} = \lambda\overrightarrow{MM_1}$. Следовательно, $\overrightarrow{M_0M} - \lambda\overrightarrow{MM_1} = \vec{0}$. Отсюда получаем, что $\overrightarrow{M_0'M'} - \lambda\overrightarrow{M'M_1'} = \vec{0}$ и поэтому

$$\lambda = \frac{M_0'M'}{M'M_1'}.$$

Поэтому точка M' делит отрезок $M_0'M_1'$ в отношении λ. ►

Определение 1.15. Три точки, не лежащие на одной прямой называются неколлинеарными.

Определение 1.16. Четыре точки, не лежащие в одной плоскости называются некомпланарными.

Аффинное преобразование можно в некотором смысле рассматривать как аффинное отображение. Если рассмотреть некоторое аффинное преобразование пространства, то оно некоторую плоскость π будет отображать в некоторую другую плоскость π'. Если выбрать на плоскости π репер $O\vec{e}_1, \vec{e}_2$, то при указанном преобразовании он отобразится в некоторый репер $O'\vec{e'}_1\vec{e'}_2$.

Можно, например поступить так: точка O отобразится в точку O', а в качестве представителей векторов $\vec{e'}_1$ и $\vec{e'}_2$ выберем те связанные векторы, которые имеют началом точку O'. Тогда переход от репера $O\vec{e}_1, \vec{e}_2$ к реперу $O'\vec{e'}_1\vec{e'}_2$ задаст отображение плоскости π на плоскость π'. Говорят еще, что указанное преобразование порождает аффинное отображение плоскости π на плоскость π'.

Свойство 1.10. *Существует одно и только одно аффинное преобразование плоскости, которое переводит данную тройку неколлинеарных точек этой плоскости, в некоторую другую (произвольную) тройку неколлинеарных точек этой же плоскости.*

◀ Пусть A, B, C — некоторые неколлинеарные точки некоторой плоскости и пусть A', B', C' — некоторые другие неколлинеарные точки этой же плоскости. Для того, чтобы задать некоторое аффинное преобразование, вначале нужно взять два произвольных репера. Поскольку взятые нами тройки точек являются неколлинеарными, то в качестве I репера можно выбрать тройку $A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, а в качестве второго — тройку $A', \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}$. Кроме того, векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ имеют в репере I соответственно координаты $(0, 1)$ и $(1, 0)$. Такие же координаты имеют в репере II и соответственно векторы $\overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{A'C'}$. Следовательно, преобразование, заданное переходом от репера I к реперу II является аффинным.

Единственность такого преобразования очевидна, поскольку при аффинном преобразовании координаты вектора равны координатам его образа. ▶

Используя те же рассуждения, легко убедиться и в следующем свойстве.

Свойство 1.11. *Существует одно и только одно аффинное преобразование пространства, которое переводит данную четверку некомпланарных точек в некоторую другую (произвольную) четверку некомпланарных точек.*

1.2.2. Сохранение отношений площадей и объемов при аффинном преобразовании

Пусть на плоскости в прямоугольной системе координат даны 2 вектора $\vec{u}_1(x_1, y_1)$, $\vec{u}_2(x_2, y_2)$. Выберем их представителей с общим началом. Через общее начало проведем ось аппликат, перпендикулярно их плоскости. Как известно, площадь параллелограмма, построенная на векторах равна модулю векторного произведения. Представим векторы $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ тремя координатами: $\vec{u}_1(x_1, y_1, 0)$, $\vec{u}_2(x_2, y_2, 0)$.

Тогда площадь параллелограмма будет равна

$$s = \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2} =$$

$$mod \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Знак определителя определяется ориентированностью, то есть в каком порядке взяты векторы $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$. Этот знак мы будем отбрасывать и вспоминать о нем лишь при необходимости.

Пусть дано некоторое аффинное преобразование плоскости и пусть

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

— его матрица.

Если $\vec{u}'_1(x'_1, y'_1)$, $\vec{u}'_2(x'_2, y'_2)$ — образы векторов $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, то

$$\begin{aligned} \vec{x}'_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}y_1 \\ \vec{y}'_1 &= c_{21}x_1 + c_{22}y_1 \\ \vec{x}'_2 &= c_{11}x_2 + c_{12}y_2 \\ \vec{y}'_2 &= c_{21}x_2 + c_{22}y_2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$S' = \begin{vmatrix} c_{11}x_1 + c_{12}y_1 & c_{21}x_1 + c_{22}y_1 \\ c_{11}x_2 + c_{12}y_2 & c_{21}x_2 + c_{22}y_2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Отсюда получаем: $S' = |C|S$

Если в пространстве взять параллелепипед, построенный на некоторых 3-х векторах, то используя аналогичные рассуждения, такое же утверждение можно получить и для отношений объемов параллелепипедов при аффинном преобразовании, то есть $V' = |C|V$.

Из свойств элементарной геометрии известно, что площадь любой фигуры может быть разбита на сумму площадей паралелограмов, причём в интегральном исчислении это делается достаточно точно. Аналогично любая пространственная фигура может быть разбита на паралелипипеды. Поэтому имеет место следующая теорема.

Теорема 1.1. *При аффинном преобразовании плоскости (пространства) площадь паралерограма (паралелипипеда) построенного на каких - либо 2-х (3-х) векторах умножается на определитель этого преобразования.*

Следствие 1.4. *При аффинном преобразовании плоскости (пространства) сохраняется отношение площадей фигур (объёмов тел).*

1.3. Аффинная классификация линий второго порядка

1. Движение как изометрическое преобразование
2. Преобразование подобия
3. Основная теорема об аффинных преобразованиях
4. Аффинная эквивалентность линии второго порядка

1.3.1. Движение как изометрическое преобразование

Определение 1.17. Преобразование A называют *изометрическим*, если для любых двух точек M_1 и M_2 и их образов соответственно M_1', M_2' выполняется условие

$$\rho(M_1, M_2) = \rho(M_1', M_2').$$

Докажем вначале следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Пусть $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ — некоторые векторы, а $\overrightarrow{O'A'}$ и $\overrightarrow{O'B'}$ — их образы при данном изометрическом преобразовании.*

Тогда

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O'A'} \cdot \overrightarrow{O'B'}.$$

◀ Пусть

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}.$$

Возведём это равенство в скалярный квадрат:

$$(\overrightarrow{AB})^2 = (\overrightarrow{OA})^2 + 2\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{OB})^2.$$

Тогда

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + 2\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OB}|^2.$$

Следовательно,

$$2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{AB}|^2 - |\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{OB}|^2.$$

Пусть теперь

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'O'} + \overrightarrow{O'B'}.$$

Повторяя аналогичные рассуждения, получим, что

$$2\overrightarrow{O'A'} \cdot \overrightarrow{O'B'} = |\overrightarrow{A'B'}|^2 - |\overrightarrow{O'A'}|^2 - |\overrightarrow{O'B'}|^2.$$

Правые части полученных равенств равны (поскольку изометрическое преобразование сохраняет длину векторов). Следовательно, получаем

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O'A'} \cdot \overrightarrow{O'B'}.$$

◀

Всякое движение сохраняет расстояние. Значит всякое движение есть изометрическое преоб разование. Справедливо и обратное.

Теорема 1.2. *Всякое изометрическое преобразование есть движение.*

◀ Пусть $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ — некоторый прямоугольный репер. Для определения положим: $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OB}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OC}$.

При изометрическом преобразовании векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ перейдут соответственно в векторы $\overrightarrow{O'A'}$, $\overrightarrow{O'B'}$, $\overrightarrow{O'C'}$. Они будут иметь ту же длину, что и их прообразы и ввиду леммы будут взаимно перпендикулярны. Поэтому полученную тройку векторов можно выбрать в качестве прямоугольного репера $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'\vec{e}_3'$, где $\vec{e}_1' = \overrightarrow{O'A'}$, $\vec{e}_2' = \overrightarrow{O'B'}$, $\vec{e}_3' = \overrightarrow{O'C'}$.

Пусть в репере $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ дана некоторая точка M. Координаты точки M равны координатам вектора $\overrightarrow{OM}$, которые равны проекциям вектора $\overrightarrow{OM}$ на векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

Как известно,

$$\overrightarrow{OM}\overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OA}| \cdot Pr_{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{OM},$$

но $\overrightarrow{OA} = \vec{e}_1$, $\vec{e}_1$ — единичный вектор. Поэтому получаем, что $x = \overrightarrow{OM} \cdot \cdot \overrightarrow{OA}$. Аналогично

$$y = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OB}, \quad z = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OC}.$$

Поскольку скалярное произведение при изометрическом преобразовании сохраняется, то получим, что

$$x = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'M'}\overrightarrow{O'A'} = x'.$$

Аналогично $y = y'$, $z = z'$. Это и означает, что данное преобразование является движением. ◀

Таким образом, изометрическое преобразование и движение плоскости (пространства) есть одно и тоже.

1.3.2. Преобразование подобия

Определение 1.18. *Преобразованием подобия* называется такое преобразование А, если для этого преобразования существует такое положительное число k, что для любых двух точек M_1, M_2 и соответственно их образов M_1', M_2' и выполняется равенство

$$\rho(M_1', M_2') = k\rho(M_1, M_2).$$

Определение 1.19. *Растяжением плоскости (пространства) с центром в точке О и коэффициентом k* называется такое преобразование А, что точка О остаётся неподвижной, а для любой точки М её образ М' лежит на луче $\overrightarrow{OM}$ и выполняется условие

$$|\overrightarrow{OM'}| = k|\overrightarrow{OM}|.$$

Замечание 1.2. *Поскольку вектора $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM'}$ сонаправлены, то можно говорить, что $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.*

Теорема 1.3. *Всякое растяжение является преобразованием подобия.*

Доказательство основано на подобии треугольников. Пусть даны две точки M_1 и M_2 и пусть M_1' и M_2' — их образы соответственно. По определению растяжения $\overrightarrow{OM_1'} = k\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2'} = k\overrightarrow{OM_2}$, поэтому треугольники OM_1M_2 и $OM_1'M_2'$ подобны. Следовательно $\overrightarrow{M_1'M_2'} = k\overrightarrow{M_1M_2}$ и поэтому $\rho(M_1', M_2') = k\rho(M_1, M_2)$.

Если взять некоторый репер $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ и в нём точку М и её образ М', полученный растяжением плоскости с центром О и коэффициентом растяжения k, то $k' = kx + 0y$, $y' = 0y + ky$. Таким образом, верно следующее утверждение, которое для случая пространства доказывается аналогично.

Теорема 1.4. *Растяжение с центром О и коэффициентом k есть аффинное преобразование.*

1.3.3. Основная теорема об аффинных преобразованиях

Пусть при аффинном преобразовании А плоскости линия второго порядка F переходит в линию второго порядка F'. Поскольку при аффинном преобразовании отрезок переходит в отрезок, а середина отрезка

— в середину его образа, то при преобразовании A центр линии F переходит в центр линии F'.

Поскольку аффинное преобразование сохраняет параллельность, то семейство параллельных хорд линии F перейдёт в семейство параллельных хорд линии F'. Середины хорд первого семейства перейдут в середины хорд второго, поэтому диаметр, сопряжённый хордам первого семейства перейдёт в диаметр, сопряжённый хордам второго. Значит, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.5. *Пусть при данном аффинном преобразовании данная линия второго порядка F переходит в линию второго порядка F'. Тогда всякая пара сопряжённых диаметров линии F переходит в пару сопряжённых диаметров линии F'.*

Теорема 1.6. *Всякое аффинное преобразование плоскости является произведением движения (собственным или несобственным) и двух сжатий плоскостей, происходящих в двух взаимно-перпендикулярных направлениях.*

◀ Действительно, пусть аффинное преобразование плоскости A переводит линию второго порядка F в некоторую фигуру F' (то, что образом преобразования не является пустое множество, следует хотя бы из того, что при аффинном преобразовании точка переходит в точку). Пусть F — окружность с центром O и радиусом 1. Тогда F — ограниченная фигура. Следовательно, F' — так же ограниченная фигура (поскольку при аффинном преобразовании сохраняется отношение площадей) При аффинном преобразовании уравнению, которому удовлетворяет множество точек удовлетворяет и множество их образов (только в разных реперах). Тогда F' — также фигура второго порядка. Следовательно, F' — ограниченная фигура второго порядка, содержащая по крайней мере одну действительную точку. Согласно классификационной теореме для общего уравнения линий второго порядка, F' — эллипс. Сжав его вдоль обеих осей симметрии (которые естественно являются взаимно перпендикулярными) с необходимым коэффициентом, получим окружность F'' радиуса 1, для преобразования которой в исходную фигуру F достаточно произвести преобразование движения (можно собственное, можно несобственное). Теперь осталось вспомнить, что для аффинного преобразования можно построить обратное преобразование, которое так же будет аффинным. Таким образом, совершив движение (собственное или несобственное) и два сжатия во взаимно перпендикулярных направлениях, мы получим из фигуры F фигуру F'. ◄

1.3.4. Аффинная эквивалентность линии второго порядка

Определение 1.20. Две линии второго порядка называются *аффинно-эквивалентными*, если существует некоторое аффинное преобразование А, переводящая одну из этих линий в другую.

Определение 1.21. *Аффинными классами* называют множество аффинно- эквивалентных фигур (линий второго порядка в частности).

Теорема 1.7. *Аффинная эквивалентность является отношением эквивалентности на множестве всех фигур (линии второго порядка в частности). Аффинные классы фигур одной размерности и одного порядка образуют непересекающиеся множества.*

Теорема 1.8. *Все линии второго порядка разбиваются на 9 аффинных классов:*

1) эллипс
2) мнимый эллипс
3) гипербола
4) действительные пересекающиеся прямые
5) мнимые пересекающиеся прямые
6) парабола
7) действительные параллельные прямые
8) мнимые параллельные прямые
9) совпадающие параллельные прямые.

Для доказательства теоремы нужно доказать два утверждения:

1) все линии одного наименования аффинно-эквивалентны между собой.

2) две линии различного наименования никогда не являются аффинно-эквивалентными.

1. пусть дан эллипс уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (если эллипс задан общим уравнением, то подобрав подходящую систему координат, получим каноническое уравнение). Совершим аффинное преобразование

$X = \dfrac{x}{a}$, $Y = \dfrac{y}{b}$, тогда получим эллипс $X^2 + Y^2 = 1$.

Если нам дан ещё один эллипс $\dfrac{x^2}{a'^2} + \dfrac{y^2}{b'^2} = 1$, то, совершив аффинное преобразование $X = \dfrac{x}{a}$, $Y = \dfrac{y}{b}$ снова получим эллипс $X^2 + Y^2 = 1$. Поскольку аффинное преобразование взаимнооднозначно и суперпозиции аффинного преобразования также является аффинным преобразованием, то очевидно, что эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ перейдёт в эллипс $\dfrac{x^2}{a'^2} + \dfrac{y^2}{b'^2} = 1$ с помощью некоторого аффинного преобразования A.

Для случая гиперболы доказательство аналогично.

В случае мнимого эллипса нетрудно показать, что достаточно использовать в качестве переходной фигуры мнимую окружность $X^2 + Y^2 = -1$ радиуса i. Если плоскость подвергнуть преобразованию подобия,

$$X = \frac{x}{p}, \quad Y = \frac{y}{p},$$

то произвольная парабола, заданная уравнением $y^2 = 2px$ перейдёт в параболу $Y^2 = 2X$.

Таким образом, аффинная эквивалентность этих линий так же очевидна. Для параллельных прямых

$$y^2 - b^2 = 0, \quad y^2 + b^2 = 0, \quad y^2 = 0$$

достаточно взять преобразование $X = bx, Y = y$, тогда получаем соответственно:

$$Y^2 - 1 = 0, \quad Y^2 + 1 = 0, \quad Y^2 = 0.$$

Итак, аффинная эквивалентность линий одного наименования доказана.

2. При аффинном преобразовании порядок алгебраических линий остаётся неизменным. Как было установлено выше, при аффинном преобразовании прямая переходит в прямую, параллельные прямые переходят в параллельные прямые, точка переходит в точку, отрезок в отрезок. Кроме того, действительные прямые переходят в действительные, мнимые переходят в мнимые.

Например, две пересекающиеся действительные прямые не могут перейти в две мнимые пересекающиеся прямые, так как точка переходит в точку. Линии, распадающиеся на прямые могут при аффинном преобразовании перейти только в распадающуюся линию своего класса.

Пусть теперь линия второго порядка является кривой. Если это мнимый эллипс, то он может быть аффинно-эквивалентен только мнимому эллипсу, так как ни одна действительная точка не удолетваряет его уравнению.

Рассмотрим теперь действительные кривые. Эллипс является линией второго порядка, который находится в пределах некоторого прямоугольника (или параллелограмм, если система координат ни прямоугольная) ни гипербола, ни парабола таким свойством не обладают, поскольку являются бесконечными фигурами.

Таким образом, нельзя эллипс преобразовать в гиперболу или параболу (это следует хотя бы из того, что отношение площадей при аффинном преобразовании сохраняется.

Доказать, аффинную неэквивалентность гиперболы и параболы просто, если использовать тот факт, что гипербола является центральной линией, а парабола — нецентральной. Можно использовать и тот факт, что парабола является нераспавшейся линией, а гипербола — распавшейся.

2. МНОГОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

2.1. Аффинное пространство

1. Определение аффинного пространства
2. Координаты в аффинном пространстве
3. Плоскости в аффинном пространстве
4. Аффинные преобразования аффинных n-мерных пространств

2.1.1. Определение аффинного пространства

Определение 2.1. *Аффинным n-мерным пространством, связанным с векторным пространством* V^n называется такое непустое множество A^n, элементы которого называются точками, что справедливы следующие аксиомы:

1) Каждым двум точкам A, B из A^n соответствует единственный вектор $\vec{u}$ из V^n такой, что: $\vec{U} = \vec{AB}$.

2). Если дан произвольный вектор $\vec{u}$ и точка А, то существует единственная точка В такая, что: $\vec{u} = \vec{AB}$.

3). Для любых трех точек L, M, N из A^n

$$\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{LN}.$$

Векторное пространство V^n называется пространством векторов аффинного пространства A^n.

Поскольку любому связанному вектору, построенному на точках пространства A^n в пространстве V^n соответствует некоторый вектор, то целесообразно рассмотреть следующие свойства.

Свойство 2.1. *Для любой точки $M \in A^n$, вектор $\overrightarrow{MM}$ — нулевой вектор.*

◀ Действительно, если взять последовательно три точки M, M, N, то, согласно определения аффинного пространства,

$$\overrightarrow{MM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MN}.$$

Тогда, по определению нулевого вектора, получаем, что $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$. ▶

Свойство 2.2. *Для любых точек M и N из пространства A^n, получаем:*

$$\overrightarrow{NM} = -\overrightarrow{NM}.$$

◀ Действительно, если взять последовательно три точки $N,\ M,\ N$, то, согласно определения аффинного пространства,

$$\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MN} = \vec{0}.$$

Тогда, по определению противоположного вектора, получаем, что $\overrightarrow{MM} = -\overrightarrow{MM}$. ▶

Рассмотренные свойства позволяют аффинное пространство A^n, связанное с векторным пространством V^n, превратить в векторное пространство, изоморфное пространству V^n. Действительно, всякой точке из пространства A^n можно изоморфно сопоставить ее радиус-вектор, который будет являться элементом векторного пространства V^n. Если M и N — точки из пространства A^n, то их суммой можно назвать такую точку K, что $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$. Произведением же точки M из пространства A^n на некоторое число λ из поля P можно назвать точку с радиус-вектором $\lambda\overrightarrow{OM}$.

Поскольку рассмотренное выше отображение является изоморфизмом, то можно рассмотреть и обратное отображение, т.е. на элементах векторного пространства V^n построить аффинное пространство A^n. Действительно, будем считать элементы пространства V^n не только векторами, но и точками. Для этого достаточно каждому вектору сопоставить точку, для которой этот вектор является радиус-вектором.

2.1.2. Координаты в аффинном пространстве

Определение 2.2. *Репером* или *системой координат* в аффинном пространстве A^n называется упорядоченная система $O\vec{e}_1\vec{e}_2\ldots e_n$, где O — некоторая фиксированная точка этого пространства, которая называется *началом координат*, а $\vec{e}_1\vec{e}_2\ldots\vec{e}_n$ — некоторый базис пространства векторов.

Теорема 2.1. *Координаты точки в данном репере определяются однозначно.*

Определение 2.3. *Координатами точки в аффинном пространстве* A^n, называются координаты этой точки в некотором репере $O\vec{e}_1\vec{e}_2\dots e_n$.

Если точка K аффинного пространства в некотором репере задана координатами

$$x_1, x_2, \dots, x_n,$$

а точка L этого же пространства в этом же репере задана координатами

$$y_1, y_2, \dots, y_n,$$

то вектор $\overrightarrow{KL}$ определяется координатами

$$y_1 - x_1,\ y_2 - x_2,\ \dots,\ y_n - x_n.$$

Пусть в аффинном пространстве даны два репера

$$O\vec{e}_1\vec{e}_2\dots e_n$$

и

$$O'\vec{e'}_1\vec{e'}_2\dots e'_n$$

и пусть

$$A = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

— матрица перехода от базиса $\vec{e}_1\vec{e}_2\dots e_n$ к базису $\vec{e'}_1\vec{e'}_2\dots e'_n$, а

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

— координаты точки O' в репере

$$O\vec{e}_1\vec{e}_2\dots e_n$$

Найдем зависимость между координатами произвольной точки M в первом базисе и координатами этой же точки во втором базисе. Если точка M имеет в первом репере координаты $(x_1, x_2, \dots x_n)$, то

$$\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots x_n\vec{e}_n.$$

Если точка M имеет во втором репере координаты $(x'_1, x'_2, \dots x'_n)$, то

$$\overrightarrow{O'M} = x'_1\vec{e'}_1 + x'_2\vec{e'}_2 + \dots x'_n\vec{e'}_n.$$

Согласно матрице перехода:

$$\vec{e'}_1 = c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 + \dots c_{n1}\vec{e}_n;$$

$$\vec{e'}_2 = c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 + \ldots c_{n2}\vec{e}_n;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\vec{e'}_n = c_{1n}\vec{e}_1 + c_{2n}\vec{e}_2 + \ldots c_{nn}\vec{e}_n.$$

Подставив полученные выражения в равенство

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M},$$

получим векторное равенство. Векторы, стоящие в обеих частях будут разложены по векторам первого базиса. Следовательно, будут выполняться равенства соответствующих координат:

$$x_1 = c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + \ldots + c_{1n}x'_n + a_1;$$
$$x_1 = c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2 + \ldots + c_{2n}x'_n + a_2;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1 = c_{n1}x'_1 + c_{n2}x'_2 + \ldots + c_{nn}x'_n + a_n.$$

Таким образом получаем *формулы преобразования аффинных координат,* которые могут быть так же записаны в виде

$$x_i = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}x'_j + a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Из этих формул следуют, например, формулы общего преобразования ПДСК-2:

$$x = \cos\alpha x' - \sin\alpha y' + a;$$

$$y = \sin\alpha x' + \cos\alpha y' + b.$$

Формулы преобразования аффинных координат выражают координаты точки в одном репере через координаты этой же точки в другом.

2.1.3. Плоскости в аффинном пространстве

Пусть в n-мерном аффинном пространстве A^n даны точка $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и вектор $\vec{u}_0(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$. Пусть t — некоторая переменная величина, принимающая значения из поля P. Тогда система уравнений

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + \alpha_1 t \\ x_2 = a_2 + \alpha_2 t \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_n + \alpha_n t \end{cases},$$

где $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$— координаты произвольной точки М, определяет некоторое множество точек, которые являются концами вектора $\vec{t}u_0$, если их началами является точка А. Задавая для t различные значения, мы получаем это множество точек. Множество векторов $\vec{t}U_0$ образует одномерное векторное пространство, поэтому указанное множество естественно определить как прямую n-мерного аффинного пространства A^n, а указанную систему уравнений как параметрические уравнения этой прямой. Прямую можно определить еще и по другому.

Определение 2.4. *Прямая* — это множество таких точек M, из A^n, что $\overrightarrow{M_0M} \in V^1$, где M_0 — некоторая фиксированная точка этого пространства, а V^1 — некоторое подпространство размерности 1 пространства векторов.

Определение 2.5. Если M_0 — некоторая фиксированная точка аффинного пространства A^n и V^k — k-мерное подпространство линейного пространства V^n, связанного с пространством A^n, то множество всех точек $M \in A^n$, таких, что $\overrightarrow{M_0M} \in V^k$, называется *$k$-мерной плоскостью, проходящей через точку M_0 и имеющей направляющее пространство V^k.*

Определение 2.6. *Гиперплоскостью* n-мерного аффинного пространства называется всякая его плоскость размерности $n-1$.

Будем обозначать k-мерную плоскость аффинного пространства через Π^k.

Теорема 2.2. *В качестве начальной точки M_0 плоскости Π^k можно выбрать любую точку этой плоскости.*

◀ пусть M_1 — некоторая фиксированная точка плоскости Π^k, проходящей через точку M_0 и имеющей направляющее пространство V^k. Пусть M — некоторая произвольная точка. Допустим, что $\overrightarrow{M_1M} \in V^k$. Тогда

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{M_0M_1} + \overrightarrow{M_1M} \in V^k,$$

поскольку каждое слагаемое принадлежит V^k. Следовательно, $M \in \Pi^k$. С другой стороны, если $M \in \Pi^k$, то

$$\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{M_1M_0} + \overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{M_0M} - \overrightarrow{M_0M_1} \in V^k.$$

►

Теорема 2.3. *Всякая k-мерная плоскость в аффинном пространстве является k-мерным аффинным пространством, связанным со своим направляющим пространством V^k.*

Теорема 2.4. *Для любого непустого подмножества $S \subset A^n$ существует плоскость Π^k, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $S \subset \Pi^k$;

2) Плоскость Π^k принадлежит любой плоскости, содержащей S.

Определение 2.7. Пусть S — некоторое непустое подмножество аффинного n-мерного пространства A^n и пусть $M_0 \in S$. Рассмотрим множество векторов $U = \{\overrightarrow{M_0M} | M \in S\}$. Построим линейную оболочку $L(U)$. *Аффинной оболочкой* $A(S)$ называется плоскость, имеющая начальной точку M_0 и направляющим пространство $L(U)$.

Определение 2.8. Точки $M_0, M_1, \ldots, M_k$ аффинного пространства A^n называются *аффинно независимыми*, если их аффинная оболочка n-мерна.

Теорема 2.5. *Через любые $k + 1$ аффинно независимые точки пространства A^n проходит единственная k-мерная плоскость. Во всякой k-мерной плоскости есть $k+1$ и не существует больше $k+1$ аффинно независимых точек. Любую систему аффинно независимых точек k-мерной плоскости можно дополнить до системы, состоящей из $k + 1$ аффинно независимых точек этой плоскости.*

Следствие 2.1. *Через любые две различные точки аффинного пространства проходит единственная прямая.*

Зафиксируем в пространстве A^n некоторую точку O. Тогда произвольную точку M пространства A^n можно задать с помощью ее радиус-вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

Пусть в пространстве A^n задана плоскость Π^k, проходящая через точку M_0 с радиус-вектором $\vec{r_0} = \overrightarrow{OM}$ и направляющим пространством

V^k. Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ — некоторый базис пространства V^k. Тогда

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + \ldots + t_k\vec{a}_k, \tag{$*$}$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_k$ — числа из поля P. Когда эти числа пробегают все значения из поля, точка M описывает плоскость Π^k. Уравнение (*) называется *векторным параметрическим уравнением плоскости* Π^k*,* а числа $t_1, t_2, \ldots, t_k$ — *параметрами.*

Пусть задана система линейных уравнений

$$\begin{cases} ca_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}, \tag{1}$$

где a_{ij} и b_i — числа из поля P.

Рассмотрим так же систему

$$\begin{cases} ca_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases}, \tag{2}$$

которая называется приведенной для системы (1). Зафиксируем в аффинном пространстве A^n, связанном с векторным пространством V^k некоторый репер. Тогда произвольный вектор $\vec{c} \in V^n$ может быть задан своими координатами в базисе этого репера. Будем называть этот вектор решением системы (1) (или системы (2)), если его координаты образуют множество решений этой системы. Как известно из курса линейной алгебры, множество векторов, являющихся решениями системы (2), образует $(n-r)$-мерное подпространство V^{n-r} линейного пространства V^n, где r — ранг матрицы системы уравнений.

Теорема 2.6. *Пусть (1) — совместная система линейных уравнений, r — ранг ее матрицы. Множество точек аффинного пространства A^n, являющихся решениями этой системы, есть $(n-r)$-мерная плоскость, направляющее пространство которой совпадает с пространством решений приведенной системы (2).*

Замечание 2.1. *Плоскость, заданная системой линейных уравнений, проходит через начало координат тогда и только тогда, когда эта система однородная.*

Теорема 2.7. *Если в аффинном пространстве фиксирован некоторый репер, то любая плоскость этого пространства является множеством решений некоторой линейной системы.*

Из последних двух теорем следует, что линейное уравнение относительно n неизвестных задает в n-мерном аффинном пространстве некоторую гиперплоскость, и обратно, любая гиперплоскость в n-мерном аффинном пространстве может быть задана линейным уравнением относительно n неизвестных.

Пусть в аффинном пространстве A^n, связанном с векторным пространством V^n, даны две плоскости — Π^k с направляющим пространством V^k, проходящая через точку M_0 и Π^l с направляющим пространством V^l, проходящая через точку N_0. Эти плоскости называются *пересекающимися,* если они имеют хотя бы одну общую точку.

Теорема 2.8. *Плоскости Π^k и Π^l пересекаются тогда и только тогда, когда*

$$\overrightarrow{M_0N_0} \in V^k + V^l,$$

где $V^k + V^l$ — сумма подпространств V^k и V^l, которые являются направляющими пространствами для плоскостей Π^k и Π^l соответственно. Если указанные плоскости пересекаются, то их пересечением является плоскость с направляющим пространством $V^k \cap V^l$.

Теорема 2.9. *Пусть m — размерность пересечения $V^k \cap V^l$ направляющих пространств плоскостей Π^k и Π^l. Если эти плоскости пересекаются, то размерность аффинной оболочки $A(\Pi^k, \Pi^l)$ равна*

$$k + l - m.$$

Если же плоскости не пересекаются, то эта размерность равна

$$k + l - m + 1.$$

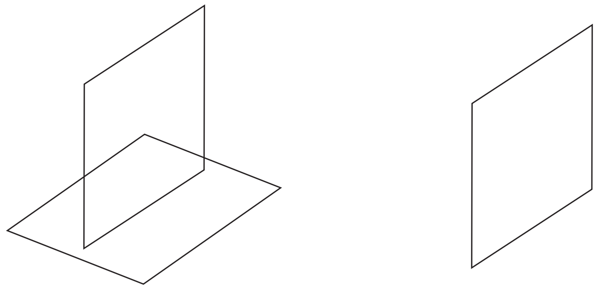
Определение 2.9. Характеристикой пары плоскостей Π^k и Π^l аффинного пространства A^n называется упорядоченный набор чисел (k, l, m, s), где s — размерность аффинной оболочки плоскостей Π^k и Π^l, а m — размерность пересечения их направляющих пространств.

Без ограничения общности можно считать. что $k \leqslant l$. Тогда справедлив следующий набор неравенств:

$$0 \leqslant m \leqslant k \leqslant l \leqslant s \leqslant n.$$

Определение 2.10. Непересекающиеся плоскости Π^k и Π^l с характеристикой (k, l, m, s) называются:

1) параллельными, если $m = k$;
2) частично параллельными, если $0 < m < k$;
3) скрещивающимися, если $m = 0$.



(2,2,2,3) (2,2,1,3) (2,2,2,2)

Рис. 2.1:

На рис. 2.1 показаны все возможные случаи взаимного расположения двух двумерных плоскостей в трехмерном пространстве и указаны соответствующие характеристики.

2.1.4. Аффинные преобразования аффинных n-мерных пространств

Рассмотрим теперь аффинные преобразования, которые действуют в n-мерных аффинных пространствах.

Определение 2.11. Пусть A^n и A^m — аффинные пространства, связанные соответственно с векторными пространствами V^n и V^m над одним и тем же полем P.

Отображение

$$f : A^n \to A^m \tag{1}$$

называется аффинным, если существует линейный оператор

$$\varphi : V^n \to V^m, \tag{2}$$

такой, что

$$\varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{f(M)f(N)} \tag{3}$$

для любых точек $M, N \in A^n$. Отображение φ называется однородной частью отображения f.

Свойства аффинных преобразований, действующих в аффинных пространствах, аналогичны рассмотренным ранее двумерному и трехмерному случаям. Поэтому, в целях экономии, приведем лишь определения и формулировки теорем.

Теорема 2.10. *Для любого линейного оператора (2) и любых двух точек $M \in V^n$, $M_1 \in V^m$ существует единственное аффинное отображение (1) такое, что φ — его однородная часть и $M_1 = f(M)$.*

Теорема 2.11. *Пусть $M_0, M_1, \ldots, M_n$ — система аффино независимых точек пространства A^n, а $N_0, N_1, \ldots, N_n$ — его произвольная система точек. тогда существует единственно отображение (1), удовлетворяющее условиям*

$$f(M_0) = N_0, f(M_1) = N_1, \ldots, f(M_n) = N_n.$$

Определение 2.12. Биективное отображение (1) называется изоморфизмом аффинного пространства A^n на аффинное пространство A^m. Если существует такое отображение, то говорят, что аффинные пространства изорморфны.

Теорема 2.12. *Аффинное отображение (1) является изоморфизмом аффинных пространств A^n и A^m тогда и только тогда, когда его однородная часть (2) является изоморфизмом векторных пространств V^n и V^m.*

Теорема 2.13. *Аффинные пространства, связанные с векторными пространствами над одним и тем же полем, изоморфны тогда и только тогда, когда равны размерности этих аффинных пространств.*

Определение 2.13. Изоморфизм аффинного пространства на себя называется аффинным преобразованием или автоморфизмом этого пространства.

Теорема 2.14. *При аффинном преобразовании аффинного пространства, всякий репер переходит в репер, а образ всякой точки имеет в новом репере те же координаты, какие сама точка имела в старом.*

Теорема 2.15. *Для любых двух реперов I и II аффинного пространства существует единственное аффинное преобразование, переводящее репер I в репер II.*

Теорема 2.16. *Для любых двух систем аффинно независимых точек существует единственное аффинное преобразование, переводящее точки первой системы в точки второй.*

Теорема 2.17. *Множество всех аффинных преобразований аффинного пространства является группой относительно композиции преобразований.*

Определение 2.14. Фигурой в аффинном пространстве называется произвольное множество точек этого пространства.

Определение 2.15. Фигура Φ_1 аффинного пространства называется аффинно эквивалентной фигуре Φ_2 этого же пространства, если существует аффинное преобразование, переводящее фигуру Φ_1 в фигуру Φ_2.

Теорема 2.18. *Аффинная эквивалентность фигур аффинного пространства является отношением эквивалентности на множестве всех фигур этого аффинного пространства.*

Теорема 2.19. *Множество всех фигур аффинного пространства разбивается на непересекающиеся аффинные классы фигур. Любые две фигуры из одного класса аффинно эквивалентны друг другу. Любые две фигуры из разных классов не являются аффинно эквивалентными друг другу.*

Теорема 2.20. *Аффинное преобразование аффинного пространства пе-*

реводит всякую k-мерную плоскость в k-мерную плоскость. Все плоскости в аффинном пространстве, имеющие одинаковую размерность аффинно эквивалентны друг другу и образуют один аффинно эквивалентный класс.

Теорема 2.21. *Множество всех пар плоскостей, имеющих одну и ту же характеристику. образует класс аффинно эквивалентных фигур*

Теорема 2.22. *Любое аффинное преобразование аффинного пространства переводит параллельные прямые в параллельные прямые, а параллельные плоскости в параллельные плоскости.*

Определение 2.16. Три точки $M_1,\ M_2,\ M_3$ аффинного пространства A^n, принадлежащие одной и той же прямой, называются коллинеарными. Число λ такое, что

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \lambda\overrightarrow{M_3M_2},$$

называется простым отношением коллинеарных точек $M_1,\ M_2,\ M_3$ и обозначается $(M_1M_2M_3)$.

Теорема 2.23. *Аффинное преобразование аффинного пространства сохраняет коллинеарность точек и простое отношение тройки коллинеарных точек.*

Определение 2.17. Произвольная пара точек $M_1,\ M_2$ аффинного пространства A^n называется отрезком, а точка M, удовлетворяющая условию

$$\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{MM_2}$$

называется серединой этого отрезка

Определение 2.18. Точка $M \in A^n$ называется центром фигуры Φ, если для всякой точки $M_1 \in \Phi$ существует такая точка $M_2 \in \Phi$, что точка M — середина отрезка M_1M_2.

Теорема 2.24. *Аффинное преобразование аффинного пространства переводит середину любого отрезка в середину преобразованного отрезка, а центр фигуры — в центр преобразованной фигуры.*

2.2. Евклидово точечное пространство

1. Строение евклидова точечного пространства
2. Аффинные преобразования в евклидовых точечных пространствах

2.2.1. Строение евклидова точечного пространства

Пусть задано n-мерное аффинное пространство, связанное с действительным векторным пространством V^n. Если задать на этом векторном пространстве скалярное произведение, то мы превратим его в евклидово пространство. Тогда преобразуется и аффинное пространство — оно станет евклидовым точечным пространством.

Определение 2.19. Аффинное пространство, связанное с евклидовым пространством E^n называется *n-мерным евклидовым точечным пространством* и обозначается $\mathbb{E}^n$.

Определение 2.20. Если в пространстве E^n задан ортонормированный базис $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \ldots, \vec{i}_n$, то репер $O, \vec{i}_1, \vec{i}_2, \ldots, \vec{i}_n$, (где O — произвольная точка пространства $\mathbb{E}^n$) называется *прямоугольной системой координат*, а координаты точек и векторов в таком репере — *прямоугольными.*

Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — координаты точки $M \in \mathbb{E}^n$ в прямоугольной системе координат $O, \vec{i}_1, \vec{i}_2, \ldots, \vec{i}_n$, а $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ — ее координаты в прямоугольной системе координат $O', \vec{i'}_1, \vec{i'}_2, \ldots, \vec{i'}_n$, и $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — координаты точки O' в старой системе, то, воспользовавшись матрицей перехода $C = [c_{ji}]$ от первого базиса ко второму. получим формулы перехода от новых координат к старым:

$$x_1 = c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + \ldots + c_{1n}x'_n + a_1;$$
$$x_1 = c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2 + \ldots + c_{2n}x'_n + a_2;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1 = c_{n1}x'_1 + c_{n2}x'_2 + \ldots + c_{nn}x'_n + a_n.$$

Определение 2.21. *Расстоянием между точками M и N пространства* $\mathbb{E}^n$ называется длина вектора $\overrightarrow{MN}$:

$$\rho(M, N) = \sqrt{\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MN}}.$$

Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — прямоугольные координаты точки M, а $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — прямоугольные координаты точки N, то:

$$\rho(M, N) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}.$$

Поскольку для евклидова точечного пространства справедливы аксиомы аффинного пространства, то в нем существуют плоскости любой размерности k, где $0 \leqslant r \leqslant n$. Плоскости размерности 1 называются прямыми, плоскости размерности $n-1$ называются гиперплоскостями, а плоскости размерности 0 — точками.

Определение 2.22. Пусть Δ_1 и Δ_2 — прямые из пространства $\mathbb{E}^n$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ — их направляющие вектора соответственно. *Углом между прямыми* Δ_1 и Δ_2 называется число φ, определяемое равенством:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1||\vec{a}_2|}.$$

Определение 2.23. Плоскости Π^k и Π^l называются *ортогональными*, если они имеют одну общую точку и каждый вектор из пространства E^k ортогонален каждому из векторов пространства E^l.

Ортогональные плоскости могут иметь только одну общую точку. Действительно, если M и N — различные точки, принадлежащие одновременно двум ортогональным плоскостям Π^k и Π^l. Тогда вектор $\overrightarrow{MN}$ принадлежит двум плоскостям одновременно. Следовательно, $\overrightarrow{MN} \cdot \cdot \overrightarrow{MN} = 0$. Но это невозможно, поскольку вектор $\overrightarrow{MN}$ отличен от нуля.

Определение 2.24. *Ортогональным дополнением* плоскости Π^k из пространства $\mathbb{E}^n$ называется $(n-k)$-мерная плоскость, ортогональная плоскости Π^k.

Теорема 2.25. *Если в пространстве $\mathbb{E}^n$ задана плоскость Π^k, то через каждую точку N этого пространства проходит единственное ортогональное дополнение этой плоскости.*

Всякая гиперплоскость пространства $\mathbb{E}^n$ определяется уравнением первой степени относительно n неизвестных:

$$a_1 x_1 + a_2 + x_2 + \ldots + a_n x_n + a = 0. \qquad (*)$$

С другой стороны, всякому уравнению первой степени относительно n неизвестных в $\mathbb{E}^n$ соответствует некоторая гиперплоскость.

Пусть $N(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — некоторая точка пространства $\mathbb{E}^n$. Рассмотрим прямую Δ, проходящую через точку N и являющуюся ортогональным дополнением для гиперплоскости Π^{n-1}. Эта прямая пересечет гиперплоскость в некоторой точке $P(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$.

Определение 2.25. Расстоянием от точки N до гиперплоскости Π^{n-1} называется длина вектора $\overrightarrow{NP}$.

Если гиперплоскость Π^{n-1} определяется уравнием

$$a_1x_1 + a_2 + x_2 + \ldots + a_nx_n + a = 0,$$

то указанное расстояние вычисляется по формуле

$$\rho(N, \Pi^{n-1}) = \frac{|a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}}.$$

Определение 2.26. Множество всех точек пространства $\mathbb{E}^n$, координаты которых в репере $(M, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ удовлетворяют неравенствам

$$0 \leqslant x_1 \leqslant 1;\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 1, \ldots, 0 \leqslant x_n$$

называется *n-мерным параллелепипедом* в пространстве $\mathbb{E}^n$, построленным на n линейно независимых векторах $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$, отложенных от точки M.

Поставим каждому n-мерному параллелепипеду в соответствие некоторое положительное число, которое по аналогии с трехмерным пространством будем называть *объемом параллелепипеда.*

Пусть параллелепипед построен на линейно независимых векторах (2). Зафиксируем в пространстве $\mathbb{E}^n$ какой-либо ортонормированный базис и разложим по нему каждый из векторов (2). Пусть A — квадратная матрица, определяющая это разложение.

Определение 2.27. *Объемом* n-мерного параллелепипеда, построенного на векторах (2), отложенных от некоторой точки, называется число

$$V(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n) = |detA|.$$

Это число не зависит от выбора ортонормированного базиса.

2.2.2. Аффинные преобразования в евклидовых точечных пространствах

Определение 2.28. Аффинное преобразование f пространства $\mathbb{E}^n$ называется движением этого пространства, если оно не изменяет расстояния между точками, т.е. для любых двух точек M и N из пространства $\mathbb{E}^n$ выполняется

$$\rho(M, N) = \rho(f(M), f(N)).$$

Теорема 2.26. *Аффинное преобразование f пространства $\mathbb{E}^n$ является движением тогда и только тогда, когда его однородная часть φ является ортогональным оператором.*

Поскольку всякое движение пространства $\mathbb{E}^n$ является аффинным преобразованием, то для него справедливы те же формулы перехода для координат:

$$\begin{array}{c} x_1 = a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + \ldots + a_{1n}x'_n + a_1; \\ x_1 = a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + \ldots + a_{2n}x'_n + a_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 = a_{n1}x'_1 + a_{n2}x'_2 + \ldots + a_{nn}x'_n + a_n, \end{array} \tag{$*$}$$

где матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

является матрицей перехода от одного базиса к другому. Поскольку отображение φ является ортогональным и оба базиса являются ортонормированными, то указанная матрица является ортогональной.

С другой стороны, если взять произвольную ортогональную матрицу и некоторый набор чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то можно составить формулы (*), которые зададут движение $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$.

Теорема 2.27. *Множество всех движений пространства $\mathbb{E}^n$ является подгруппой в группе всех аффинных преобразований этого пространства.*

Определение 2.29. Фигура Φ_1 пространства $\mathbb{E}^n$ называется метрически эквивалентной фигуре Φ_2 этого пространства, если существует движение f пространства $\mathbb{E}^n$, переводящее фигуру Φ_1 в фигуру Φ_2.

Теорема 2.28. *Все ортонормированные реперы пространства $\mathbb{E}^n$ образуют один класс метрически эквивалентных фигур.*

Теорема 2.29. *Все k-мерные плоскости пространства $\mathbb{E}^n$ при фиксированном k образуют один класс метрически эквивалентных фигур.*

Рассмотрим движения плоскости $\mathbb{E}^2$ пространства $\mathbb{E}^n$. Поскольку движение сохраняет расстояния, то оно переводит ортонормированный базис в ортонормированный. Формулы перехода от координат в одном ортонормированном базисе к координатам в другом ортонормированном базисе будут иметь вид:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}{x'}_1 + a_{12}{x'}_2 + a_1; \\ x_2 = a_{21}{x'}_1 + a_{22}{x'}_2 + a_2, \end{cases}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

— матрица линейного оператора, которая является ортогональной.

Определение 2.30. Движение плоскости $\mathbb{E}^2$ в случае $|A| > 0$ называется *собственным* и в случае $|A| < 0$ *несобственным.*

Как было показано ранее, преобразование координат в $\mathbb{E}^2$ можно представить в виде

$$\begin{cases} x_1 = {x'}_1 \cos\alpha - {x'}_2 \sin\alpha + a_1; \\ x_2 = {x'}_1 \sin\alpha + {x'}_2 \cos\alpha + a_2, \end{cases} \tag{$*$}$$

Если $\alpha = 0$, то получаем формулы параллельного переноса:

$$\begin{cases} x_1 = {x'}_1 + a_1; \\ x_2 = {x'}_2 + a_2. \end{cases}$$

Если $a_1 = a_2 = 0$, то получаем формулы поворота:

$$\begin{cases} x_1 = {x'}_1 \cos\alpha - {x'}_2 \sin\alpha; \\ x_2 = {x'}_1 \sin\alpha + {x'}_2 \cos\alpha. \end{cases}$$

Теорема 2.30. *Всякое собственное движение плоскости $\mathbb{E}^2$, заданное формулами (*) при $\alpha \neq 0$, является поворотом вокруг некоторой точки.*

Доказательство этой теоремы основано на том, что формулы (*) при указанном условии задают такое движение, которое имеет единственную неподвижную точку (вокруг которой и происходит поворот).

Определение 2.31. Движение плоскости $\mathbb{E}^2$, заданное формулами

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 + a_1; \\ x_2 = -x'_2 \end{cases}$$

называется скользящей симметрией.

Теорема 2.31. *Собственные движения плоскости $\mathbb{E}^2$ исчерпываются поворотами вокруг любой точки и параллельным переносом. Несобственные движения плоскости $\mathbb{E}^2$ совпадают со скользящими симметриями.*

Определение 2.32. Движение пространства $\mathbb{E}^3$, заданное формулами

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 \cos\alpha - x'_2 \sin\alpha; \\ x_2 = x'_1 \sin\alpha + x'_2 \cos\alpha; \\ x_3 = x'_3 \end{cases}$$

называется *поворотом пространства* вокруг оси Ox_3 на угол α.

Определение 2.33. Движение пространства $\mathbb{E}^3$, заданное формулами

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 \cos\alpha - x'_2 \sin\alpha; \\ x_2 = x'_1 \sin\alpha + x'_2 \cos\alpha; \\ x_3 = x'_3 + a_3 \end{cases}$$

называется *винтовым*

Определение 2.34. Движение пространства $\mathbb{E}^3$, заданное формулами

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 + a_1; \\ x_2 = x'_2 + a_2 \\ x_3 = -x'_3 \end{cases}$$

называется *скользящей симметрией.*

Определение 2.35. Движение пространства $\mathbb{E}^3$, заданное формулами

$$\begin{cases} x_1 = {x'}_1 \cos\alpha - {x'}_2 \sin\alpha; \\ x_2 = {x'}_1 \sin\alpha + {x'}_2 \cos\alpha \\ x_3 = -{x'}_3 \end{cases}$$

называется *поворотной симметрией.*

Теорема 2.32. *Всякое движение пространства $\mathbb{E}^3$ есть одно из следующих: параллельный перенос, поворот вокруг прямой, винтовое движение, скользящая симметрия и поворотная симметрия.*

Рассмотрим теперь структуру произвольного аффинного преобразования пространства $\mathbb{E}^n$, т.е. такого преобразования, которое в общем случае расстояния не сохраняет.

Определение 2.36. Аффинное преобразование пространства $\mathbb{E}^n$, заданное в прямоугольной системе координат формулами

$$x_1 = \lambda {x'}_1;\ x_2 = {x'}_2; \ldots, x_n = {x'}_n,$$

называется *сжатием с коэффициентом* λ *к гиперплоскости* с начальной точкой O и направляющим пространством $L(\vec{i}_2, \vec{i}_3, \ldots, \vec{i}_n)$ параллельно вектору $\vec{i}_1$.

Такое преобразование задается матрицей

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Если взять матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — некоторые ненулевые числа, то полученное с помощью этой матрицы преобразование

$$x_1 = \lambda_1 {x'}_1;\ x_2 = \lambda_2 {x'}_2;\ \ldots;\ x_n = \lambda_n {x'}_n$$

естественно называть композицией n сжатий параллельно всем векторам выбранного ортонормированноого базиса.

Теорема 2.33. *Всякое аффинное преобразование пространства* $\mathbb{E}^n$ *является композицией* n *сжатий параллельно* n *попарно ортогональным векторам и движения.*

На примере сжатия пространства $\mathbb{E}^3$ к координатной плоскости, видно, что аффинное преобразование пространства $\mathbb{E}^n$ может сохранять длины одних отрезков и изменять длины других. Однако для объемов всех параллелепипедов существует общее свойство.

Теорема 2.34. *При аффинном преобразовании пространства* $\mathbb{E}^n$ *любой* n*-мерный параллелепипед* Π *переходит в* n*-мерный параллелепипед* Π'. *Отношение объемов этих параллелепипедов не зависит от выбора параллелепипеда* Π.

3. КВАДРИКИ

3.1. Квадрики

1. Определение квадрик
2. Пересечение квадрики с прямой
3. Приведение уравнения квадрики к нормальному виду

3.1.1. Определение квадрик

Рассмотрим n-мерное комплексное аффиное пространство, связанное с комплексным векторным пространством $V^n(\mathbb{C})$. Это пространство состоит из точек, как действительных, так и мнимых. Если в этом пространстве выбрать некоторый репер, то множество векторов из пространства $V^n(\mathbb{C})$, которые в базисе векторов выбранного репера имеют действительные координаты, будут образовывать действительное векторное пространство V^n. Тогда множество точек n-мерного комплексного аффинного пространства, которые в выбранном репере имеют действительные координаты, будет образовывать n-мерное аффинное пространство, связанное с векторным пространством V^n.

Определение 3.1. Комплексное аффинное n-мерное пространство, в котором фиксирован некоторый репер, а, следовательно, и действительное аффинное пространство A^n, будем обозначать $A^n(i)$. Точки пространства $A^n(i)$ будем называть действительными, если они принадлежат пространству A^n и мнимыми в противном случае. Векторы пространства $V^n(\mathbb{C})$ называются действительными, если они принадлежат пространству V^n и мнимыми в противном случае.

Определение 3.2. *Квадрикой* в пространстве $A^n(i)$ называется множество точек, координаты которых в некотором выбранном репере

$$(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$$

удовлетворяют уравнению

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i}^{n} a_ix_i + a = 0,$$

где a_{ij}, a_i, a — действительные числа, причем среди чисел a_{ij} хотя бы одно отлично от нуля и для любых i и j всегда $a_{ij} = a_{ji}$. Указанное уравнение называется уравнением той квадрики, которую оно определяет.

В случае, если рассматриваются действительные точки пространства $A^2(i)$, то квадрики представляют собой не что иное, как линии второго порядка и тогда уравнение квадрики равносильно общему уравнению линии второго порядка:

$$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a = 0$$

или

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a = 0.$$

Несколько иной принцип обозначения для коэффициентов применен с целью уменьшения громоздкости при действиях с квадриками — при его употреблении слагаемые различных степеней можно рассматривать отдельно.

Рассмотрим, например, уравнение

$$x_1^2 + x_2^2 = 0. \tag{*}$$

В ПДСК-2, построенной на репере $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2$ это уравнение определяет единственную точку — $O(0,0)$. Если же рассмотреть квадрику, заданную этим же уравнением в пространстве $A^n(i)$, то ее можно привести к виду

$$(x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) = 0. \tag{**}$$

Полученное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{aligned} &x_1 + ix_2 = 0; \\ &x_1 - ix_2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Эта совокупность в пространстве $A^n(i)$ будет определять две прямые, которые состоят из мнимых точек. Следовательно, получим пару мнимых прямых, пересекающихся в одной действительной точке.

Аналогично, если рассматриваются действительные точки пространства $A^3(i)$, то квадрики представляют собой не что иное, как поверхности второго порядка. Рассмотрим. например. то же самое уравнение (*). В ПДСК-3, построенной на репере $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, это уравнение задает множество всех точек, у которых первая и вторая координаты равны нулю, т.е. координатную ось Ox_3. Квадрика, заданная этим уравнением в пространстве $A^3(i)$, состоит из двух плоскостей, определяемых уравнением (**).

Теорема 3.1. *Для того, чтобы два уравнения*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i}^{n} a_ix_i + a = 0$$

и

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i}^{n} b_ix_i + b = 0$$

задавали в выбранном репере одну и ту же квадрику, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты этих уравнений были пропорциональны, т.е. чтобы существовало такое действительное число λ, что для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ и $j = 1, 2, \ldots, n$ выполнялись бы равенства

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad b_i = \lambda a_i, \quad b = \lambda a.$$

Теорема 3.2. *При аффинном преобразовании пространства $A^n(i)$ любая квадрика преобразуется в квадрику.*

3.1.2. Пересечение квадрики с прямой

Рассмотренные ранее, при изучении общего уравнения линии второго порядка такие понятия, как асимптотическое направление, центр, диаметр, канонический вид, имеют аналоги для квадрики произвольной размерности.

Пусть в пространстве $A^n(i)$ в некотором репере некоторая квадрика задана своим уравнением

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i}^{n} a_ix_i + a = 0$$

и пусть в этом же репере прямая задана своими параметрическими уравнениями некоторая прямая:

$$x_i = b_i + c_it \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Для того, чтобы найти точки пересечения прямой и квадрики, подставим в уравнение квадрики выражения для каждой из переменных из уравнения прямой. После приведения подобных членов относительно параметра t, получаем:

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}c_ic_j\right)t^2 + 2pt + q = 0, \tag{$*$}$$

где

$$p = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_i c_j + \sum_{i=1}^{n} a_i c_i;$$

$$q = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_i c_j + 2 \sum_{i=1}^{n} + a.$$

Найдя корни уравнения (*) и подставив их в параметрические уравнения прямой, найдем координаты всех точек пересечения.

Возможны два случая.

$$1) \sum_{ij}^{n} a_{ij} c_i c_j \neq 0; \quad 2) \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} c_i c_j = 0.$$

В первом случае уравнение (*) квадратное и поэтому получаем три возможности:

а) корни действительны и различны, следовательно, квадрика имеет с прямой две различные точки пересечения;

б) корни совпавшие, следовательно, квадрика и прямая имеют единственную действительную общую точку;

в) нет действительных корней, следовательно, квадрика и прямая не имеют действительных точек пересечения, но зато имеют две мнимые общие точки.

Во втором случае уравнение (*) является линейным и поэтому снова получаем три возможности:

а) $p \neq 0$ — уравнение (*) линейное, следовательно, прямая и квадрика имеют единственную общую точку;

б) $p = 0, \quad q \neq 0$ — уравнение (*) не имеет решений. следовательно. прямая и квадрика не пересекаются;

в) $p = 0, \quad q = 0$ — уравнение (*) имеет бесконечное множество решений, следовательно, любая точка прямой принадлежит квадрике, т.е. вся прямая принадлежит квадрике.

Определение 3.3. Направление вектора $\vec{c}(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ называется *асимптотическим* относительно квадрики

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i}^{n} a_i x_i + a = 0,$$

если

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} c_i c_j = 0.$$

Теорема 3.3. *Асимптотическое направление относительно квадрики не зависит от выбора репера.*

Теорема 3.4. *Пусть вектор $\vec{c}$ имеет асимптотическое (неасимптотическое) направление относительно квадрики K и f — аффинное преобразование пространства $A^n(i)$ с однородной частью φ. Тогда вектор $\varphi(\vec{c})$ имеет асимптотическое (неасимптотическое) направление относительно квадрики $f(K)$.*

Теорема 3.5. *Пусть в пространстве $A^n(i)$ заданы квадрика K, прямая Π и аффинное преобразование f. тогда прямая $f(\Pi)$ имеет относительно квадрики $f(K)$ тот же тип, что и прямая Π относительно квадрики K.*

Теорема 3.6. *Существует n линейно независимых векторов, имеющих неасимптотические относительно заданной квадрики направления.*

Предположим, что точка $B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ — центр квадрики

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i}^{n} a_i x_i + a = 0.$$

Тогда можно показать, что координаты точки B удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + a_1; \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + a_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + a_n. \end{cases}$$

Оказывается, что верно и обратное: любая точка, координаты которой удовлетворяют этой системе, будет являться центром данной квадрики. Поскольку указанная система линейная, то существуют три возможности:

а) система не имеет решений и поэтому квадрика не имеет центра;

б) система имеет единственное решение и поэтому квадрика имеет единственный центр;

в) система имеет бесконечное множество решений и поэтому квадрика имеет бесконечное множество центров.

В последнем случае множество центров образует некоторую плоскость в пространстве $A^n(i)$. Например, в пространстве $\mathbb{E}^2$ существует квадрика у которой бесконечное множество центров — это две действительные параллельные прямые. Множество центров этой квадрики действительно образует плоскость, которая для пространства $\mathbb{E}^2$ является прямой.

Определение 3.4. Квадрика, имеющая единственный центр называется *центральной.*

Определение 3.5. Отрезок MN, определяемый двумя точками, принадлежащими квадрике, называется *хордой* этой квадрики.

Теорема 3.7. *Множество середин хорд, отсекаемых квадрикой*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i}^{n} a_ix_i + a = 0.$$

на всех параллельных прямых с направляющим вектором

$$\vec{c}(c_1, c_2, \ldots, c_n),$$

имеющим неасимптотическое направление, является гиперплоскостью, определяемой уравнением

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}c_ix_j + \sum_{i=1}^{n} a_ic_i = 0. \qquad (*)$$

Определение 3.6. Гиперплоскость, определяемая уравнением (*) называется *диаметральной плоскостью квадрики,* сопряженной с направлением указанного вектора.

3.1.3. Приведение уравнения квадрики к нормальному виду

Пусть в пространстве $A^n(i)$ выбран некоторый репер и в нем квадрика задана уравнением

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a = 0.$$

Так же как и для общего уранения линии второго порядка, можно найти такое преобразование координат, которое упростит это уравнение квадрики. Действительно, как известно из курса линейной алгебры, существует преобразование координат

$$x_1 = a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + \ldots + a_{1n}x'_n;$$
$$x_2 = a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + \ldots + a_{2n}x'_n;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = a_{n1}x'_1 + a_{n2}x'_2 + \ldots + a_{nn}x'_n,$$

которое приводит квадратичную форму

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

к нормальному виду

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (x'_1)^2,$$

где $\varepsilon_i = \pm; 0$. Тогда уравнение квадрики в новых кооддинатах будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (x'_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a'_i x'_i + a = 0.$$

Если для некоторого i, $\varepsilon_i \neq 0$, то с помощью преобразования координат можно исключить член с первой степенью переменной x_i :

$$\varepsilon_i x_i^2 + 2a'_i x'_i = \varepsilon_i \left(x'_i + \frac{a'_i}{\varepsilon_i} \right)^2 - \frac{(a'_i)^2}{\varepsilon_i}.$$

Теперь осталось выполнить преобразование координат по формулам:

$$x''_i = x'_i + \frac{a'_i}{\varepsilon_i}; \quad x''_j = x'_j, \quad j \neq i.$$

Такое преобразование называется *параллельным переносом репера.*

Таким образом мы исключим первую степень у переменной x_i, коэффициент при ее квадрате сохранится, а свободный член получит дополнительное слагаемое. Совершим эти преобразования со всеми переменными. Затем перенумеруем в полученном уравнении переменные так, чтобы

$$\varepsilon \neq 0;\ \varepsilon_2 \neq 0,\ \ldots,\ \varepsilon_k \neq 0;\ \varepsilon_{k+1} = 0;\ \ldots,\ \varepsilon_n = 0.$$

Тогда уравнение квадрики можно привести к виду

$$\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i (x''_i)^2 + 2 \sum_{i=r+1}^{n} a'_i x'_i + b = 0.$$

Пусть $a'_{r+1} = a'_{r+2} = \ldots = a'_n = 0$, т.е. последнее уравнение имеет вид

$$\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i (x''_i)^2 + b = 0.$$

Если $b \neq 0$, то его можно преобразовать к виду

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i^2 = 1;\quad \lambda = \pm 1;\quad 0 < r \leqslant n. \tag{$*$}$$

Если $b = 0$, то рассматриваемое уравнение принимает вид

$$\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i (x''_i)^2 = 0;\quad \varepsilon_i = \pm 1;\quad 0 < r \leqslant n. \tag{$**$}$$

Пусть теперь среди коэффициентов a'_i есть отличные от нуля. Например, $a'_{r+1} \neq 0$. Тогда рассматриваемое уравнение можно привести к виду

$$\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i X_i^2 = 2X_{r+1};\quad 0 < r \leqslant n. \tag{$***$}$$

Определение 3.7. Уравнения (*), (**), (***) называются *нормальными уравнениями квадрик* в пространстве $A^n(i)$.

Теорема 3.8. *Любая квадрика пространства $A^n(i)$ в подходящем репере может быть задана нормальным уравнением.*

Теорема 3.9. *Для того, чтобы в уравнении квадрики отсутствовали члены с первыми степенями, необходимо и достаточно, чтобы начало координат являлось центром квадрики.*

3.2. Аффинная классификация квадрик

1. Отношение эквивалентности на множестве всех квадрик

2. Аффинная классификация линий 2-го порядка на комплексной аффинной плоскости

3. Аффинная классификация поверхностей 2-го порядка в комплексном аффинном пространстве

3.2.1. Отношение эквивалентности на множестве всех квадрик

Введенные выше нормальные уравнения квадрик пространства $A^n(i)$ имеют вид:

$$-x_1^2 - \ldots - x_k^2 + x_{r+1}^2 + \ldots + x_r^2 = 1, \ \ 0 < r \leqslant n, \ k \geqslant 0, \qquad (1)$$

$$-x_1^2 - \ldots - x_k^2 + x_{r+1}^2 + \ldots + x_r^2 = 0, \ \ 0 < r \leqslant n, \ 0 < k \leqslant \frac{r}{2}, \qquad (2)$$

$$-x_1^2 - \ldots - x_k^2 + x_{r+1}^2 + \ldots + x_r^2 = 2x_{r+1}, \ \ 0 < r < n, \ 0 < k \geqslant \frac{r}{2}. \qquad (3)$$

Пусть квадрика Φ_1 задана в репере I уравнением (1), а квадрика Φ_2 — в репере II тем же уравнением (с теми же r и k). Рассмотрим аффинное преобразование пространства $A^n(i)$, которое переводит репер I в репер II. Тогда квадрика Φ_1, как множество точек, удовлетворяющих уравнению (1), перейдет в квадрику Φ_2, как множество точек, удовлетворяющих тому же уравнению. То же самое произойдет, если взять пару квадрик, которые обе будут удовлетворять уравнению (2), либо уравнению (3).

Пусть теперь две квадрики Φ_1 и Φ_2 заданы соответственно уравнениями

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_ix_i + a = 0, \qquad (3)$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a'_{ij}x'_ix'_j + 2\sum_{i=1}^{n} a'_ix'_i + a' = 0. \qquad (4)$$

Пусть существует некоторое аффинное преобразование f, которое переводит квадрику (3) в квадрику (4) и действует по формулам

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x'_j + \alpha_i \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Подставив эти формулы в уравнение (3), мы получим выражение, левая часть которого будет отличаться от левой части (4) только постоянным действительным множителем $b \neq 0$, а квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j \tag{5}$$

преобразуется в квадратичную форму

$$b \sum_{i,j=1}^{n} a'_{i,j} x'_i x'_j, \tag{6}$$

в которой коэффициенты $a'_{i,j}$ не зависят от коэффициентов α_i, т.е. переход от формы (5) к форме (6) совершается с помощью преобразования координат по формулам

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} x'_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

с последующим умножением на действительное число $b \neq 0$.

Квадрика (3) не может быть получена ни из (1), ни из (2), поскольку она отличается от них отсутствием центров. Кроме того, поскольку любой центр квадрики (2) принадлежит ей, а у квадрики (1) такого свойства нет, то и эти квадрики не могут быть преобразованы друг в друга.

Изложенные рассуждения позволяют сформулировать следующую теорему

Теорема 3.10. *Множество всех квадрик пространства $A^n(i)$ разбивается на классы таким образом, что к одному классу относятся все квадрики, которые задаются в подходящих реперах одним и тем же нормальным уравнением. Квадрики, принадлежащие одному классу аффинно эквивалентны. Квадрики принадлежащие разным классам аффинно эквивалентными не являются, т.е. не могут переводиться друг в друга с помощью аффинных преобразований пространства $A^n(i)$.*

3.2.2. Аффинная классификация линий второго порядка на комплексной аффинной плоскости

Любая линия второго порядка на плоскости $A^2(i)$ в подходящем репере может быть задана нормальным уравнением. Таким образом, множество всех линий второго порядка на плоскости $A^2(i)$ распадается на непересекающиеся классы. Линии, принадлежащие одному классу, задаются в подходящих реперах одним и тем же нормальным уравнением. Кроме того, каждая из этих линий может быть переведена в другую с помощью некоторого аффинного преобразования. Для двух линий из разных классов не существует аффинного преобразовани, которое переводит одну из них в другую.

Рассмотрим все возможные виды нормальных уравнений линий второго порядка на комплексной аффинной плоскости:

$$x_1^2 + x_2^2 = 1, \tag{1}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = -1, \tag{2}$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 1, \tag{3}$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 0, \tag{4}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 0, \tag{5}$$

$$x_1^2 = 2x_2, \tag{6}$$

$$x_1^2 - 1 = 0, \tag{7}$$

$$x_1^2 + 1 = 0, \tag{8}$$

$$x_1^2 = 0. \tag{9}$$

На плоскости $A^2(i)$ множество действительных точек образует плоскость E^2. Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{10}$$

на плоскости E^2 определяет некоторый эллипс. Совершив переход к аффинной системе координат Ox_1x_2 по формулам $x = ax_1;\quad y = bx_2$ и подставив их в уравнение (10), получим уравнение

$$x_1 + x_2 = 1.$$

Следовательно, эллипс (10) в подходящей системе координат задается уравнением (1). Несмотря на то, что на плоскости $A^2(i)$ уравнение (1) определяет кроме действительных точек еще и мнимые (например,

$M(i, \sqrt{2})$, можно показать, что и на плоскости $A^2(i)$ это уравнение определяет эллипс.

Уравнению (2) в плоскости E^2 не удовлетворяет ни одна точка, т.е. данное уравнение в этой плоскости определяет пустое множество. Однако, в плоскости $A^2(i)$ есть мнимые точки, которые уравнению (2) удовлетворяют. Такой точкой будет, например, $M(2i, \sqrt{3})$. Линия второго порядка, определяемая на плоскости $A^2(i)$ уравнением (2), называется мнимым эллипсом.

Аналогично уравнению (1) исследуется уравнение (3). С помощью того же преобразования координат, мы получим, что определяемая этим уравнением линия состоит из обычной гиперболы и некоторого множества мнимых точек. Эта линия называется гиперболой.

На плоскости E^2 уравнение (4) задает пару обычных пересекающихся прямых:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 & = & 0, \\ x_1 + x_2 & = & 0. \end{array}\right.$$

Их точкой пересечения является начало координат. На плоскости $A^2(i)$ к ним добавляются мнимые точки, заданные этими же уравнениями.

Уравнение (5) на плоскости E^2 задает единственную точку — начало координат, а на плоскости $A^2(i)$ — пару мнимых прямых:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 - ix_2 & = & 0, \\ x_1 + ix_2 & = & 0. \end{array}\right.$$

Уравнение (6) на плоскости E^2 определяет параболу. На плоскости $A^2(i)$ она дополняется мнимыми точками. Полученная линия второго порядка так же называется параболой.

Уравнение (7) в плоскости E^2 определяет пару параллельных прямых. Эти прямые в плоскости $A^2(i)$ пополняются мнимыми точками.

Уравнение (8) в плоскости E^2 определяет пустое множество. Если же представить это уравнение в виде

$$(x_1 - i)(x_1 + i) = 0,$$

то становится очевидно, что на плоскости $A^2(i)$ мы получаем пару мнимых параллельных прямых.

Уравнение (9) определяет на E^2 прямую. Эта прямая называется совпавшей, поскольку степень уравнения равна 2. На $A^2(i)$ эта прямая пополняется мнимыми точками и имеет такое же название.

3.2.3. Аффинная классификация поверхностей второго порядка в комплексном аффинном пространстве

Любая поверхность второго порядка в пространстве $A^3(i)$ может быть задана в некотором подходящем репере нормальным уравнением. Рассмотрим все возможные виды таких уравнений:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \tag{1}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1, \tag{2}$$

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1, \tag{3}$$

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1, \tag{4}$$

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0, \tag{5}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \tag{6}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 2x_3, \tag{7}$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 2x_3, \tag{8}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 1, \tag{9}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = -1, \tag{10}$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 1, \tag{11}$$

$$x_1^2 = 2x_2, \tag{12}$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 0, \tag{13}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 0, \tag{14}$$

$$x_1^2 - 1 = 0, \tag{15}$$

$$x_1^2 + 1 = 0, \tag{16}$$

$$x_1^2 = 0. \tag{17}$$

Множество поверхностей второго порядка в комплексном аффинном пространстве $A^3(i)$ распадается на непересекающиеся классы. Поверхности, принадлежащие одному классу задаются в подходящих реперах одним и тем же нормальным уравнением. Каждая из этих поверхностей может быть переведена в другую поверхность того же класса с помощью некоторого аффинного преобразования. С другой стороны, поверхность одного класса не может быть переведена в поверхность другого класса никаким аффинным преобразованием.

Если рассмотреть точечное трехмерное евклидово пространство E^3 как множество действительных точек пространства $A^3(i)$, то можно выяснить отношение различных поверхностей второго порядка к аффинным классам, которые определяют уравнения (1)-(17).

Поскольку произвольный эллипсоид задается в подходящей прямоугольной системе координат $Oxyz$ уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

то, совершив переход к аффинной системе координат $Ox_1x_2x_3$ по формулам $x = ax_1, \quad y = by_1, \quad z = cz_1$, мы получим уравнение (1). Следовательно, рассматриваемая поверхность второго порядка, определяемая уравнением (1) включает в себя эллипсоид в качестве множества действительных точек. Кроме этого, эта поверхность содержит и мнимые точки.

Поверхности второго порядка в пространстве $A^3(i)$, заданные в подходящей системе координат уравнением (1), называются эллипсоидами. Поверхность, заданная уравнением (2), называется мнимым эллипсоидом.

Уравнение (3) в точечном евклидовом трехмерном пространстве задает однополостный гиперболоид. Уравнение (4) в этом пространстве задает двуполостный гиперболоид. В комплексном аффинном трехмерном пространстве, эти поверхности дополняются мнимыми точками. В пространстве E^3 однополостный гиперболоид содержит два семейства прямолинейных образующих, одно из которых задается системой

$$\begin{cases} \lambda(x_1 - x_3) & = & \mu(1 - x_2), \\ \mu(x_1 + x_3) & = & \lambda(1 + x_2). \end{cases}$$

Двуполостный гиперболоид (4) в пространстве E^3 не содержит прямых, однако в пространстве $a^3(i)$ он имеет мнимые прямые:

$$\begin{cases} \lambda(x_1 - x_3) & = & \mu(i - x_2), \\ \mu(x_1 + x_3) & = & \lambda(i + x_2). \end{cases}$$

Уравнение (5) задает конус. В пространстве E^3 он образован действительными прямыми, содержащими только действительные точки и проходящими через начало координат. В пространстве $a^3(i)$ конус (5) состоит из тех же прямых, но расширенных за счет их мнимых точек. похожее на (5) уравнение (6) определяет в пространстве E^3 единственную точку $O(0, 0, 0)$. Поверхность. заданная уравнением (6) в пространстве $A^3(i)$ состоит из мнимых прямых, пересекающихся в действительной точке $O(0,0,0)$. Она называется мнимым конусом.

Уравнения (7) и (8) задают соответственно эллиптический и гиперболический параболоиды. Относительно прямолинейных образующих спарведливы те же замечания, что и для поверхностей (3) и (4).

Уравнение (9) задает эллиптический цилиндр. В пространстве E^3 он состоит из действительных прямых:

$$\begin{cases} \lambda x_1 &= \mu(1-x_2), \\ \mu x_1 &= \lambda(1+x_2), \end{cases}$$

параллельных оси Ox_3 и проходящих через точки эллипса:

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2 &= 1, \\ x_3 &= 0. \end{cases} \tag{18}$$

В пространстве $A^3(i0$ эллиптический цилиндр (9) состоит из всех прямых, параллельных оси Ox_3 и проходящих через действительные и мнимые точки эллипса (18).

Поверхность (10) не содержит ни одной действительной точки, однако в пространстве $A^3(i)$ она состоит из мнимых прямых:

$$\begin{cases} \lambda x &= \mu(i-x_2), \\ \mu x_1 &= \lambda(i+x_2), \end{cases}$$

параллельных оси Ox_3 и проходящих через точки мнимого эллипса:

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2 &= -1, \\ x_3 &= 0. \end{cases}$$

Поверхность (10) в пространстве $A^3(i)$ называется мнимым эллиптическим цилиндром.

Уравнения (11) и (12) задают соответственно гиперболический и параболический цилиндры. Первая из этих поверхностей имеет прямую (ось Ox_3), состоящую из центров цилиндра. Поверхность (12) центров не имеет.

Уравнение (13) задает в пространстве E^3 пару плоскостей:

$$\begin{cases} x_1-x_2 &= 0, \\ x_1+x_2 &= 0, \end{cases}$$

пересекающихся по оси Ox_3. В пространстве $A^3(i)$ эти плоскости пополняются мнимыми точками. Уравнение (14) задает в пространстве E^3 прямую (ось Ox_3). В пространстве $a^3(i)$ поверхность (14) состоит из двух мнимых плоскостей:

$$\begin{cases} x_1 - ix_2 &= 0, \\ x_1 + ix_2 &= 0, \end{cases}$$

пересекающихся по действительной прямой (оси Ox_3).

Уравнение (15) задает пару параллельных плоскостей:

$$\begin{cases} x_1 - 1 &= 0, \\ x_1 + 1 &= 0, \end{cases}$$

Уравнение (16) задает пару мнимых параллельных плоскостей:

$$\begin{cases} x_1 - i &= 0, \\ x_1 + i &= 0, \end{cases}$$

Уравнение (17) задает сдвоенную плоскость.

4. ПРОЕКТИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО

4.1. Проективное пространство

1. Определение проективного пространства

2. Координаты в проективном пространстве

3. Плоскости в проективном пространстве, проективная группа

4. Класс проективное эквивалентных фигур, сложное отношение четырех точек

4.1.1. Определение проективного пространства

Пусть V^{n+1} — некоторое $n+1$-мерное векторное пространство над полем F. В этом пространстве рассмотрим множество, элементами которого являются одномерные подпространства.

Определение 4.1. Множество P^n одномерных подпространств векторного пространства V^{n+1} называется n-мерным проективным пространством, связанным с пространством V^{n+1}. Элементы пространства P^n называются точками.

Определение 4.2. Пусть $k < n$. Множество одномерных подпространств $(k+1)$-мерного подпространства V^{k+1} пространства V^{n+1} называется k-мерной плоскостью пространства P^n. Одномерные плоскости называются прямыми, а $(n-1)$-мерные — гиперплоскостями пространства P^n.

Каждая k-мерная плоскость проективного пространства P^n является k-мерным проективным пространством, связанным с линейным пространством V^{k+1}.

Пусть A^{n+1} — некоторое $(n+1)$-мерное аффинное пространство, связанное с линейным пространством V^{n+1}. Зафиксируем некоторую точку O в пространстве A^{n+1} и рассмотрим множество векторов у которых началами является точка O, а концами — все точки пространства A^{n+1}. Это множество векторов будет совпадать с пространством V^{n+1}. Точки пространства P^n будут изображаться проходящими через точку O прямыми пространства A^{n+1}, а k-мерные плоскости пространства P^n будут изображаться $k+1$-мерными плоскостями пространства A^{n+1}, проходящими через точку O. Таким образом, можно , используя аффинное пространсво, построить проективное пространство.

Можно установить так же связь между пространствами P^n и A^n. Для этого нужно представить пространство P^n в виде множества прямых пространства A^{n+1}, которые походят через некоторую фиксированную точку O. Зафиксируем в пространстве P^n какую-либо гиперплоскость P^{n+1}. Пусть A^n — гиперплоскость пространства A^{n+1}, которая является изображением гиперплоскости P^{n-1}. Возьмем в пространстве A^{n+1} какую-либо гиперплоскость B, параллельную гиперплоскости A^n. Построим отображение множества $P^* = P^n \setminus P^{n-1}$ всех точек проективного пространства P^n, не принадлежащих гиперплоскости P^{n-1} на n-мерное аффинное пространство B. Пусть произвольная точка $M \in P^*$ изображается прямой a пространства A^{n+1}, проходящей через точку O. Поскольку точка M не принадлежит гиперплоскости P^{n-1} пространства P^n, то изображающая ее прямая a не принадлежит гиперплоскости A^n пространства A^{n+1}. Поэтому прямая a пересекает гиперплоскость B в некоторой точке M_1. Рассмотрим теперь отображение

$$\rho : P^* \to B,$$

которое ставит в соответствие произвольной точке $M \in P^* = P^n \setminus P^{n-1}$ построенную выше точку M_1.

Определение 4.3. Пара (B, ρ), состоящая из n-мерного аффинного пространства B и отображения ρ, называется аффинной картой проективного пространства P^n, а точка $M_1 = \rho(M)$ — изображением точки M на карте (B, ρ). Точки гиперплоскости P^{n-1} называются несобственными точками пространства P^n по отношению к карте (B, ρ), остальные точки пространства P^n — собственными, а сама эта гиперплоскость — несобственной.

4.1.2. Координаты в проектиивном пространстве

Пусть P^n — n-мерное проективное пространство, связанное с линейным пространством V^{n+1} над полем F. Рассмотрим отображение

$$\pi : V^{n+1} \setminus O \to P^n,$$

ставящее в соответствие произвольному ненулевому вектору $\vec{x} \in V^{n+1}$ одномерное подпространство $V = \{\lambda\vec{x} | \lambda \in F\}$.

В пространстве V^{n+1} выберем какой-либо базис

$$\vec{e}_0, \vec{e}_1, \ldots \vec{e}_n. \tag{1}$$

Определение 4.4. Однородными координатами точки $M \in P^n$ в базисе (1) называются координаты любого ненулевого вектора $\vec{x} \in V^{n+1}$, такого, что $\pi(\vec{x}) = M$.

Таким образом, однородные координаты точки M в базисе (1) — это коэффициенты

$$x_0, x_2, \ldots x_n \tag{2}$$

в разложении

$$\vec{x} = \sum_{i=0}^{n} x_i \vec{e}_i.$$

Однородные координаты фиксированной точки M определены неоднозначно. Если задан какой-либо набор (2) однородных координат точки M, являющийся набором координат вектора $\vec{x} \in V^{n+1}$ такого, что $\pi(\vec{x}) = M$, то однородными координатами точки M будут так же координаты

$$y_0, y_1, \ldots, y_n \tag{3}$$

любого вектора $\vec{y} \in V^{n+1}$, такого, что $\pi(\vec{y}) = \pi(\vec{x}) = M$. Это равносильно тому, что существует некоторое ненулевое число $\lambda \in F$ такое, что

$$y_i = \lambda x_i, i = 0, 1, \ldots, n \tag{4}$$

Таким образом, при данном базисе (1) каждой точке M ставится в соответствие в качестве однородных координат любой из множества всех пропорциональных ненулевых наборов из поля F, т.е. набор (3) с условием (4). С другой стороны, для любого ненулевого набора (3) чисел из поля F существует ненулевой вектор $\vec{x} \in V^{n+1}$ с координатами (3), а значит и точка $M \in P^n$ с однородными координатами (3).

Строки чисел (3), взятые из поля F образуют линейное пространство F^{n+1}. Введем в этом пространстве отношение эквивалентности, считая эквивалентными строки (3) с условием (4). Множество всех различных классов обозначим через PF^n.

Задание в проективном пространстве P^n, связанном с линейным пространством V^{n+1} над полем F, однородных координат с помощью базиса (1) позволяет рассмотреть биективное отображение

$$\varphi : P^n \to PF^n,$$

которое ставит в соответствие каждой точке $M \in P^n$ класс пропорциональных строк чисел, являющихся однородными координатами точки M.

Определение 4.5. Множество PF^n называется арифметической моделью проективного пространства P^n или n-мерным арифметическим проективным пространством над полем F.

4.1.3. Плоскости в проективном пространстве, проективная группа

Рассмотрим проективное пространство P^n как множество прямых аффинного пространства A^{n+1}, проходящих через фиксированную точку $O \in A^{n+1}$. Поскольку, как было уже установлено, k-мерная плоскость пространства P^n изображается в пространстве $A^n + 1 \quad (k+1)$-мерной плоскостью, проходящей через точку O. Поэтому каждому утверждению, относящемуся к плоскостям пространства A^{n+1}, проходящим через точку O, соответствует утверждение, относящееся к плоскостям пространства P^n. Рассмотрим некоторые из них.

Теорема 4.1. *Для любого непустого множества Ω точек пространства P^n существует единственная плоскость $P(\Omega)$, удовлетворяющая условиям:*

1) $\Omega \subset P(\Omega)$;

2) любая плоскость, содержащая множество Ω, содержит плоскость $P(\Omega)$.

Определение 4.6. Проективной оболочкой непустого множества Ω точек пространства P^n называется плоскость $P(\Omega)$.

Для любого непустого множества Ω точек пространства P^n существует единственная проективная оболочка, которая задается формулой

$$P(\Omega) = \pi(A(\pi^{-1}(\Omega))),$$

где π — это отображение, которое каждой точке N пространства A^{n+1}, отличной от точки O ставит в соответствие точку пространства P^n, изображаемую прямой ON.

Определение 4.7. Точки

$$M_0, M_1, \ldots, M_k \tag{1}$$

проективного пространства P^n называются проективно независимыми, если их проективная оболочка является k-мерной плоскостью.

Теорема 4.2. *Точки (1) пространства P^n проективно независимы тогда и только тогда, когда в пространстве A^{n+1} существуют точки*

$$N_0, N_1, \dots, N_k, \tag{2}$$

такие, что $M_i = \pi(N_i),\ i = 1, 2, \dots, k$ и точки

$$O, N_0, N_1, \dots, N_k \tag{3}$$

аффинно независимы или, иначе, векторы

$$\overrightarrow{ON_0}, \overrightarrow{ON_1}, \dots, \overrightarrow{ON_k}$$

Теорема 4.3. *Через любые $k+1$ проективно независимые точки пространства P^n проходит единственная k-мерная плоскость. Во всякой k-мерной плоскости есть $k+1$ и нет более $k+1$ проективно независимых точек. Любую систему проективно независимых точек, лежащих в k-мерной плоскости можно дополнить до системы, сосотоящей из $k+1$ проективно независимых точек, лежащих в этой плоскости.*

Всякая плоскость A^{k+1} является множеством точек, которые определяются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} ca_{00}x_0 + a_{01}x_2 + \ldots + a_{0n}x_n = 0; \\ a_{10}x_1 + a_{11}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-k}x_1 + a_{n-k}x_2 + \ldots + a_{n-k}x_n = 0. \end{cases} \tag{4}$$

С другой стороны, любая система вида (4) задает плоскость в пространстве A^{n+1}. Будем говорить, что плоскость P^k задается в однородных координатах системой (4), если координаты любой точки этой плоскости образуют решение системы (4) и, с другой стороны, любое ненулевое решение системы 4 представляет координаты некоторой плоскости.

Теорема 4.4. *Любая плоскость пространства P^n задается в однородных координатах системой (4) и, обратно, любая система (4) задает плоскость пространства P^n.*

Теорема 4.5. *Если две плоскости проективного пространства пересе-*

каются, то их пересечением является плоскость.

Определение 4.8. Характеристикой пары плоскостей P^k и P^l, $k \leqslant l$ проективного пространства P^n называется упорядоченный набор чисел (k, l, m, s), где s — размерность проективной оболочки множества $P^k \cup \cup P^l$; m — размерность плоскости $P^k \cap P^l$, если это пересечение — непустое множество и $m = -1$, если оно пусто.

Теорема 4.6. *Для любой характеристики* (k, l, m, s) *имеют место следующие соотношения:*

$$-1 \leqslant m \leqslant k \leqslant s \leqslant n; \quad 0 \leqslant k; \tag{5}$$

$$s = k + l - m. \tag{6}$$

Для любого набора целых чисел (m, k, l, s, n)*, удовлетворяющих соотношениям (5) и (6), в пространстве* P^n *существует пара плоскостей* P^k, P^l *с характеристикой* (k, l, m, s).

Определение 4.9. Репером проективного пространства P^n называется упорядоченная система точек

$$M_0, M_1, \ldots, M_{n+1} \tag{7}$$

этого пространства такая, что любые $n + 1$ из этих точек проективно независимы.

Теорема 4.7. *Любую систему*

$$M_0, M_1, \ldots, M_k$$

проективо независимых точек пространства P^n *можно дополнить до репера этого пространства.*

Теорема 4.8. *Пусть в пространстве* P^n *задан репер (7). Тогда найдется единственная система однородных координат, в которой точки (7) имеют следующие координаты:*

$$M_0(1, 0, \ldots, 0, 0); M_1(0, 1, \ldots, 0, 0); \ldots;$$
$$\ldots; M_n(1, 0, \ldots, 0, 1); M_{n+1}(1, 1, \ldots, 1, 1).$$

Задание репера в проективном пространстве P^n приводит к однозначно определенной системе однородных координат. Однородные координаты точки $M \in P^n$ в этой системе координат называются так же координатами относительно соответствующего репера.

Рассмотрим проективное пространство P^n одномерных подпространств линейного пространства V^{n+1} над полем F. Пусть f — автоморфизм пространства V^{n+1}. Так как при автоморфизме f одномерные подпространства V^{n+1} переходят в одномерные подпространства, то в пространстве P^n индуцируется преобразование $\tilde{f}$.

Определение 4.10. Преобразование $\tilde{f} : P^n \to P^n$, индуцированное автоморфизмом f пространства V^{n+1}, называется проективным преобразованием, порожденным автоморфизмом f.

Пусть задан базис

$$\vec{e}_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n \tag{8}$$

пространства V^{n+1}. При любом автоморфизме, координаты $x_0, x_1, \ldots, x_n$ вектора $\vec{x} \in V^{n+1}$ связаны с координатами $x'_0, x'_1, \ldots, x'_n$ образа этого вектора при автоморфизме f формулами:

$$x'_i = \sum_{j=0}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

$det[a_{ij}] \neq 0$. Рассмотрим в проективном пространстве точку $M = \pi(\vec{x})$, т.е. одномерное подпространство пространства V^{n+1}, порожденное вектором $\vec{x}$ (его можно описать так: $\{\lambda\vec{x} | \lambda \in F\}$. Однородные координаты этой точки относительно базиса (8) равны координатам вектора $\vec{x}$ или оюбого вектора $\alpha\vec{x}$, где α — отличное от нуля число из поля F. Аналогично однородными координатами точки $\tilde{f}(M)$ относительно того же базиса являются координаты вектора $f(\vec{x})$. Следовательно, однородные координаты $x - 0, x_1, \ldots, x_n$ точки M связаны с однородными координатами $x'_0, x'_1, \ldots, x'_n$ образа этой точки при проективном преобразовании $\tilde{f}$ формулами

$$\lambda x'_i = \sum_{j=0}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{9}$$

где $det[a_{ij}] \neq 0$, а λ — произвольное, ненулевое число из поля F.

С другой стороны, любое преобразование проективного пространства, заданное формулами (9), является проективным. Из этих формул так же видно, что если два автоморфизма f_1 и f_2 связаны равенством $f_2 = \lambda f_1$, то они индуцируют одно и то же проективное преобразование.

Теорема 4.9. *Множество всех проективных преобразований проективного пространства P^n, которое обозначается $G(P^n)$ является группой относительно композиции преобразований.*

Определение 4.11. Группа $G(P^n)$ всех проективных преобразований проективного пространства P^n называется проективной группой.

4.1.4. Класс проективное эквивалентных фигур, сложное отношение четырех точек

Определение 4.12. Фигурой в пространстве P^n называется произвольное множество точек этого пространства. Две фигуры в пространстве P^n называются проективно эквивалентными, если существует проективное преобразование, переводящее одну из этих фигур в другую.

Теорема 4.10. *Все реперы пространства P^n образуют класс проективно эквивалентных фигур. Для любых двух реперов существует единственное проективное преобразование $\tilde{f}$, переводящее первый репер во второй. При этом произвольная точка M, которая имеет в первом репере координаты $x_0, x_1, \dots, x_n$, переходит в точку $\tilde{f}(M)$, которая вовтором репере имеет координаты $\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n$.*

Теорема 4.11. *Для данного $k \quad (0 \leqslant k \leqslant n)$ все k-мерные плоскости образуют класс проективно эквивалентных фигур.*

Теорема 4.12. *Все пары плоскостей пространства P^n, которые имеют одну и ту же характеристику, образуют класс проективно эквивалентных фигур.*

Теорема 4.13. *Множество всех проективных преобразований проективного пространства, переводящих в себя совокупность точек, несобственных относительно некоторой аффинной карты, индуцирует на этой карте некоторую аффинную группу.*

Пусть в проективном пространстве P^n задана прямая P^1 и выбрана система однородных координат. определяемая базисом $\vec{e}_0, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ пространства V^{n+1}. Как было показано ранее, такая прямая может быть задана системой уравнений

$$\begin{cases} ca_{00}x_0 + a_{01}x_2 + \ldots + a_{0n}x_n = 0; \\ a_{10}x_1 + a_{11}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-2}x_1 + a_{n-2}x_2 + \ldots + a_{n-2}x_n = 0, \end{cases} \tag{10}$$

ранг которой равен $n-1$. Пусть $(q-0, q_1, \ldots, q_n)$ и $(r_0, r_1, \ldots, r_n)$ — фундаментальные решения системы (10), а Q и R — соответствующие точки прямой P^1. тогда для любой точки $M(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ прямой P^1 найдутся числа $\mu_1, \mu_2 \in F$, такие, что

$$x_i = \mu_1 q_i + \mu_2 r_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

причем. если точка M отлична от точек Q и R, то $\mu_1 \neq 0$ и $\mu_2 \neq 0$. Пусть $S(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ и $T(t_0, t_1, \ldots, s_n)$ — две различные точки прямой P^1, отличные от точек Q и R. Тогда

$$s_i = \sigma_1 q_i + \sigma_2 r_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$t_i = \tau_1 q_i + \tau_2 r_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

причем $\sigma_1 \neq 0$; $\sigma_2 \neq 0$; $\tau_1 \neq 0$; $\tau_2 \neq 0$.

Определение 4.13. Число $\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} : \dfrac{\tau_2}{\tau_2}\tau_1$ называется сложным отношением четырех точек Q, R, S, T и обозначается $(QRST)$.

Теорема 4.14. *Сложное отношение четырех точек сохраняется при любом проективном преобразовании.*

4. Аффинное n-мерное пространство.

4.2. Определение n-мерного пространства.

О.4.1. Аффинным n-мерным пространством R^n над полем P называют множество элементов, которыми являются точки и векторы. При этом выполняются следующие аксиомы:

1. Множество всех векторов R^n образует линейное пространство над полем P, которое называется пространством векторов R^n и обычно обозначают V^n.

2. Каждым двум точкам A,B из пространства R^n соответствует единственный вектор $\vec{U} \in V^n$: $\vec{U} = \vec{AB}$.

3. Если дан произвольный вектор $\vec{U}$, точка A, то существует единственная точка B: $\vec{U} = \vec{AB}$.

4. Если $\vec{U} = \vec{AB}$, $\vec{V} = \vec{BC}$, то $\vec{U} + \vec{V} = \vec{AC}$.

Свойства 4.1.

1. $\vec{U} = \vec{AB}$, $\vec{U} = \vec{AC} \Rightarrow$ B=C.

2. Для любой точки A $\vec{AA} = \vec{0}$.

3. $\vec{U} = \vec{AB} \Rightarrow -\vec{U} = \vec{BA}$.

4. Если $\vec{U} \in V^n$, точка $B \in R^n$, то существует единственная точка $A \in R^n$: $\vec{U} = \vec{AB}$.

4.2. Системы координат. Изоморфизм всех n- мерных аффинных пространств между собой.

О.4.2. Системой координат в n- мерном аффинном пространстве называют множество, состоящее из некоторой точки O (начало координат) и базиса $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ пространства V^n. Координаты некоторого вектора $\vec{U}$ в этой системе координат являются коэффициентами разложения вектора $\vec{U}$ по базису $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ и не зависит от выбора начала координат. Координаты некоторой точки M называют **координатами вектора** $\vec{OM}$. Координаты вектора будем обозначать $\vec{U}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Если дан какой - либо вектор $\vec{U} = \vec{AB}$, который имеет координаты $\vec{U}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, а точки A, B имеют координаты $A(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $B(b_1, b_2, \cdots, b_n)$, то $i = 1, 2, \cdots, n$, $x_i = b_i - a_i$,это следует из свойств векторного пространства.

Итак, как и обычном случае координаты вектора равны разности между координатами конца и координатами начала. Переход от системы координат $O\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ к системе $O'\vec{e}_1', \cdots, \vec{e}_n'$ осуществляется как и в случае плоскости (пространства) с помощью матрицы перехода от базиса к базису.

Так называемое арифметическое n- мерное пространство над полем P определяется следующим образом: элементами этого пространства являются точки и векторы, причем точка и вектор могут иметь одинаковые координаты. Вектор $\vec{U}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ образуют арифметическое линейное пространство V^n. Связь между точками и векторами осуществляется следующим образом: точки $A(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $B(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ определяют вектор

$\vec{U}(b_1 - a_1, b_2 - a_2, \cdots, b_n - a_n)$, а точка $A(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, и вектор $\vec{U}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ определяют точку $B(a_1 + x_1, a_2 + x_2, \cdots, a_n + x_n)$.

Пусть даны 2 аффинных пространства A, B и пусть существует взаимнооднозначное отображение множества всех точек и векторов пространства A на множество всех точек и векторов соответствующего пространства B, которое является изоморфным отображением пространства векторов V^n на пространство векторов W^n, взятых из пространства A и B соответственно, причем если при данном отображении точки A_1, A_2 переходят соответственно в точки B_1, B_2 , то вектор $\vec{U} = \vec{A_1A_2}$ переходит в вектор $\vec{V} = \vec{B_1B_2}$.

Такое отображение называют **изоморфным отображением аффинного пространства A на аффинное пространство B**. Пространства A и B называют **изоморфными между собой**, если одно из них можно изоморфно отобразить на другое. Поскольку при этом отображения векторов так же изоморфны, то очевидно, что изоморфными могут быть только аффинные пространства одной и той же размерности.

Докажем обратное. Пусть дано произвольное аффинное n-мерное пространство R^n. Пусть $O\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ — некоторая произвольная система координат пространства R^n. Тогда каждая точка и каждый вектор пространства R^n однозначно записываются с помощью координат $M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\vec{U}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, то есть и точка и вектор могут быть представлены как элементы арифметического n-мерного пространства.

Таким образом, аффинное n-мерное пространство изоморфно некоторому арифметическому n-мерному пространству. Поскольку изоморфизм — отображение взаимнооднозначное, то очевидно, что любые два аффинных n-мерных пространства изоморфны между собой.

4.3. Прямая и плоскость в аффинном пространстве.

О.4.3. Пусть в n- мерном аффинном пространстве R^n даны точка А и $\vec{U}_0(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$. Пусть $t \in P$. Тогда система уравнения $\begin{cases} x_1 = a_1 + \alpha_1 t \\ \cdots \\ x_n = a_n + \alpha_n t \end{cases}$, где $a_1, \cdots, a_n$ — координаты точки А, а $(x_1, \cdots, x_n)$— координаты точки М, определяет некоторое множество точек, являются концами вектора $t\vec{U}_0$, если их началами является точка А. Задавая для t различные значения, мы и получаем это множество точек, но множество векторов $t\vec{U}_0$ образует одномерное векторное пространство, то есть указанное множество естественно определить как прямую n-мерного аффинного пространства R^n, а указанную систему уравнений как параметрическое уравнение этой прямой. Прямую можно определить еще и по другому.

О.4.4.Прямая в n-мерном аффинном пространстве R^n есть множество точек М, получаемых, если какая-нибудь фиксированная точка А является началом всех векторов, принадлежащих некоторому одномерному подпространству пространства векторов из R^n.

О.4.5. Пусть R^n — некоторое аффинное n-мерное пространство и пусть V^n- его пространство векторов. Пусть V^r — некоторое r-мерное подпространство пространства V^n. Пусть точка $A(a_1, \cdots, a_n)$ и пусть точка А является началом всевозможных векторов из V^r. Тогда множество точек М являющихся концами указанных векторов называется **r-мерной плоскостью** Π^r аффинного n-мерного пространства R^n. **Векторы пространства** V^rназываются векторами, лежащими в плоскости Π^r. Если в линейном пространстве V^r дан какой-нибудь базис $\vec{U}_1, \cdots, \vec{U}_r$ и дана какая-либо точка А, то можно говорить, что r-мерная плоскость задаётся точкой А и линейно независимой системой, состоящей из r-векторов $\vec{U}_1, \cdots, \vec{U}_r$ пространства V^r. При этом полученную плоскость можно называть **r-мерной плоскостью, натянутой на точку А и векторы** $\vec{U}_1, \cdots, \vec{U}_r$.

Т.4.1.*Всякая r- мерная плоскость пространства R^n, рассмотренная как множество лежащих в ней точек и векторов является r-мерным аффинным подпространством пространства R^n.*

☐ Пусть вектор $\vec{V} \in V^n$ и пусть $P \in \Pi^r$ (Р — точка из этой плоскости). Нужно показать, что точка $Q \in \Pi^r$, где $\vec{V} = \vec{PQ}$. Поскольку $\vec{PQ} = \vec{PA} + \vec{AQ}$, то $\vec{AQ} = \vec{PQ} - \vec{PA} = \vec{PQ} + \vec{AP}$.

Можно установить и обратное утверждение. Пусть K^r r-мерное аффинное подпространство аффинного пространства R^n. Прилагая к какой-либо точке А векторы из K^r, получим в качестве их концов все точки некоторого множества такие что $M \in K^r \Rightarrow K^r$ — r-мерная плоскость пространства R^n.

Если r=0, то r-мерная плоскость аффинного пространства представляет собой некоторую точку. При r=n единственной r-мерной плоскостью является само пространство R^n. Одномерными плоскостями пространства R^n являются прямые. По определению r-мерной плоскостью, натянутой на точку А и векторы $\vec{U}_1, \cdots, \vec{U}_r$ все её точки $M(x_1, \cdots, x_n)$ удовлетворяют векторному уравнению $\vec{AM} = t_1\vec{U}_1 + \cdots + t_r\vec{U}_r$, где $t_1, \cdots, t_r$ — некоторые независимые друг от друга параметры из P. Тогда используя координаты вектора $\vec{AM}$, получим параметры уравнения плоскости

$$x_1 - a_1 = \alpha_1^{(1)}t_1 + \cdots + \alpha_1^{(r)}t_r$$

$$x_- a_2 = \alpha_2^{(1)}t_1 + \cdots + \alpha_2^{(r)}t_r$$

$$\cdots$$

$$x_n - a_n = \alpha_n^{(1)}t_1 + \cdots + \alpha_n^{(r)}t_r$$

где $(x_1, \cdots, x_n)$ — координаты точки М, $(a_1, \cdots, a_n)$ — координаты точки А.

О.4.6. Всякая n-1-мерная плоскость некоторого n-мерного аффинного пространства R^n — **гиперплоскость**.

4.4. Геометрически независимые системы точек.

Лемма 4.1. Пусть $0 <= p <= r <= n$, где $p, r, n \in N$. Всякая p-мерная плоскость Π^p n-мерного аффинного пространства R^n содержится в некоторой r-мерной плоскости этого пространства.

□ В самом деле. Пусть $\vec{U}_1, \cdots, \vec{U}_p$ — некоторая линейно независимая система векторов из Π^p. Так как $p <= r <= n$, то как известно из курса линейной алгебры эта система может быть дополнена до некоторого r-мерного базиса некоторого подпространства V^r пространства V^n всех векторов из R^n. Произведение точки А из Π^p и множества векторов из V^r

определяют некоторую плоскость Π^r, в которой и содержится плоскость Π^p. ■

Т.4.2*Пусть дано конечное множество точек $A_0, A_1, \cdots, A_r$ аффинного пространства R^n. Тогда определено некоторое наименьшее число p, являющееся размерностью плоскости пространства R^n, содержащей все эти точки, это число равно наибольшему числу линий независимых векторов, начало которых находится в некоторой точке A_i , а концы — во всех остальных точках. При этом существует единственная плоскость Π^p,содержащая все эти точки, которая имеет размерность P и называется плоскостью, натянутой на точки $A_0, A_1, \cdots, A_r$.*

□ Пусть R^n — множество, состоящее из конечного числа r+1 точек $A_0, A_1, \cdots, A_r(1)$, подпространство, порождённое всеми векторами вида $A_i\vec{A}_j$ обозначим через $V(A_0, A_1, \cdots, A_r)$, его размерность через p, так как $A_i\vec{A}_j = A_i\vec{A}_0 + A_0\vec{A}_j = -A_0\vec{A}_i + A_0\vec{A}_j$, то все векторы $A_i\vec{A}_j$ линейно выражаются через векторы, ведущие из какой - либо точки, например точки A_0, во все остальные. Значит, $V(A_0, A_1, \cdots, A_r)$ может быть образовано системой векторов $\vec{U}_1 = A_0\vec{A}_1, \cdots, \vec{U}_r = A_0\vec{A}_r$. Максимальное число линейно независимых среди них равно размерности p всего пространства $V(A_0, A_1, \cdots, A_r)$

$\Rightarrow p <= r$. Перенумеруем точки (1) таким образом, чтобы первые среди векторов $\vec{U}_i$ образовывали линейно независимую систему, то есть

$\vec{U}_1 = A_0\vec{A}_1, \cdots, \vec{U}_r = A_0\vec{A}_r(2)$.

Тогда p-мерная плоскость $\Pi = \Pi(A_0, \cdots, A_p)$, натянутая на точку A_0 и векторы (2), содержа все векторы $\vec{U}_1, \cdots, \vec{U}_r$ содержит и все концы этих векторов, то есть все точки (1). Не существует плоскости размерности меньше p, которая содержала бы все точки, поскольку система векторов (2) линейно независима. Всякая же плоскость, содержащая все точки (1) содержит точку A_0 и векторы (2), значит содержит и плоскость Π, на них натянутую. ■

Число p из только что доказанной теоремой резонно называть мерой независимости точкек $A_0, A_1, \cdots, A_r$.

О.4.7. Если для точек $(1) p = r$, то точка (1) называется **геометрически независимой в пространстве R^n.**

Точки (1) $\Leftrightarrow$ геометрически независимы, когда векторы $A_0\vec{A}_1, \cdots, A_0\vec{A}_r$ линейно независимы, то есть когда точки (1) не лежат ни в одной плоскости размерности меньше r.

4.5. Барицентрические координаты.

Пусть $A(a_1, \cdots, a_n)$, $B(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ — две произвольные точки пространства R^n. Построим прямую, проходящую через точку А и имеющую в качестве направляющего вектор $\vec{AB}$. Тогда её параметрическое уравнение будут иметь вид $\begin{cases} x_1 = a_1 + t(b_1 - a_1) \\ x_2 = a_2 + t(b_2 - a_2) \\ \cdots \\ x_n = a_n + t(b_n - a_n) \end{cases}$.

При t=0 получим координаты точки А. При t=1, получим координаты точки В. Точки прямой, которые получаются при $0 < t < 1$ называется открытым отрезком АВ; точки прямой, которые получаются при

$0 =< t =< 1$ называется замкнутым отрезком АВ.

Если положить $s = 1-t$, то параметрическое уравнение перепишется в виде: $\begin{cases} x_1 = sa_1 + tb_1 \\ x_2 = sa_2 + tb_2 \\ \cdots \\ x_n = sa_n + tb_n \end{cases}$

Кратко это можно записать так: $M = SA + B$, $0 <= s, t <= 1$,

$s+t = 1$. Числа s,t называются **барицентрическими координатами точки М** в системе барицентрических координат, соответствующих точек А и В. В механике говорят, что точка М есть взвешенная сумма точек А и В, где s,t — веса точек соответственно А и В.

Во всякой r-мерной плоскости пространства R^n можно выбрать независимую систему из r+1 точек. Всякая независимая система из r+1 точек содержится в единственной r-мерной плоскости этого пространства. Это следует из Т.4.2. Рассуждая аналогично как и выше, взяв в пространстве R^n некоторую независимую систему из r+1 точек $A_0, \cdots, A_r$ и обозначим единственную r-мерную плоскость, содержащую эти точки через Π^r, получим, что плоскость Π^r натянута на точку A_0 и векторы $\vec{U_1} = \vec{A_0A_1}, \cdots, \vec{U_r} = \vec{A_0A_r}$. Тогда координаты любой $M(x_1, \cdots, x_n)$ — этой плоскости однозначно записываются в виде $x_k = a_k + \lambda_1(a_k^1 - a_k^0) + \lambda_2(a_k^2 - a_k^0) + \cdots + \lambda_r(a_k^r - a_k^0)$, где точки $A_0, A_1, \cdots, A_r$ имеют соответственно координаты $(a_1^0, \cdots, a_1^0)$, $(a_1^1, \cdots, a_1^1)$, $\cdots$, $(a_1^r, \cdots, a_1^r)$.

Задавая для $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ различные значения мы будем получать различные точки плоскости Π^r. Обозначим $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \cdots - \lambda_r$. Тогда $M = \lambda_0 A_0 + \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_r A_r$- параметрические уравнения в векторной записи. Значит точка М есть взвешенная сумма точек $A_0, \cdots, A_r$, взятых соответственно с весами $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_r$, для которых $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_r = 1$ и все они неотрицательны.

С другой стороны, всякому набору $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_r$ соответствует единственная точка.

О.4.8. Коэффициенты $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_r$ называются **барицентрическими координатами** точки М относительно систем точек $A_0, \cdots, A_r$ в r - мерной плоскости Π^r.

4.6. Симплексы и выпуклые множества.

О.4.9. Множество всех тех точек $M \in \Pi^r$, барицентрические координаты которых положительны называется **r-мерным открытым симплексом** с вершинами $A_0, \cdots, A_r$. Точки, координаты которых не отрицательны называются **замкнутым симплексом** с вершинами $A_0, \cdots, A_r$. Замкнутый симплекс, очевидно, содержит в себе открытый симплекс с теми же вершинами. Отрезок является одномерным симплексом.

Пусть дан некоторый 2-х мерный симплекс A_0, A_1, A_2. Тогда он определяет некоторую двумерную плоскость, то есть плоскость в обычном смысле. Эти точки очевидно образуют треугольник. Пусть М- некоторая внутренняя точка этого треугольника. Тогда она является внутренней точкой некоторого отрезка A_0M', где M'- внутренняя точка отрезка A_1A_2.

Значит М $= \lambda_0 A_0 + \lambda' M'(3)$. М$' = \lambda_1' A_1 + \lambda_2' A_2$ (3').

Подставим (3') в (3). Получим М $= \lambda_0 A_0 + \lambda'(\lambda_1' A_1 + \lambda_2' A_2) \Rightarrow$ М $=$ $= \lambda_0 A_0 + \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$. При этом так как $\lambda_0, \lambda', \lambda_1', \lambda_2'$ неотрицательны и $\lambda_0 + lambda' = 1 = \lambda_1' + \lambda_2'$, то неотрицательно и $\lambda' \cdot \lambda_1' = \lambda_1$; $\lambda' \cdot \lambda_2' = \lambda_2$.

Кроме того $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_0 + \lambda'(\lambda_1' + \lambda_2') = \lambda_0 + \lambda' = 1 \Rightarrow \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$-барицентрические координаты точки М и более того М - точка симплекса A_0, A_1, A_2.

Пусть теперь М $= \lambda_0 A_0 + \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 >= 0, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$.
$\Rightarrow M = \lambda_0 A_0 + (\lambda_1 + \lambda_2)(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} A_1 + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} A_2) = \lambda_0 A_0 + (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1' A_1 +$ $+ \lambda_2' A_2)$. Здесь $\lambda_1' + \lambda_2' = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = 1$.

Кроме того, очевидно $\lambda_1', \lambda_2' >= 0 \Rightarrow$ получаем, что $M' = \lambda_1' A_1 +$ $+ \lambda_2' A_2$ есть внутренняя точка отрезка $A_1 A_2$. Кроме того, $M = \lambda_0 A_0 +$

$+ (\lambda_1 + \lambda_2)M'$, причем $\lambda_0(\lambda_1 + \lambda_2) >= 0$ и $\lambda_0 + (\lambda_1 + \lambda_2) = 1$, то есть М- внутренняя точка отрезка A_0M', следовательно М- внутренняя точка треугольника $A_0A_1A_2$.

Утверждение.4.1. Каждая n - мерная плоскость является пересечением n-к гиперплоскостей.

О.4.10. Множество X точек n- мерного пространства R^n называется **выпуклым**, если для любых точек $P, Q \in X$: $P, Q \in X$.

Утверждение.4.2. Пересечение некоторого числа выпуклых множеств является выпуклым множеством.

О.4.11Пусть X — некоторое множество точек из R^n. Пересечение всех выпуклых множеств, содержащих X называется **выпуклым замыканием** или **выпуклой оболочкой множества X**. Оно является наименьшим выпуклым множеством, содержащим X.

Утверждение.4.3. Пусть X — некоторое множество геометрически независимых точек в пространстве R^n. Тогда выпуклое замыкание множества $X(\vec{X})$- есть замкнутый симплекс с вершинами, состоящими из точек множества X.

5. Проективная плоскость.

5.1. Понятие проективной плоскости.

О.5.1. Связкой с центром О называется множество всех прямых и плоскостей, проходящих через некоторую точку О пространства. **Смотреть Рис.27**

Пусть в пространстве дана некоторая плоскость П, которая проходит через центр О некоторой связки. Тогда любая прямая из связки которая не параллельна плоскости П пересекает эту плоскость в некоторой точке М. Луч ОМ называется **лучом связки**. Говорят, что луч ОМ и точка М находятся в перспективном соответствии. Если лучи связки лежат в одной плоскости, то им перспективно соответствует некоторая прямая а на плоскости П, поэтому говорят так же о плоскости связки Oa и о перспективном соответствии между плоскостью Oa и прямой а.

О.5.2. Луч связки и плоскость связки называют **инцидентными**, если луч лежит в данной плоскости. **Точка и прямая** называются **инцидентными**, если точка лежит на данной прямой.

Все ли лучи и плоскости-связки имеют пересечение с плоскостью П ?

Нет, плоскость Π', которая параллельна плоскости Π(она называется особой плоскостью) не имеет точек пересечения с плоскостью Π. Лучи лежащие в особой плоскости называются особыми. В каждой плоскости-связке, которая не является особой, лежит особый луч. **Смотреть Рис.28**

Пусть 2 не особые плоскости-связки Oa_1 и Oa_2 пересекаются по одному особому лучу. Тогда им инцидентны прямые a_1 и a_2 на плоскости Π. Предположим, что прямые a_1 и a_2 пересекаются. Тогда плоскости Oa_1 и Oa_2 имеют в плоскости Π некоторую общую точку, но множество точек пересечения плоскостей Oa_1 и Oa_2 составляют указанный выше особый луч. $\Rightarrow$ получаем, что особый луч пересекает плоскость Π. Следовательно полученное противоречие показывает, что прямые a_1 и a_2 не пересекаются, то есть параллельны.

Введём теперь искусственно в рассмотрение так называемые несобственные точки $M\infty$. $M\infty <\Rightarrow$ инцидентна прямой a, когда луч $OM\infty$ инцидентен плоскости Oa. Каждому несобственному лучу инцидентна своя несобственная точка. Значит, естественно множество всех несобственных точек определить как несобственную прямую. Таким образом, любая несобственная точка инцидентна несобственной прямой.

Итак, плоскость Π пополняется несобственными элементами. Полученная плоскость называется проективной и обозначается $\vec{\Pi}$. Перспективное соответствие между связной и плоскостью $\vec{\Pi}$ является взаимнооднозначным.

Свойство 5.1. Всякие две прямые a_1 и a_2 пересекаются в единственной точке проективной плоскости.

$\square$ Если прямые a_1 и a_2 не параллельны, то их точка пересечения-точка плоскости Π. Если a_1 и a_2 параллельны, то им обеим соответствует единственная особая точка- точка, которая инцидентна единственному особому лучу, являющемуся линией пересечения плоскостей связки Oa_1 и Oa_2. Значит прямые a_1 и a_2 пересекаются в некоторой особой точке. Если одна из прямых несобственная, то она пересекается с собственной прямой в её единственной точке. $\blacksquare$

Это утверждение можно переформулировать так.

Свойство 5.1(a). Для любых точек a,b существует единственная прямая, которой обе эти точки инцидентны.

5.2. Однородные координаты точек на плоскости и лучи в связке.

О.5.3. Пусть на плоскости $\vec{\Pi}$ дана некоторая система аффинных координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Пусть М- производная точка плоскости П и пусть (x, y)-её координаты в системе $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Всякая тройка чисел (x_1, x_2, x_3), которые пропорциональны тройке $(x, y, 1)$ называется **тройкой однородных координат точки М**. Пусть (x_1, x_2, x_3)- однородные координаты точки М, тогда, очевидно, $x = \dfrac{x_1}{x_3}$, $y = \dfrac{x_2}{x_3}$ (1) - аффинные координаты точки М в системе $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Понятно,что у каждой точки М плоскости П имеется бесконечное множество однородных координат.

О.5.4. Тройку (x_1, x_2, x_3) однородных координат назовём **обыкновенной**, если $x_3 \neq 0$ и если $x_3 = 0$, то особой. Множество всех числовых троек разбивается, таким образом, на непересекающиеся классы обыкновенных троек и класс особых. Причём среди них нет так называемой запрещённой тройки $(0, 0, 0)$. Очевидно, что особая тройка не является однородными координатами какой - либо точки $M \in \Pi$. В отношении обыкновенных точек справедливо утверждение.

Утверждение 5.1. Точки плоскости находятся во взаимнооднозначном соответствии с массами обыкновенных числовых троек.

Пусть центр связки является центром некоторого репера $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ такого что e_1, e_2 лежат в особой плоскости Π'.

О.5.4. Пусть дан произвольный луч связки. Тройка координат (x_1, x_2, x_3) произвольного направляющего вектора этого луча называется **тройкой однородных координат** этого луча в системе $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$.

Это определение естественно, так как для любого луча существует бесконечное множество направляющих векторов. Запрещённая тройка не может определять ни точку, ни тем более луч.

Таким образом, как и в случае с точками множество троек может быть разбито на классы. Логично особые тройки вида $(x_1, x_2, 0)$ определить как координаты направляющих векторов особых лучей- лучей, лежащих в особой плоскости.

Таким образом, справедливо утверждение.

Утверждение 5.2. Точки проективной плоскости $\vec{\Pi}$ находятся во взаимнооднозначном соответствии с классами всевозможных числовых троек, среди которых нет запрещённых.

Пусть дана плоскость П и система координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ на плоскости П.**Смотреть Рис.29** Пусть $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ — некоторая аффинная система координат в системе координат в пространстве: $O \neq o, e_1, e_2$ те же, $a_3 = Oo$. Система $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ называется системной, естественно связаной с системой $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Плоскость П в системе $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ имеет уравнение $x_0 = 1$.

5.3. Прямая на плоскости в однородных координатах.

Пусть на плоскости П прямая а задана уравнением $a_1x + a_2y + a_3 = 0(2)$. Это уравнение в системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$.

Как было показано выше, координаты любой точки М выражаются через однородные однозначно.

Следовательно, (2) примет вид $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0(3)$. Если однородные координаты точки М удовлетворяют (3), то её аффинная координата удовлетворяет (2). Значит, точка М в системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ лежит на прямой (2).

Пусть теперь $x_3 = 0$, то есть $x_1, x_2, 0$-координаты некоторой несобственной точки. Пусть они удовлетворяют уравнению (3). Тогда $a_1x_1 + a_2x_2 = 0(4)$. $\Rightarrow a_1x_1 = -a_2x_2$, $\dfrac{x_1}{x_2} = -\dfrac{a_2}{a_1} \Rightarrow$ единственная точка, удовлетворяющая уравнению (3) и являющеюся несобственной - точка с координатами $(-a_2, a_1, 0)$. Тройки такого вида и только они являются координатами единственного несобственного луча, лежащего в плоскости Oa. Значит $(-a_2, a_1, 0)$- единственная точка (несобственная)инцидентная прямой а. Поскольку все несобственные точки $\vec{\Pi}'$ определяются особыми тройками, то их можно определить уравнением $x_3 = 0$. С другой стороны, если $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, то так как $a_3 \neq 0$ получаем, что $x_3 = 0$.

5.4. Координаты прямой. Арифметическая проективная плоскость.

По аналогии с однородными координатами точки и вектора можно определить и однородные координаты прямой. Таким образом, между классами пропорциональных числовых троек (запрещенная тройка исключается) и множеством всех прямых можно установить взаимнооднозначное соответствие.

Пример 5.1. Однородные координаты прямых $y = 2x$; $x = 3$; $x = 0$ или соответственно прямых $-2x_1 + x_2 = 0$; $x_1 - 3x_3 = 0$; $x_1 = 0$ будут $(-2, 1, 0)$;$(1, 0, -3)$; $(1, 0, 0)$. Несобственная прямая, которая определяет уравнение $x_3 = 0$ имеет координаты (0,0,1).

О.5.5. Арифметической проективной плоскостью называется всякое множество, состоящее из элементов двух родов: арифметических точек и прямых, которые представляют собой классы пропорциональных между собой числовых троек. При этом различные точки (x_1, x_2, x_3) и прямые U_1, U_2, U_3. Между точками и прямыми установлено отношение инцидентности.

При этом точка и прямая инцидентны между собой, $U_1x_1 + U_2x_2 + + U_3x_3 = 0(5)$.

О.5.7. Проективной плоскостью называется всякое множество, состоящее из элементов двух родов: точек и прямых, между которыми существует отношение инцидентности. При этом точка и прямая инцидентны между собой $\Rightarrow$ когда инцидентны соответствующие луч и плоскость связки. В частности проективной плоскостью является и сама связка, если её лучи называть "точками"; а плоскости — "прямыми".

Замечание 5.1. Все проективные плоскости изоморфны связке и, значит, изоморфны между собой. Кроме того, всякая проективная плоскость изоморфна арифметической.

Замечание 5.2. Особые лучи связки возникают лишь тогда, когда однозначно выбрана система координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$.

О.5.8. Комплексной арифметически проективной плоскостью называется множество, состоящее из комплексных арифметических точек и комплексных арифмет ических прямых, которые представляют собой классы пропорциональных между собой троек комплексных чисел.

Точка (прямая) называется **вещественной**, если среди троек её класса существует хотя бы одна, состоящая из вещественных чисел.

Например точка $M(i, i, i)$ — вещественная, так как точка М имеет координаты (1,1,1). В противном случае точка (прямая) называется **мнимой**. Между точками и прямыми комплексной арифметической проекцией плоскости устанавливается отношение инцидентности (5).

5.5 Принцип двойственности для проективной плоскости.

Поскольку точки и прямые в проективном пространстве задаются равноправными объектами, то заменив в условии инцидентности (5) координаты точки на координаты прямой и наоборот, снова получим тождество.

Это даёт основание сформулировать так называемый принцип двойственности для проективной плоскости.

Пусть верно какое-либо утверждение для точек, прямых и отношение инцидентности проективной плоскости. Тогда поменяв местами слово точка и прямая, мы получим верное утверждение.

Т.5.1(а)*Ко всяким двум различным точкам A и B проективной плоскости имеется единственная прямая AB им инцидентная.*

Т.5.1(б)*Для любых двух различных прямых проективной плоскости имеется единственная точка им инцидентная.*

Т.5.2(а)*Пусть* (x_1, x_2, x_3), (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)*- координаты каких-либо трёх точек.Необходимым и достаточным условием для того, чтобы эти три точки были инцидентны одной и той же прямой является условие*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (6)$$

Т.5.2(б)*Пусть* (x_1, x_2, x_3), (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)*- некоторые произвольные координаты каких-либо трёх прямых. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы эти три прямые пересекались в одной точке является условие (6).*

5.6. Проективная система координат в связке.

По аналогии с однородными координатами можно рассматривать тройки аффинных координатных систем в связке. Пусть $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$- некоторая произвольная аффинная система координат в пространстве, тогда очевидно, что $O\lambda\vec{e}_1\lambda\vec{e}_2\lambda\vec{e}_3$- так же система аффинных координат в пространстве. Более того, если некоторая точка E, в первой системе имеет координаты $E(x_1, x_2, x_3)$, то во второй системе её координаты могут быть найдены однозначно $E(\frac{x_1}{\lambda}, \frac{x_2}{\lambda}, \frac{x_3}{\lambda})$. Системы $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ и $O\lambda\vec{e}_1\lambda\vec{e}_2\lambda\vec{e}_3$ называются аффинно-эквивалентными.**Смотреть Рис.30**

О.5.9. Задать проективную систему координат в связке - значит задать в этой связке 3 некомпланарных координатных луча. $\vec{X}_1$, $\vec{X}_2$, $\vec{X}_3$ и четвёртый луч $\vec{E}$, некомпланарный ни с одним из лучей $\vec{X}_1$, $\vec{X}_2$, $\vec{X}_3$.

О.5.10. Тройки координат произвольного луча связки O в аффинной системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ или, что то же самое, в любой аффинной координатной системе, эквивалентной системе $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ называются

тройками проективных координат этого луча в проективной системе $\vec{X}_1$, $\vec{X}_2$, $\vec{X}_3$, $\vec{E}$.

Любая тройка коэффициентов U_1, U_2, U_3 любого уравнения

$U_1x_1+U_2x_2+U_3x_3 = 0$ произвольной плоскости связки относительно системы координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ является по определению тройкой проективных координат этой плоскости в проективной системе координат $\vec{X}_1$, $\vec{X}_2$, $\vec{X}_3$, $\vec{E}$.**Смотреть Рис.31**

Пусть дана некоторая аффинная система координат связки О. Проведём через точки x_1, x_2, x_3, которые являются концами соответственных единичных векторов плоскости П. Тогда можно ввести в рассмотрение плоскость $\vec{\Pi}$. Треугольник с вершинами x_1, x_2, x_3 принято называть **координатным треугольником**, а вершины x_1, x_2, x_3- **вершинами координатного треугольника**. Стороны треугольника - отрезки x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1 целесообразно определить как **стороны координатного треугольника**. Четыре точки x_1, x_2, x_3, E называются **фундаментальными точками**.**Смотреть Рис.32**

Если проективная система координат $\vec{X}_1$, $\vec{X}_2$, $\vec{X}_3$, $\vec{E}$ определена вершинами координатного треугольника и единичной точкой, то такая система координат называется **однородной системой координат**, соответствующей некоторой аффинной системе $O'\vec{e_1e_2}$, которая на пополненной плоскости является системой однородных координат. Вершина x_3 становится началом координат системы $O'\vec{e_1e_2}$, а оси $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ - осями X и Y соответственно. Точки x_1, x_2, x_3 имеют координаты. $x_1(1,0,0), x_2(0,1,0), x_3(0,0,1)$. Точка Е имеет координаты (1,1,1). В системе же $O'\vec{e_1e_2}$ точка Е имеет координаты x=y=1. Прямая x_1x_2 является несобственной прямой плоскости $\vec{\Pi}$. Выясним координат прямых x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1.

Все он и удовлетворяют уравнению $U_1x_1 + U_2x_2 + U_3x_3 = 0$.

Для x_1x_3 $U_1 = U_3 = 0 \Rightarrow$ координаты прямой $x_1x_3 = (0,1,0)$. Аналогично $x_2x_3 = (1,0,0)$, $x_1x_2 = (0,0,1)$. Таким образом, отождествляя каждую точку плоскости П с классом троек её однородных координат мы получаем систему однородных координат на арифметически проективной плоскости.

Пусть нам даны 2 проективные координатные системы $\vec{X}_1\vec{X}_2\vec{X}_3\vec{E}$ и $\vec{X}'_1\vec{X}'_2\vec{X}'_3\vec{E}'$.

Пусть в старой системе координат $(\vec{X}_1\vec{X}_2\vec{X}_3\vec{E})$ новая система координат $(\vec{X}_1'\vec{X}_2'\vec{X}_3'\vec{E}')$ задана координатами $\begin{cases} x_1' = (c_{11}, c_{12}, c_{13}) \\ x_2' = (c_{21}, c_{22}, c_{23}) \\ x_3' = (c_{31}, c_{32}, c_{33}) \\ E' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \end{cases}$

Тогда возможны две ситуации:

1) система без $X_1\vec{X_2}X_3E$ и $X_1'\vec{X_2'}X_3'E'$ является аффинно-эквивалентной.

2) система без $X_1\vec{X_2}X_3E$ и $X_1'\vec{X_2'}X_3'E'$ не является аффинно-эквивалентной.

Используя несложные алгебраические рассуждения и преобразования можно показать, что формулы перехода от новой системы к старой имеют в этом случае вид $\lambda x_1 = \sum\limits_{j=1}^{3} c_{ij}x_j, i = 1, 2, 3$, где x_i и x_i'- координаты в старой и в новой системе, λ — коэффициент, связывающий эквивалентные системы.

Если система не является аффинно-эквивалентной, то формулы перехода будут иметь вид $x_i = \sum\limits_{j=1}^{3} \lambda_j c_{ij} x_j'$, $i = 1, 2, 3$, где λ_i — это коэффициенты, связывающие координаты $e_i = \lambda_i \vec{e}_i'$.