В. В. АНИСЬКОВ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. КУРС ЛЕКЦИЙ В 3 ЧАСТЯХ. ЧАСТЬ 2. ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Гомель, 2007

Содержание

1. Тема 1. Эллипс

1. Эллипс и его каноническое уравнение

2. Исследование формы эллипса по его каноническому уравнению

3. Эллипс — как результат равномерного сжатия окружности к её диаметру. Эксцентриситет эллипса. Параметрические уравнения эллипса

1.1. Эллипс и его каноническое уравнение

Определение 1.1. Эллипсом называется множество точек плоскости для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек, называемых фокусами есть величина постоянная, большая чем расстояние между фокусами.

Постоянную величину, входящую в определение эллипса обозначим через $2a$, а расстояние между фокусами через $2c$. Пусть $F_1,\ F_2$ — фокусы эллипса. Выберем систему координат таким образом, чтобы ось абсцисс проходила через точки $F_1,\ F_2$, а начало координат находилось на середине отрезка F_1F_2. Тогда очевидно, что $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$.

Определение 1.2. Фокальными радиусами точки $M(x,y)$ эллипса называются величины $r_1 = F_1M$ и $r_2 = F_2M$.

Теорема 1.1. *Для того, чтобы точка $M(x,y)$ принадлежала эллипсу, необходимо, чтобы её координаты удовлетворяли уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = a^2 - c^2$.

◀ Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка эллипса. По определению эллипса, $r_1 + r_2 = 2a$. Используя формулу расстояния между точками, получаем:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

или

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Возведя в квадрат и преобразовав, получим:

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2. \qquad (*)$$

Пусть $b^2=a^2-c^2$ (такая замена возможна, поскольку $a>c$), тогда (*) примет вид $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. Поскольку $a\neq 0,\ b\neq 0$, то, разделив последнее равенство на a^2b^2, мы и получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

►

Теорема 1.2. *Если координаты точки $M(x_1,y_1)$ удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $b^2=a^2-c^2$, то эта точка принадлежит некоторому эллипсу.

◄ Пусть числа $x_1,\ y_1$ — решения уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Тогда

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1.$$

Докажем, что точка M принадлежит эллипсу, т.е. что $F_1M+F_2M=2a$. Из указанного уравнения следует, что

$$y_1^2=b^2(1-\frac{x_1^2}{a^2}).$$

Поэтому

$$F_1M=\sqrt{(x_1+c)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1+c)^2+b^2(1-\frac{x_1^2}{a^2})}=$$

$$\sqrt{x_1^2+2x_1c+c^2+b^2-\frac{x_1^2b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}x_1^2+2x_1c+(b^2+c^2)}=$$

$$\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x_1^2+2x_1c+a^2}=\sqrt{(\frac{c}{a}x_1+a)^2}=|\frac{c}{a}x_1+a|.$$

Аналогично рассуждая, получим, что $F_2M=|\frac{c}{a}x_1-a|$. Поскольку $x_1,\ y_1$ — решения уравнения $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, то $x_1\leqslant a$, а, так как $0<\frac{c}{a}<1$, то $|\frac{c}{a}x_1| < a$. Поэтому, в любом случае, $a + \frac{c}{a}x_1 > 0$ и $a - \frac{c}{a}x_1 > 0$ Итак,

$$F_1M + F_2M = |\frac{c}{a}x_1 + a| + |\frac{c}{a}x_1 - a| = |a + \frac{c}{a}x_1| + |a - \frac{c}{a}x_1| =$$

$$a + \frac{c}{a}x_1 + a - \frac{c}{a}x_1 = 2a.$$

►

Определение 1.3. Уравнение

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,} \qquad (1.1)$$

где $b^2 = a^2 - c^2$ называется каноническим уравнением эллипса.

1.2. Исследование формы эллипса по его каноническому уравнению

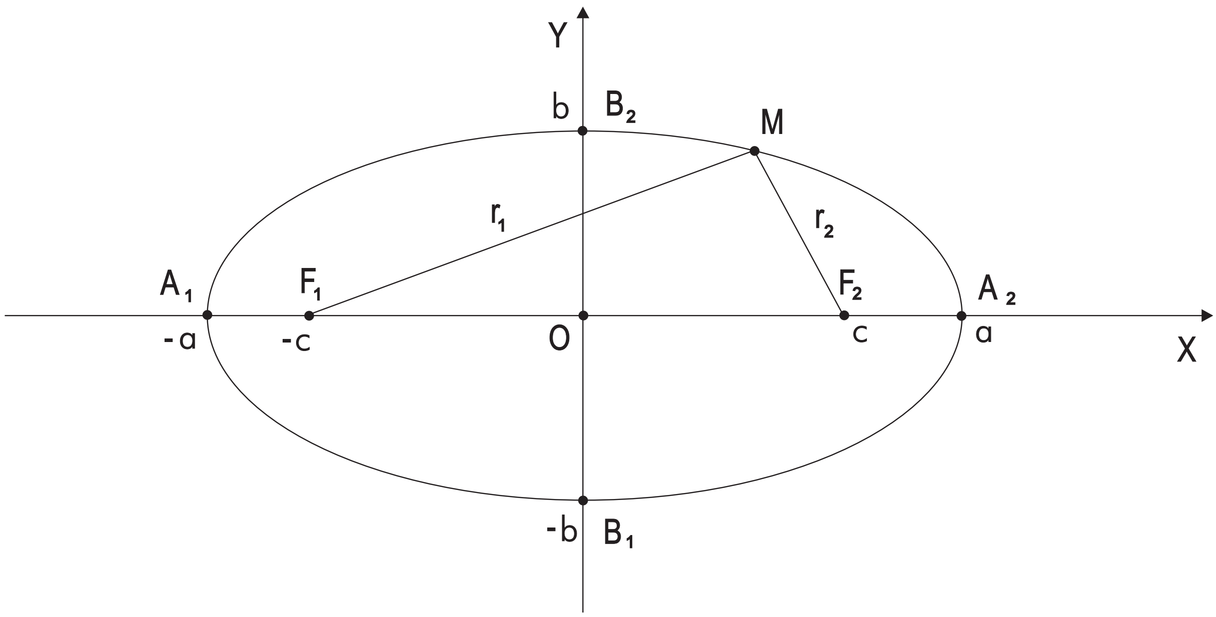


Рис. 1

Свойство 1.1. *Координатные оси являются осями симметрии эллипса. Начало координат является центром симметрии эллипса.*

◀ Пусть $M(x_0, y_0)$ — некоторая точка эллипса. Поскольку в уравнении эллипса все неизвестные возведены в квадрат, то эллипсу принадлежат так же: точка $M_1(-x_0, y_0)$, симметричная относительно оси ординат; точка $M_2(x_0, -y_0)$, симметричная относительно оси абсцисс; точка $M_3(-x_0, -y_0)$, симметричная относительно начала координат. ▶

Свойство 1.2. *Эллипс пересекает координатные оси в точках $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$.*

◀ Поскольку точки $A_1,\ A_2$ принадлежат оси абсцисс, а точки $B_1,\ B_2$ — оси ординат, то достаточно просто подставить их координаты в уравнение эллипса. ▶

Свойство 1.3. *Для любой точки эллипса $M(x, y)$ выполняются соотношения: $-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$.*

◀ Предположим противное, например, что $|x| > a$. Тогда $\dfrac{x^2}{a^2} > 1$ и для любого значения y получим:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1,$$

т. е. приходим к противоречию с уравнением эллипса. К такому же потиворечию приходим, если предположим, что $|y| > a$. ▶

Свойство 1.4. *Для любых точек эллипса, расположенных в первой координатной четверти, с возрастанием их абсциссы, их ордината убывает.*

◀ Это следует из того, что

$$y^2 = b^2(1 - \frac{x^2}{a^2}).$$

▶

Определение 1.4. Отрезок A_1A_2 и его длина $2a$ называется большей осью, а отрезок OA_2 и его длина a называется большей полуосью.

Определение 1.5. Отрезок B_1B_2 и его длина $2b$ называется меньшей осью, а отрезок OB_2 и его длина b называется меньшей полуосью.

Определение 1.6. Отрезок F_1F_2 и его длина $2c$ называется фокусным расстоянием.

Определение 1.7. Точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$ называются вершинами эллипса.

Теперь, используя приведённые выше свойства, построим эллипс (рис. 1).

1.3. Эллипс — как результат равномерного сжатия окружности к её диаметру. Эксцентриситет эллипса

Пусть в некоторой ПДСК-2 некоторая окружность задана своим уравнением $x^2+y^2=a^2$. Произведём преобразование сжатия к оси абсцисс по формулам

$$\begin{cases} x = X; \\ y = \dfrac{a}{b}Y. \end{cases}$$

Подставив в уравнение окружности и преобразовав, получим:

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1.$$

Таким образом, эллипс можно рассматривать как результат сжатия окружности к её диаметру.

Определение 1.8. Отношение фокусного расстояния эллипса к длине его большей оси называется эксцентриситетом эллипса и обозначается через ε:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a}.} \qquad (1.2)$$

Фокальные радиусы для эллипса могут быть вычислены через эксцентриситет:

$$\boxed{r_1 = a+\varepsilon x_1, \quad r_2 = a-\varepsilon x_1.} \qquad (1.3)$$

◀ При доказательстве Теоремы 2, были получены следующие соотношения: $r_1 = a+\dfrac{c}{a}x_1$; $r_2 = a-\dfrac{c}{a}x_1$. Теперь остаётся применить определение эксцентриситета. ▶

Пусть в некоторой ПДСК-2 задан эллипс своим каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Тогда эллипс может быть задан уравнениями

$$\boxed{x = a\cos t; \quad y = b\sin t,} \tag{1.4}$$

которые называются параметрическими уравнениями эллипса.

◀ Совершим преобразование сжатия к оси абсцисс с коэффициентом

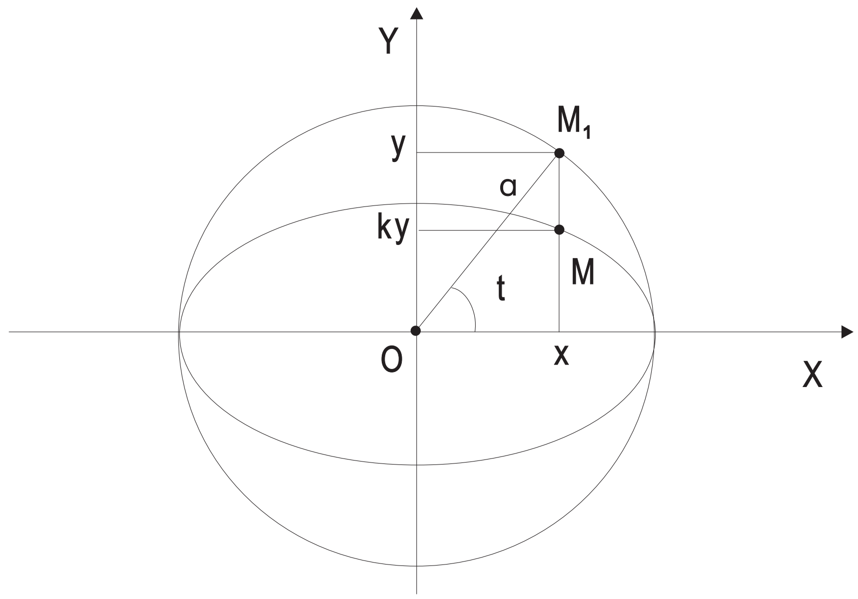


Рис. 2

сжатия $k = \dfrac{b}{a}$, т.е. по формулам

$$\begin{cases} x = X; \\ y = \dfrac{a}{b}Y. \end{cases}$$

Тогда, подставив x и y в уравнение эллипса и преобразовав, получим уравнение окружности: $X^2 + Y^2 = a^2$. Пусть $M(X, Y)$ — некоторая произвольная точка этой окружности, t — угол между радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ и осью абсцисс (рис. 2). Тогда окружность может быть задана уравнениями $X = a\cos t$; $Y = a\sin t$, которые называются параметрическими уравнениями. Совершим теперь обратное преобразование по формулам:

$$\begin{cases} X = x; \\ Y = \dfrac{b}{a} y. \end{cases}$$

тогда точка M перейдёт в точку M', координаты которой удовлетворяют соотношениям: $x = a\cos t; \quad y = a\sin t$. ▶

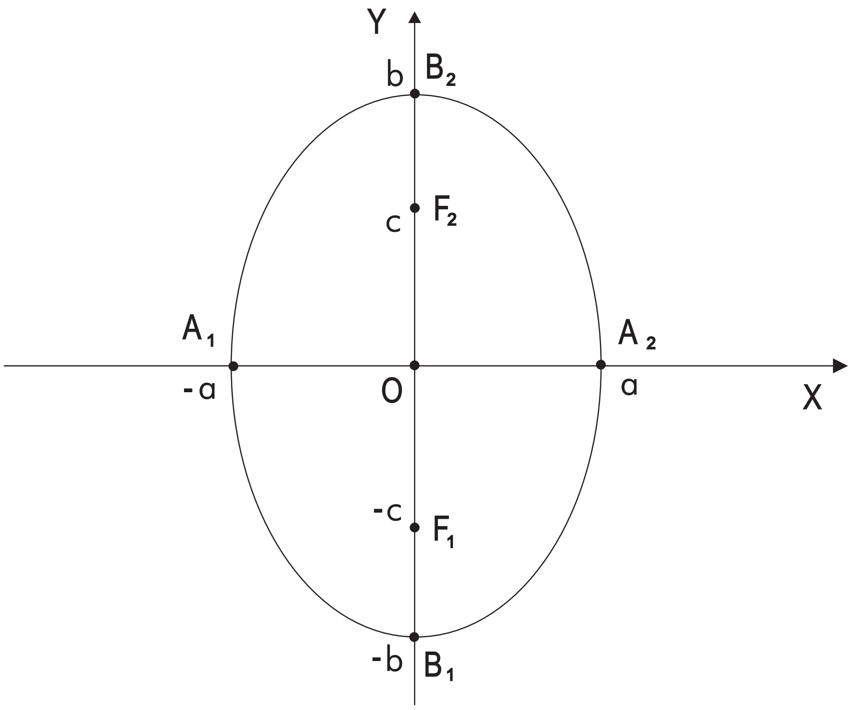


Рис. 3

Замечание 1.1. *Мы рассмотрели эллипс у которого фокусы расположены на оси абсцисс. Если же систему координат выбрать таким образом, чтобы фокусы располагались по оси ординат, то тогда знаменатели в каноническом уравнении эллипса изменят качественно свою основную характеристику — большая полуось будет знаменателем под ординатой, а меньшая — под абсциссой. (рис. 3)*

2. Тема 2. Гипербола

1. Гипербола и её каноническое уравнение

2. Исследование формы гиперболы по её каноническому уравнению

3. Асимптоты гиперболы. Эксцентриситет гиперболы

2.1. Гипербола и её каноническое уравнение

Определение 2.1. Гиперболой называется множество точек плоскости для каждой из которых абсолютная величина разности расстояний до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая чем расстояние между фокусами.

Постоянную величину, входящую в определение гиперболы обозначим через $2a$, а расстояние между фокусами — через $2c$. Пусть $F_1,\ F_2$ — фокусы. Систему координат выберем таким образом, чтобы ось абсцисс проходила через фокусы, а начало координат находилось на середине отрезка F_1F_2. Очевидно, что $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Пусть M — произвольная точка гиперболы. Из определения следует, что $|F_1M - F_2M| = 2a$.

Определение 2.2. Фокальными радиусами точки $M(x, y)$ гиперболы называются величины $r_1 = F_1M$ и $r_2 = F_2M$.

Теорема 2.1. *Для того, чтобы точка $M(x, y)$ принадлежала гиперболе, необходимо, чтобы её координаты удовлетворяли уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = c^2 - a^2$.

◀ Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка гиперболы. По определению гиперболы, $|F_1M - F_2M| = 2a$. По формуле расстояния между двумя точками получим:

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}; \quad F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Тогда

$$|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2a;$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a;$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Возведя в квадрат и преобразовав, получим:

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2).$$

или $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$.

Обозначим $b^2=c^2-a^2$. Поскольку $c>a$, то $a\neq 0$ и $b\neq 0$. Следовательно, последнее равенство можно почленно разделить на a^2b^2. Отсюда и получим

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

►

Теорема 2.2. *Если координаты точки $M(x_1,y_1)$ удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $b^2=c^2-a^2$, то эта точка принадлежит некоторой гиперболе.

◄ Пусть числа $x_1,\ y_1$ — решения уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Тогда

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1.$$

Докажем, что точка M принадлежит гиперболе, т.е. что $|F_1M-F_2M|=$ $=2a$. Из указанного уравнения следует, что

$$y_1^2=b^2(\frac{x_1^2}{a^2}-1).$$

Поэтому

$$F_1M=\sqrt{(x_1+c)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1+c)^2+b^2(\frac{x_1^2}{a^2}-1)}=$$

$$\sqrt{x_1^2+2x_1c+c^2-b^2+\frac{x_1^2b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}x_1^2+2x_1c+(c^2-b^2)}=$$

$$\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x_1^2+2x_1c+a^2}=\sqrt{(\frac{c}{a}x_1+a)^2}=|\frac{c}{a}x_1+a|.$$

Аналогично рассуждая, получим, что $F_2M=|\frac{c}{a}x_1-a|$. Следовательно, $|F_1M-F_2M|=||\frac{c}{a}x_1+a|-|\frac{c}{a}x_1-a||$.

Из уравнения гиперболы следует, что $|x_1| > a$. Кроме того, $\frac{c}{a} > 1$ (т.к. $c > a$), поэтому $\frac{c}{a}|x_1| > a$. Следовательно, для точек у которых $x_1 > a$, оба модуля положительны и поэтому

$$|F_1M - F_2M| = |\frac{c}{a}x_1 + a - \frac{c}{a}x_1 + a| = |2a| = 2a.$$

Для точек у которых $x_1 < -a$, оба модуля отрицательны и поэтому

$$|F_1M - F_2M| = | - \frac{c}{a}x_1 - a + \frac{c}{a}x_1 - a| = | - 2a| = 2a.$$

По определению, точка M принадлежит гиперболе. ▶

Определение 2.3. Уравнение

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,} \tag{2.1}$$

где $b^2 = c^2 - a^2$. называется каноническим уравнением гиперболы.

2.2. Исследование формы гиперболы по её каноническому уравнению

Свойство 2.1. *Координатные оси являются осями симметрии гиперболы. Начало координат является центром симметрии гиперболы.*

◀ Доказательство так же как и у эллипса заключается в простой подстановке точек, симметричных некоторой точке гиперболы. ▶

Свойство 2.2. *Гипербола пересекает координатную ось OX в точках $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ и не пересекает ось OY.*

◀ Пересечение с осью абсцисс как и в случае эллипса доказывается подстановкой. Докажем, что гипербола не пересекает ось ординат. Предположим противное. Тогда существует некоторая точка $K(0, y_1)$, которая принадлежит гиперболе. Следовательно, $-\frac{y_1^2}{b^2} = 1$, что невыполнимо для действительных чисел. Полученное противоречие означает, что гипербола не пересекает ось ординат. ▶

Свойство 2.3. *Для любой точки гиперболы $M(x, y)$ выполняется: $|x| \geqslant a$.*

◀ Из уравнения гиперболы: $x^2 = a^2(1 + \frac{y^2}{b^2})$. Отсюда $x^2 \geqslant a^2$ и поэтому $|x| \geqslant a$. ▶

Свойство 2.4. *Для любых точек гиперболы, расположенных в первой координатной четверти, с возрастанием их абсциссы, их ордината возрастает.*

◀ Из уравнения гиперболы получаем: $y^2 = -b^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2$. Поэтому чем больше значение x, тем больше значение y. ▶

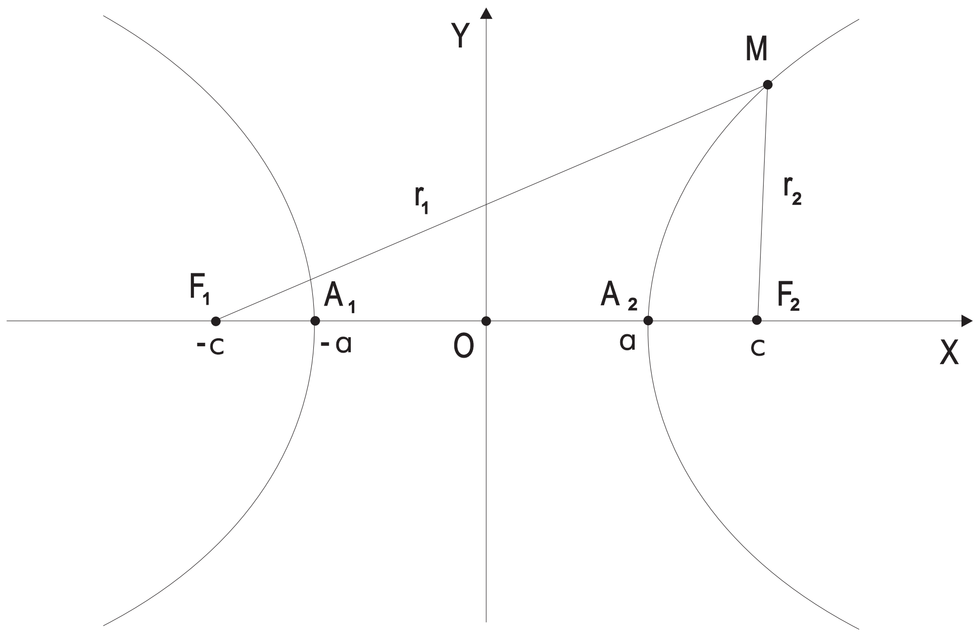


Рис.4

Свойство 2.5. *Отрезок A_1A_2 и его длина $2a$ называется действительной осью, а отрезок OA_2 и его длина a называется действительной полуосью.*

Свойство 2.6. *Отрезок B_1B_2 и его длина $2b$ называется мнимой осью, а отрезок OB_2 и его длина b называется мнимой полуосью.*

Определение 2.4. Отрезок F_1F_2 и его длина $2c$ называется фокусным расстоянием.

Определение 2.5. Точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ называются вершинами гиперболы.

Теперь, используя приведённые выше свойства, построим гиперболу (рис. 4).

2.3. Асимптоты гиперболы. Эксцентриситет гиперболы

Определение 2.6. Прямые, проходящие через начало координат и имеющие угловые коэффициенты $\dfrac{b}{a}$ и $-\dfrac{b}{a}$ называются асимптотами гиперболы.

Асимптоты гиперболы определяются уравнениями

$$\boxed{y = \frac{b}{a}x; \quad y = -\frac{b}{a}x.} \tag{2.2}$$

Теорема 2.3. *Точки гиперболы неограниченно приближаются к асимптотам, но не пересекают их.*

◀ Ввиду симметрии гиперболы, рассмотрим только точки гиперболы, лежащие в первой координатной четверти (рис. 5). Перпендикулярно оси абсцисс, правее вершины гиперболы, проведём некоторую прямую a. Тогда уравнение этой прямой: $x = h$, где h — некоторое число такое, что $h > a$. Обозначим через M точку пересечения этой прямой с гиперболой, через L — с асимптотой, а через N — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на асимптоту. Очевидно, что точка M имеет координаты (h, y_0). Поскольку эта точка принадлежит гиперболе, то $\dfrac{h^2}{a^2} - \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$. Следовательно, $y_0 = \dfrac{b}{a}\sqrt{h^2 - a^2}$. Таким образом, $M(h, \dfrac{b}{a}\sqrt{h^2 - a^2})$. Точка L имеет ту же абсциссу, что и точка M. Пусть точка L имеет координаты (h, y_1). Так как она лежит на асимптоте, то $y_1 = \dfrac{b}{a}h$. Следовательно, $L(h, \dfrac{b}{a}h)$. Очевидно, что растояние между точками M и L равно разности их ординат. Поскольку $\dfrac{b}{a}h > \dfrac{b}{a}\sqrt{h^2 - a^2}$, то точка M всегда расположена ниже точки L. Отсюда следует, что рассматриваемая ветвь гиперболы никогда не пересекает асимптоту.

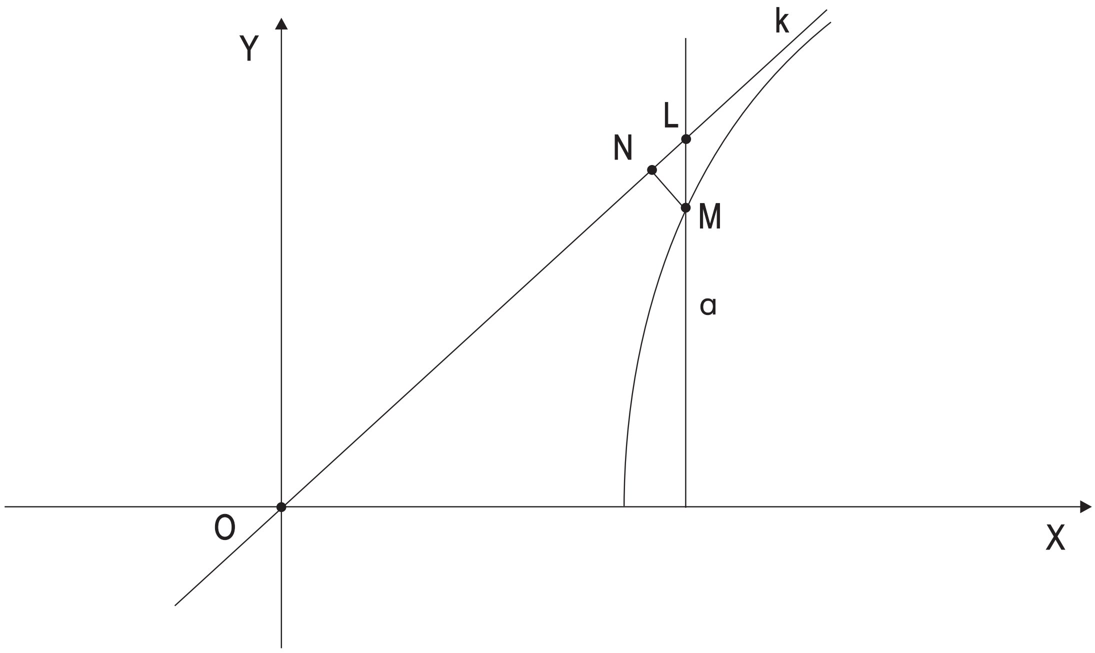


Рис. 5

По построению, $MN < ML$. Ввиду отмеченного выше, $ML = \frac{b}{a}h - \frac{b}{a}\sqrt{h^2 - a^2} = \frac{b}{a}(h - \sqrt{h^2 - a^2})$. Следовательно, $MN < \frac{b}{a}(h - \sqrt{h^2 - a^2})$. При возрастании ординаты точки M (значения h), значение выражения в правой части последнего равенства уменьшается, поэтому точки гиперболы неограниченно приближаются к асимптоте. ▶

Определение 2.7. Отношение фокусного расстояния гиперболы к длине ее действительной оси называется эксцентриситетом гиперболы и обозначается через ε:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a}.} \tag{2.3}$$

Замечание 2.1. *Начав изучать гиперболу, мы выбрали систему координат таким образом, чтобы фокусы лежали на оси абсцисс. Возможен и другой часто используемый выбор системы координат, когда фокусы лежат на оси ординат (рис. 59).*

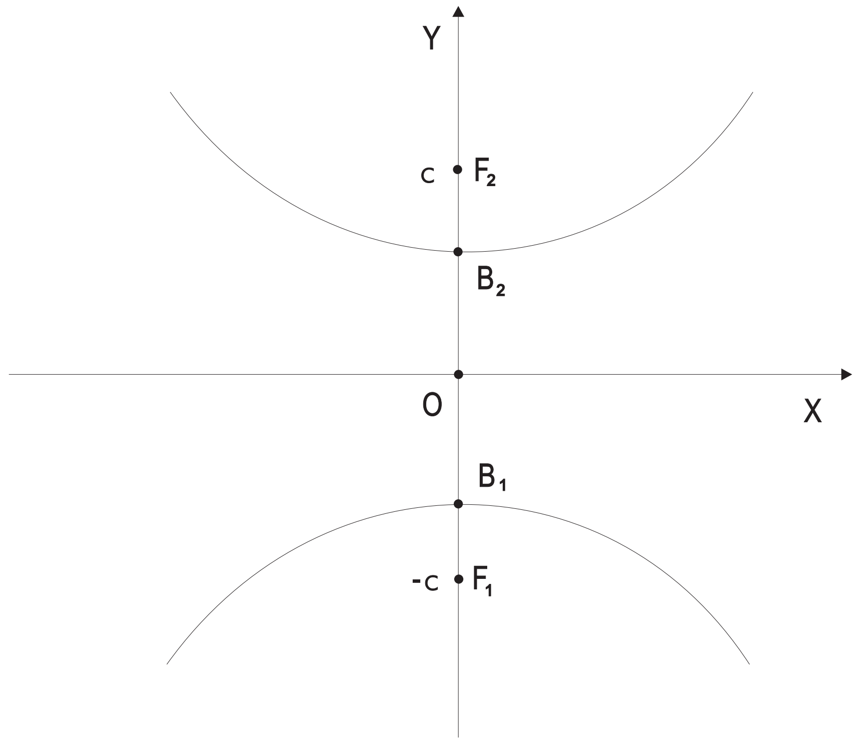


Рис. 6

3. Тема 3. Парабола

1. Парабола и её каноническое уравнение

2. Исследование формы параболы по её каноническому уравнению

3.1. Парабола и её каноническое уравнение

Определение 3.1. Параболой называется множество точек плоскости для каждой из которых расстояние до данной точки, называемой фокусом равно расстоянию до данной прямой, называемой директрисой.

Обозначим фокус параболы через F, а директрису через d. Систему координат выберем таким образом, чтобы фокус лежал на положительном направлении оси абсцисс, директриса была параллельна оси ординат и начало координат находилось посередине между фокусом и директрисой. Расстояние между фокусом и директрисой обозначим через p. Тогда очевидно, что $F(\frac{p}{2}, 0)$ и директриса имеет уравнение $x = -\frac{p}{2}$

Теорема 3.1. *Для того, чтобы точка M принадлежала параболе, необходимо, чтобы её координаты удовлетворяли уравнению*

$$y^2 = 2px,$$

где p — некоторое действительное положительное число.

◀ Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка параболы (рис. 7). Обозначим через N основание перпендикуляра, опущенного из точки M на директрису. По определению параболы, $FM = MN$. Поскольку

$$FM = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}; \qquad MN = |x + \frac{p}{2}|,$$

то

$$\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = |x + \frac{p}{2}|;$$

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4};$$

$$y^2 = 2px.$$

▶

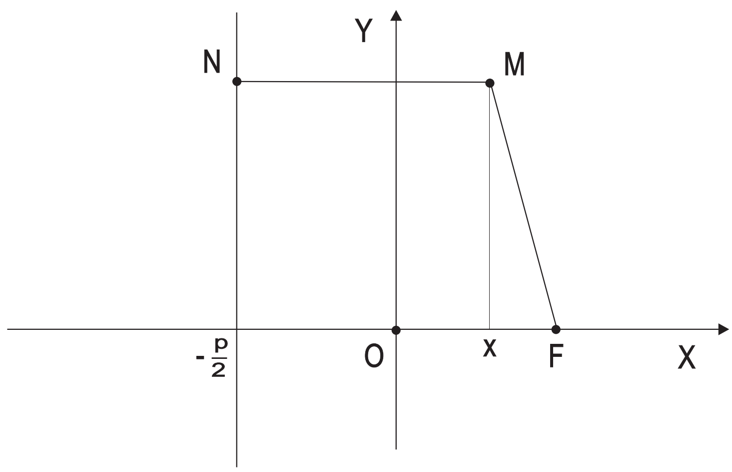


Рис.7

Теорема 3.2. *Если координаты некоторой точки M удовлетворяют уравнению*

$$y^2 = 2px,$$

где p — некоторое действительное положительное число, то эта точка принадлежит некоторой параболе.

◀ Пусть $M(x_1, y_1)$ — некоторая точка такая, что её координаты удовлетворяют уравнению из условия теоремы, т.е. $y_1^2 = 2px_1$. Тогда

$$FM = \sqrt{(x_1 - \frac{p}{2})^2 + y_1^2} = \sqrt{x_1^2 - px_1 + (\frac{p}{2})^2 + 2px_1} =$$

$$\sqrt{(x_1 + \frac{p}{2})^2} = |x_1 + \frac{p}{2}| = MN.$$

▶

Определение 3.2. Уравнение

$$\boxed{y^2 = 2px,} \tag{3.1}$$

где p — некоторое действительное положительное число, называется каноническим уравнением параболы.

3.2. Исследование формы параболы по её каноническому уравнению

Свойство 3.1. *Абсцисса любой точки параболы неотрицательна.*

Свойство 3.2. *Парабола проходит через начало координат.*

Свойство 3.3. *Парабола симметрична относительно оси абсцисс.*

◀ Аналогично свойствам эллипса и гиперболы. ▶

Свойство 3.4. *При неограниченном возрастании абсциссы, ордината возрастает по абсолютной величине.*

◀ Непосредственно из канонического уравнения. ▶

Свойство 3.5. *Отрезок FM называется фокальным радиусом, а величина p — параметром параболы.*

Определение 3.3. Ось абсцисс называется осью симметрии параболы, а точка пересечения параболы с осью абсцисс, которая совпадает с началом координат — вершиной параболы.

Теперь, используя приведённые выше свойства, построим параболу (рис. 8).

Замечание 3.1. *Если систему координат выбрать другим образом, то уравнение параболы будет иметь другой вид. На рис. 9-11 показаны наиболее используемые случаи такого выбора.*

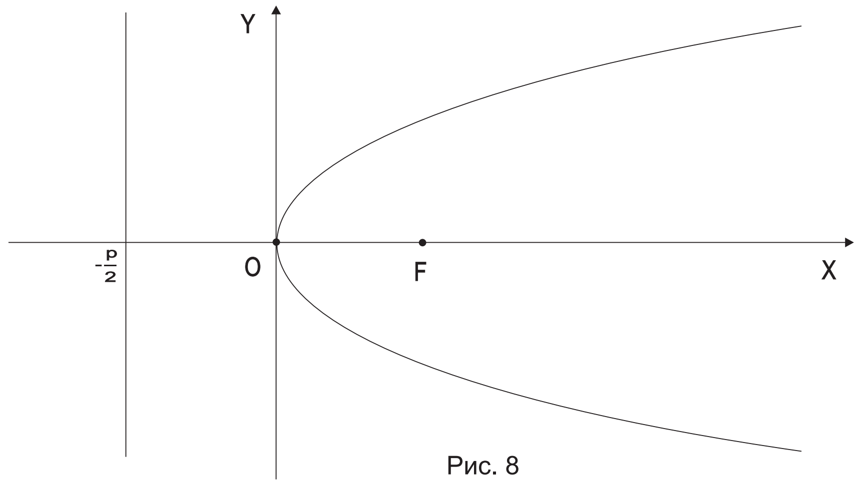


Рис. 8

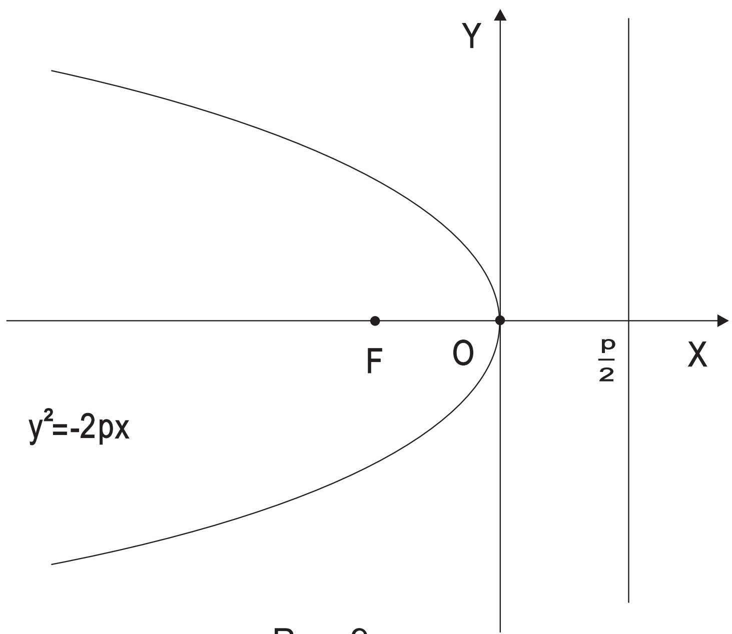


Рис. 9

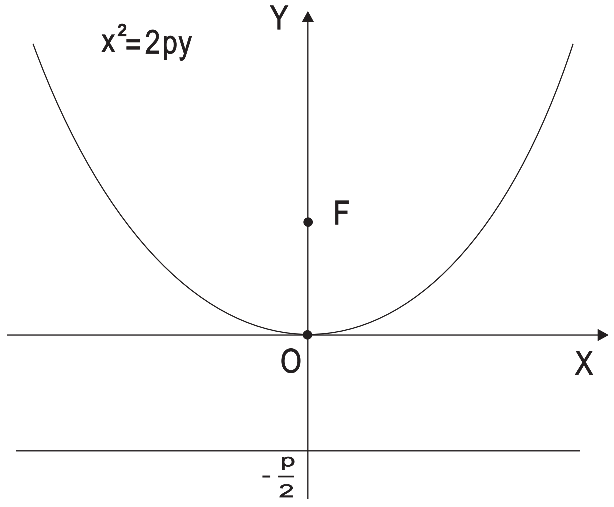


Рис. 10

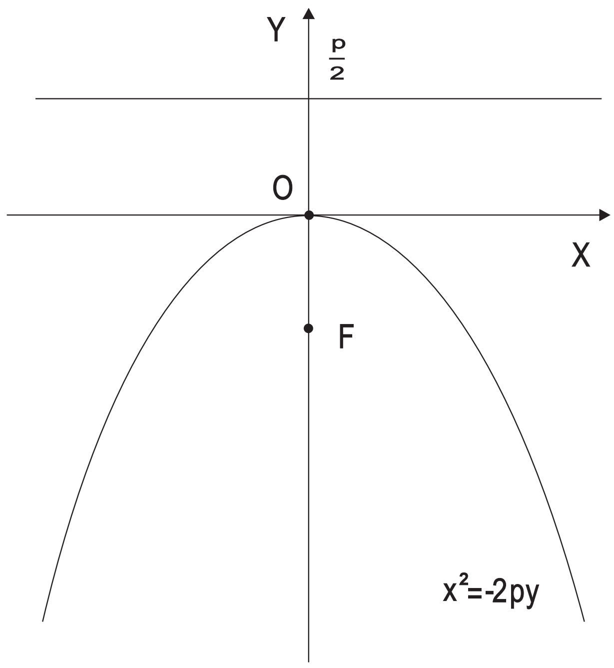


Рис. 11

4. Тема 4. Линии второго порядка в полярных координатах

1. Директориальное свойство линий второго порядка
2. Уравнение линии второго порядка в полярных координатах

4.1. Директориальное свойство линий второго порядка

Определение 4.1. Прямые, параллельные оси ординат и имеющие уравнения

$$\boxed{x = -\frac{a}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad x = \frac{a}{\varepsilon},} \tag{4.1}$$

называются директрисами эллипса.

Поскольку для эллипса $\varepsilon < 1$, то директрисы эллипса эллипс не пересекают (рис. 12).

Определение 4.2. Прямые, параллельные оси ординат и имеющие уравнения

$$\boxed{x = -\frac{a}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad x = \frac{a}{\varepsilon},} \tag{4.2}$$

называются директрисами гиперболы.

Поскольку для гиперболы $\varepsilon > 1$, то директрисы гиперболы гиперболу не пересекают (рис. 13).

Теорема 4.1. *Отношение расстояния от любой точки эллипса (гиперболы) до фокуса к расстоянию от этой точки до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету.*

◀ Докажем теорему для эллипса. Пусть в некоторой ПДСК-2 дан эллипс. Пусть M — некоторая точка этого эллипса. Расстояние от точки M до фокуса $F(c, 0)$ найдём по (1.3): $r_2 = a - \varepsilon x$. Отметим, что поскольку по свойству эллипса, $-a < x < a$, а также, поскольку для эллипса $\varepsilon < 1$, то очевидно, что $|a - \varepsilon x| = a - \varepsilon x$. Расстояние от той же точки до соответствующей выбранному фокусу директрисы, найдём по формуле

$$d_2 = |\frac{a}{\varepsilon} - x| = |\frac{a - \varepsilon x}{\varepsilon}| = \frac{|a - \varepsilon x|}{\varepsilon} = \frac{a - \varepsilon x}{\varepsilon} = \frac{r_2}{\varepsilon}.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$\frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$$

►

Поскольку для любой точки параболы расстояние до директрисы равно расстоянию до фокуса, то считается, что для параболы $\varepsilon = 1$.

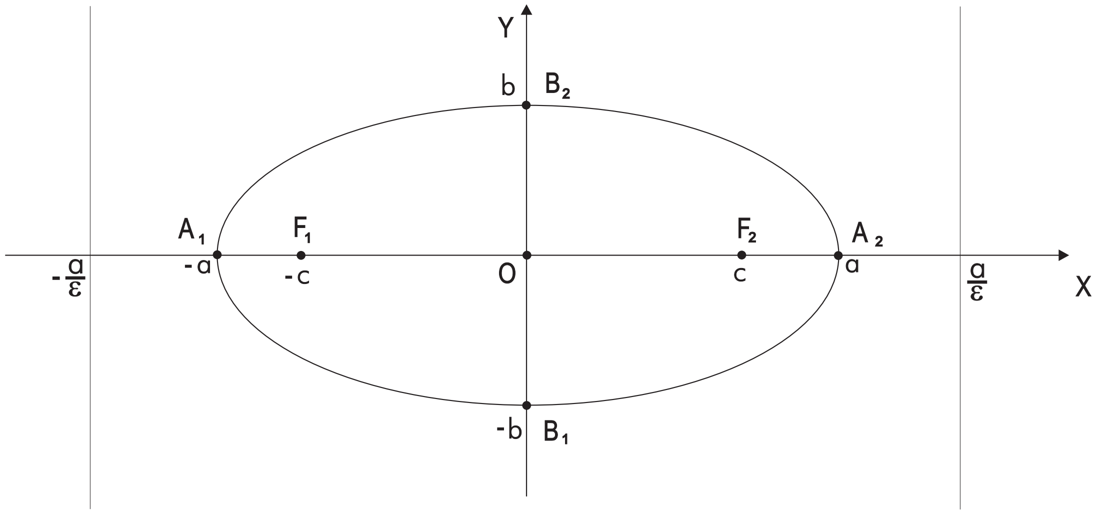


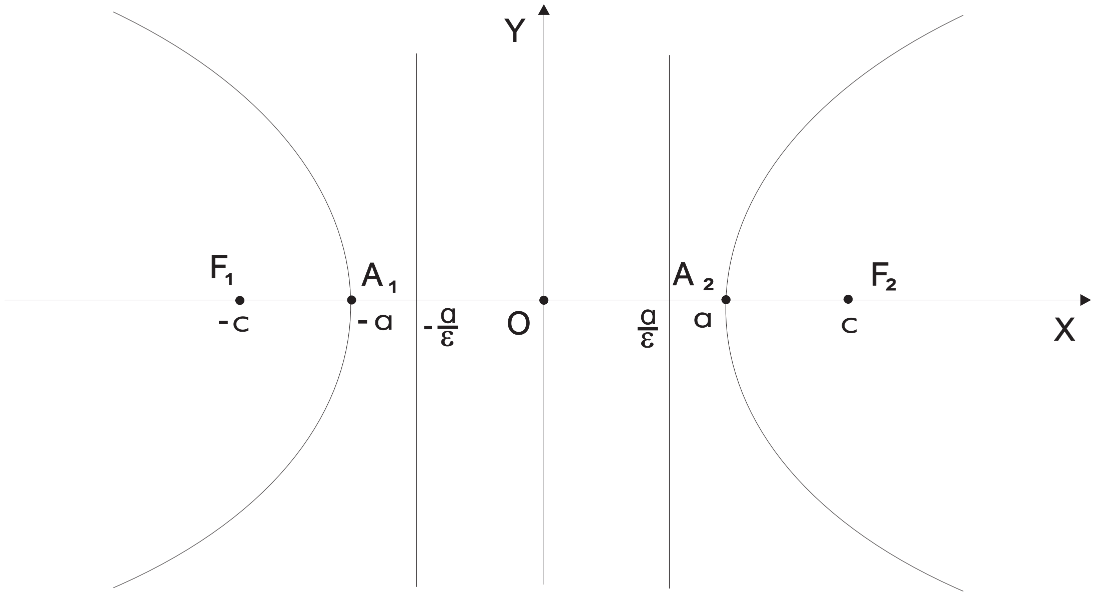
Рис. 12

Таким образом, кривая второго порядка — это множество точек для каждой из которых отношение расстояния до фокуса к расстоянию до соответствующей этому фокусу директрисы, есть величина постоянная, равная эксцентриситету ε, причём для эллипса $\varepsilon < 1$, для параболы, $\varepsilon = 1$, для гиперболы, $\varepsilon > 1$.

4.2. Уравнение линии второго порядка в полярных координатах

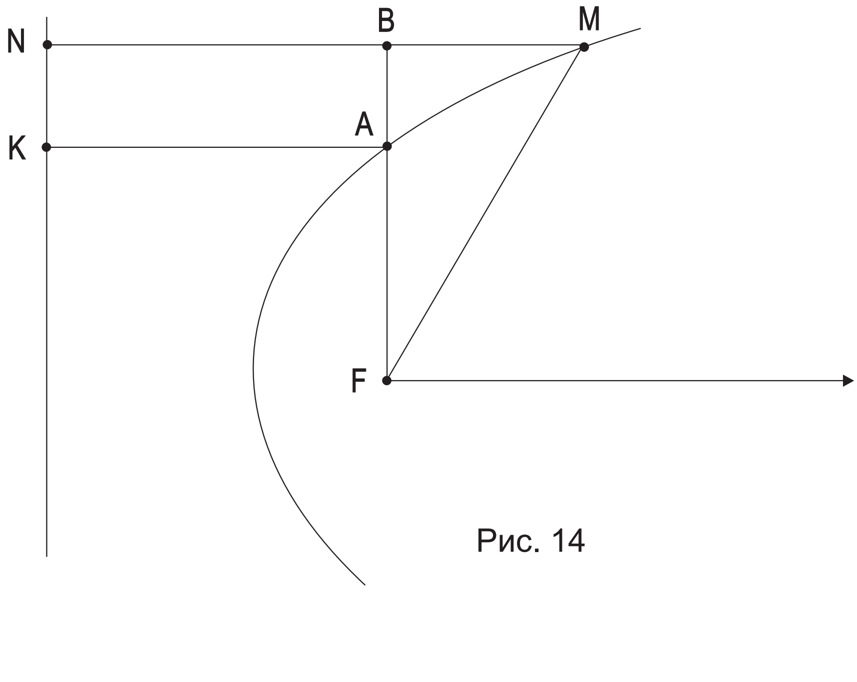
Линия второго порядка может быть задана в полярных координатах уравнением

$$\boxed{\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi},} \tag{4.3}$$



Y
F1
A1
A2
F2
-c
-a
$-\frac{a}{\varepsilon}$
O
$\frac{a}{\varepsilon}$
a
c
X

Рис. 13



N
B
M
K
A
F

Рис. 14

◀ Пусть F— фокус линии второго порядка, d — соответствующая ему директриса. Через фокус проведём прямую, пересекающую линию второго порядка в некоторой точке. Пусть это будет точка M. Обозначим через N основание перпендикуляра, опущенного из точки M на директрису. Ввиду вышедоказанной теоремы,

$$\frac{FM}{MN} = \varepsilon, \tag{$*$}$$

где ε — эксцентриситет.

Выберем полярную систему координат таким образом, чтобы фокус F был полюсом, а полярная ось была направлена в сторону от директрисы и была директрисе перпендикулярна (рис. 14).

Проведём через фокус прямую a, перпендикулярную полярной оси. Пусть эта прямая пересекает линию второго порядка в точке A. Пусть (ρ, φ) — полярные координаты точки M. Через B обозначим основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую MN. Тогда $MN = MB + BN$ и, кроме того, $BM = FM\cos\varphi = \rho\cos\varphi$.

Обозначим через K основание перпендикуляра, проведённого из точки A на директрису. Тогда очевидно, что $BN = AK$. Поскольку точка A лежит на линии второго порядка, то для неё так же выполняется соотношение $\dfrac{AF}{AK} = \varepsilon$. Отсюда, обозначив $AF = p$, получим: $AK = \dfrac{p}{\varepsilon}$. Поэтому $MN = \rho\cos\varphi + \dfrac{p}{\varepsilon}$. Теперь используем (*):

$$\frac{\rho}{\rho\cos\varphi + \dfrac{p}{\varepsilon}} = \varepsilon;$$

$$\rho = \varepsilon(\rho\cos\varphi + \frac{p}{\varepsilon});$$

$$\rho(1 - \varepsilon\cos\varphi) = p.$$

Отсюда и следует полярное уравнение линии второго порядка. ▶

Параметр p для параболы равен параметру параболы, для эллипса и гиперболы он находится по формуле

$$\boxed{p = \frac{b^2}{a}} \tag{4.4}$$

◀ Действительно, если эллипс или гипербола заданы каноническими уравнениями, то $F(c,0)$. Поэтому $A(c,p)$. Подставив координаты точки A в каноническое уравнение, получим:

$$\frac{c^2}{a^2} \pm \frac{p^2}{b^2} = 1;$$

$$\frac{p^2}{b^2} = 1 \pm \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 \pm c^2}{a^2}.$$

Для эллипса $b^2 = a^2 - c^2$, а для гиперболы $b^2 = a^2 + c^2$. Поэтому как для эллипса, так и для гиперболы, получаем: $p^2 = \dfrac{b^4}{a^2}$ и, поскольку $p,\ a,\ b$ — положительные числа, то $p = \dfrac{b^2}{a}$. ▶

Замечание 4.1. *Уравнение* (4.3) *описывает все точки параболы и все точки эллипса. Для случая гиперболы этим уравнением описываются лишь точки правой ветви. Используя аналогичные рассуждения, оставив ту же систему полярных координат, можно получить полярное уравнение левой ветви гиперболы:*

$$\rho = \frac{-p}{1 - \varepsilon \cos\varphi}$$

Хотя, если использовать симметрию гиперболы относительно её мнимой оси, то можно обойтись и без него.

5. Тема 5. Поверхности, образуемые с помощью вращения

1. Поверхности вращения

2. Поверхности, образуемые из поверхностей вращения с помощью преобразования сжатия

5.1. Поверхности вращения

Определение 5.1. Вращением плоской линии Ф вокруг данной прямой a называется такое движение линии Ф, при котором каждая точка A этой линии в плоскости, перпендикулярной прямой a описывает окружность с центром в точке A_1, где A_1 — проекция точки A на эту прямую. Прямая a называется осью вращения. (рис. 15)

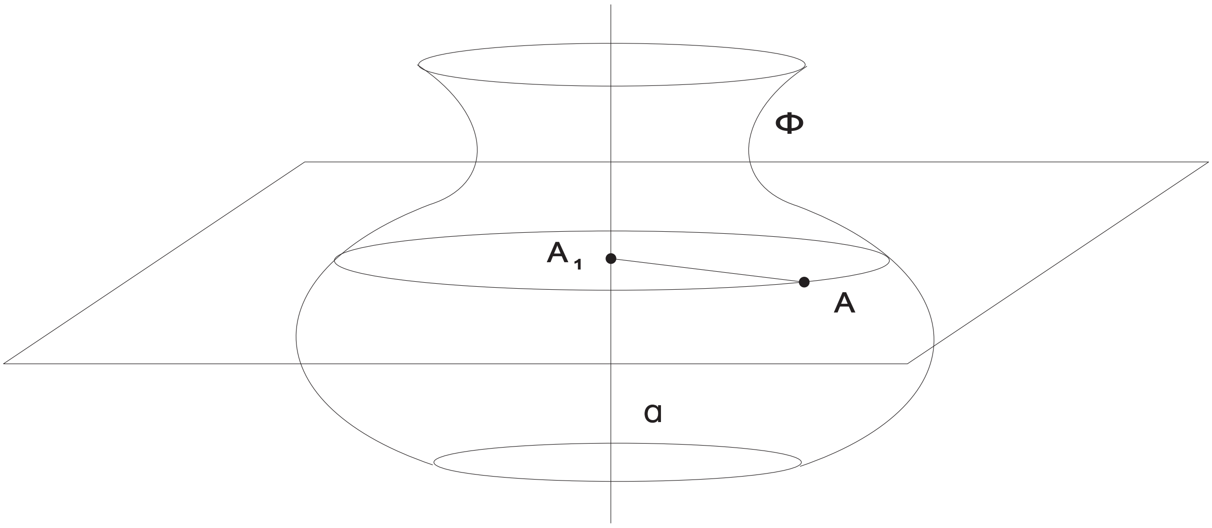


Рис. 15

Определение 5.2. Поверхностью вращения называется фигура, образованная вращением некоторой линии вокруг некоторой оси в пространстве.

Очевидно, что ось вращения является осью симметрии поверхности вращения. Поэтому для вывода канонических уравнений различных типов поверхностей вращения, будем рассматривать те случаи, когда осью вращения является одна из координатных осей.

Как уже отмечалось выше, уравнением поверхности называется такое соотношение $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z)$ — некоторый многочлен от переменных x, y, z определённой степени, что координаты точек данной поверхности и только они удовлетворяют этому соотношению.

Пусть в некоторой ПДСК-3 нам дана некоторая поверхность вращения вокруг оси OZ и пусть эта поверхность образована вращением некоторой линии Ф. Эта линия может быть задана как линия пересечения двух поверхностей, определённых уравнениями $F_1(x, y, x) = 0$ и $F_2(x, y, z) = 0$:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0; \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Если возможно в этих уравнениях x и y выразить как функции от

z, то мы получим систему:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(z); \\ y = \varphi_2(z). \end{cases} \qquad (**)$$

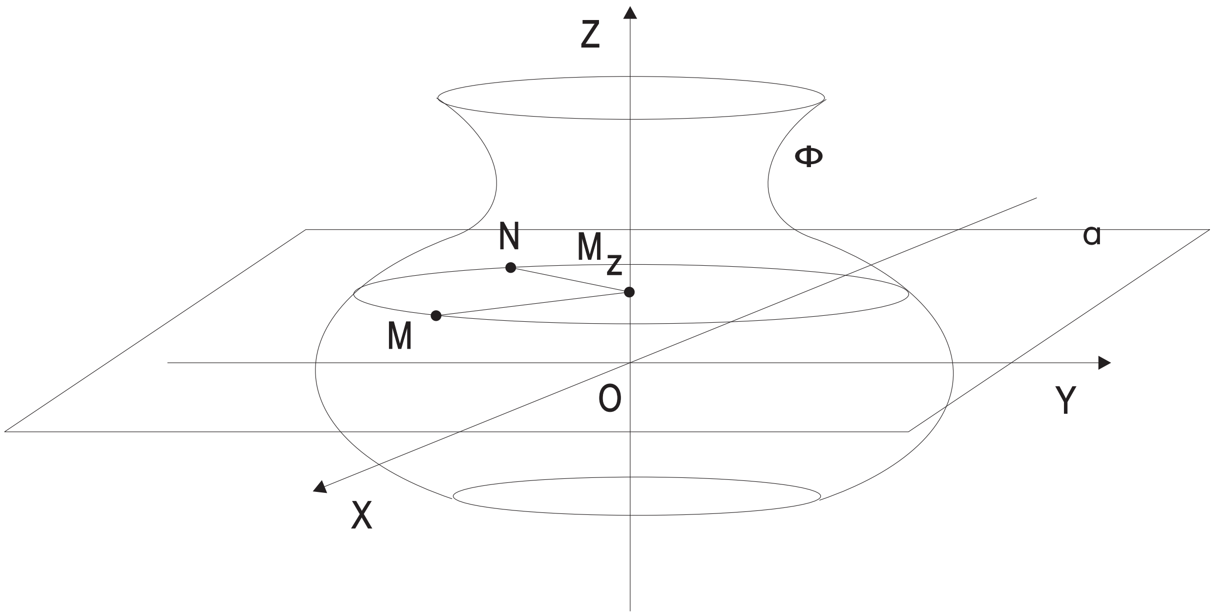


Рис. 16

Пусть точка $M(X, Y, Z)$ — некоторая фиксированная точка этой поверхности. В некоторой плоскости α, перпендикулярной оси OZ, она описывает окружность с центром в точке $M_z(0, 0, Z)$ и радиусом $r = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Пусть $N(x, y, Z)$ — произвольная точка этой окружности (рис. 16). Тогда $M_zN = \sqrt{x^2 + y^2}$, но $M_zN = M_zM$. Следовательно, $\sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Возведя в квадрат, получаем: $X^2 + Y^2 = x^2 + y^2$.

Подставив теперь выражения переменных x и y из (**), получим: $X^2 + Y^2 = \varphi^2(z) + \varphi^2(z)$ — уравнение поверхности вращения линии (*) вокруг оси OZ.

Итак, для того чтобы получить уравнение поверхности вращения плоской линии (*) вокруг оси OZ, нужно привести систему (*) к виду (**), возвести обе части полученных уравнений в квадрат и сложить уравнения почленно.

Вывод уравнения поверхности вращения вокруг других координатных осей аналогичен.

Любая поверхность вращения может быть образована вращением некоторой плоской кривой (в этом нетрудно убедиться, используя школьную стереометрию). Поэтому каждому типу плоских линий второго порядка соответствует некоторый тип поверхностей вращения.

1. Прямая:

$$\begin{cases} x = a; \\ y = 0. \end{cases}$$

Вращая её вокруг оси OZ, получим круговой цилиндр (рис. 17):

$$\boxed{x^2 + y^2 = a^2} \tag{5.1}$$

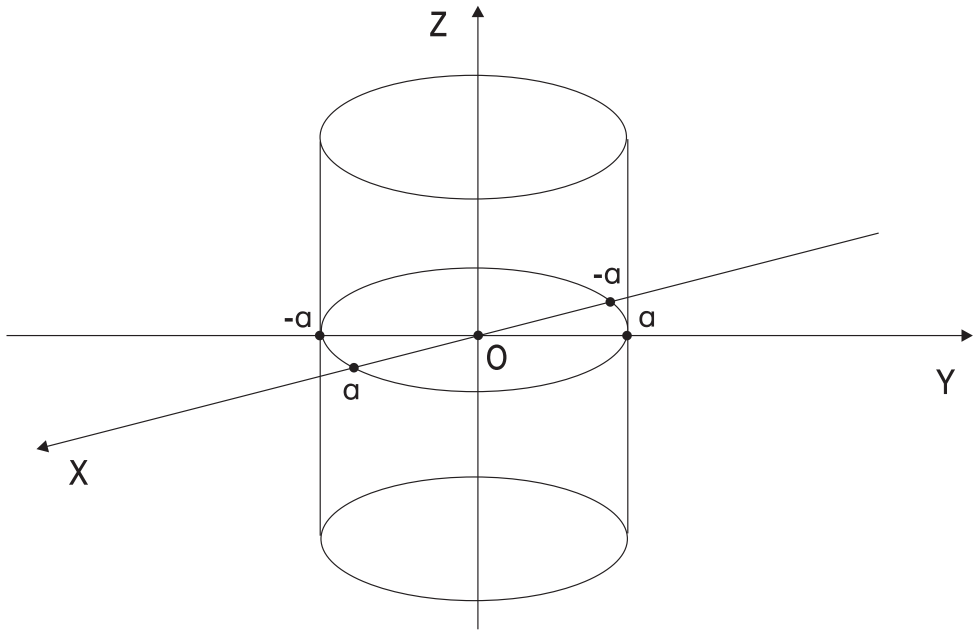


Рис. 17

2. Окружность :

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = a^2; \\ y = 0. \end{cases}$$

Вращая её вокруг оси OZ, получим сферу (рис. 18):

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = a^2} \tag{5.2}$$

3. Эллипс:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1; \\ y = 0. \end{cases}$$

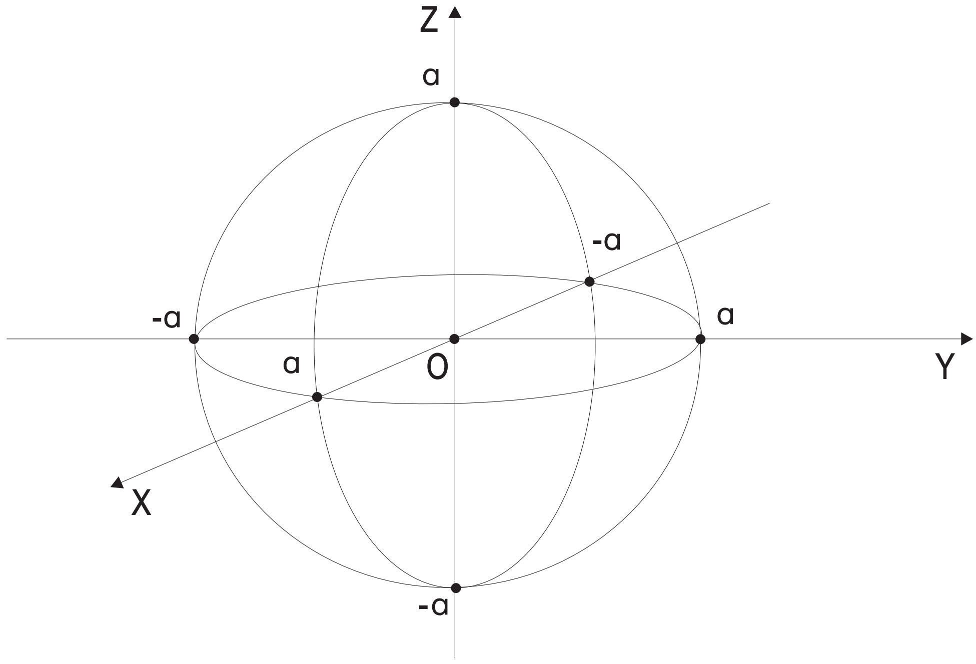


Рис.18

Вращая его вокруг оси OZ, получим эллипсоид вращения (рис. 19):

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1} \tag{5.3}$$

Окружность можно вращать вокруг любой из осей, при этом всегда получается сфера. При изменении оси вращения, эллипсоид лишь вытягивает свою форму. При вращении гиперболы, замена осей вращения приводит к качественным изменениям поверхности.

4. Гипербола:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1; \\ y=0. \end{cases}$$

Вращая её вокруг оси OZ, получим однополостный гиперболоид вращения (рис. 20):

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1} \tag{5.4}$$

Вращая же эту гиперболу вокруг оси OX, получим двуполостный

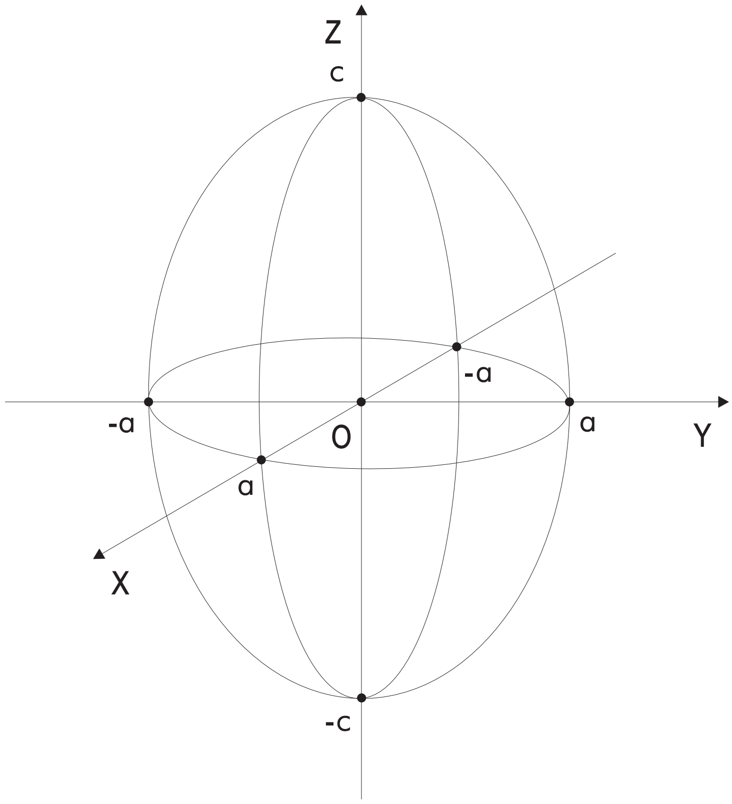


Рис. 19

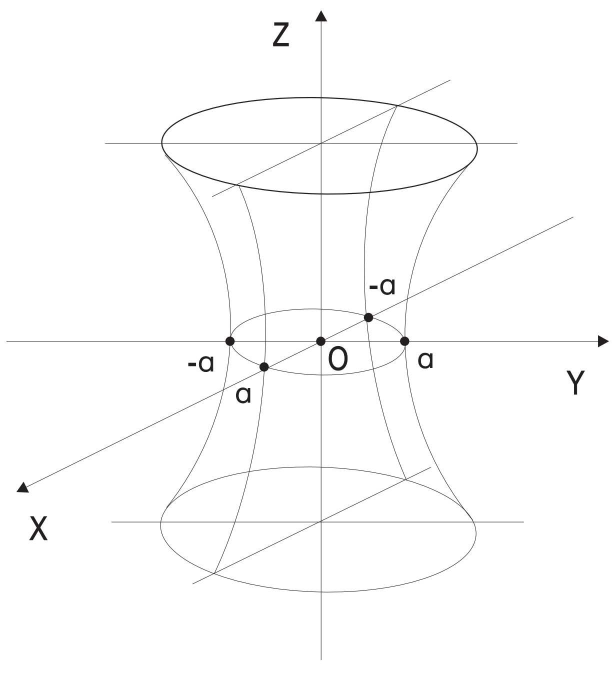


Рис. 20

гиперболоид вращения (рис. 21):

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1} \tag{5.5}$$

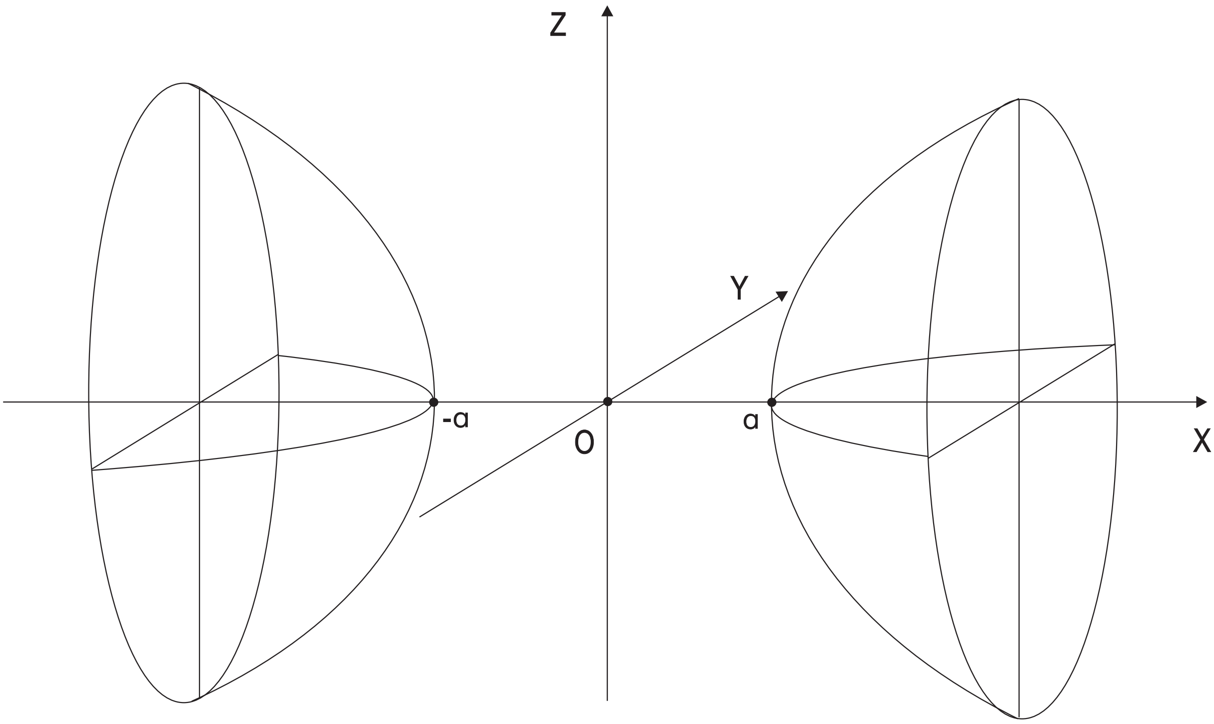


Рис. 21

5. Парабола:

$$\begin{cases} x^2 = 2pz; \\ y = 0. \end{cases}$$

Вращая её вокруг оси OZ, получим параболоид вращения (рис. 22):

$$\boxed{\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p} = 2z} \tag{5.6}$$

Если же ветви параболы вытянуты вдоль отрицательного направления оси OZ, т.е. парабола задаётся уравнением

$$\begin{cases} x^2 = -2pz; \\ y = 0, \end{cases}$$

то получим параболоид вращения другой ориентации (рис. 23):

$$\boxed{\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p} = -2z} \tag{5.7}$$

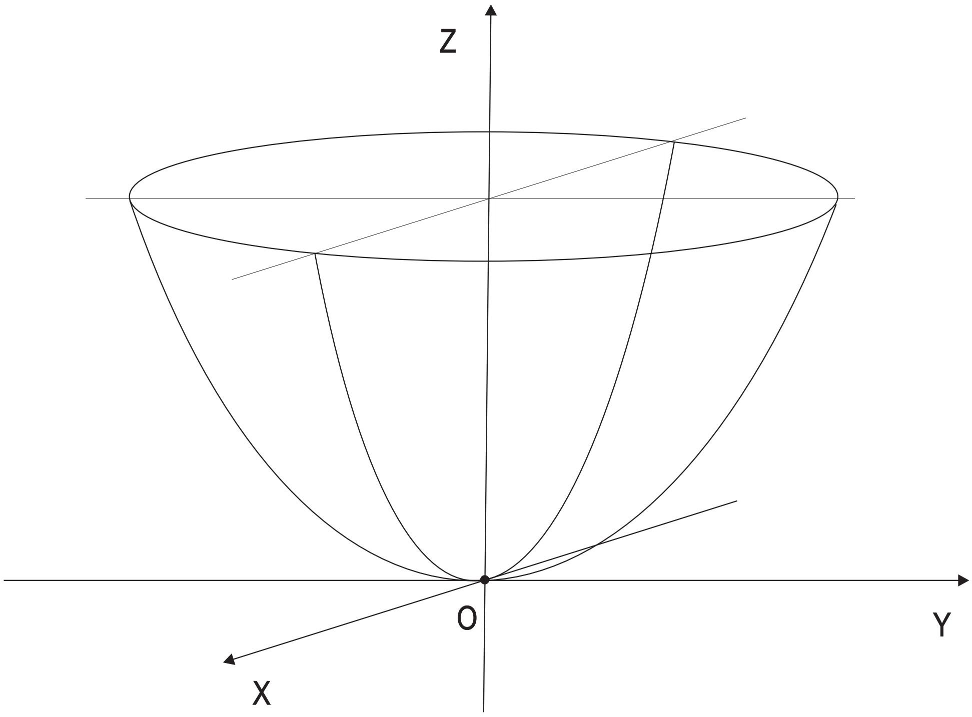


Рис. 22

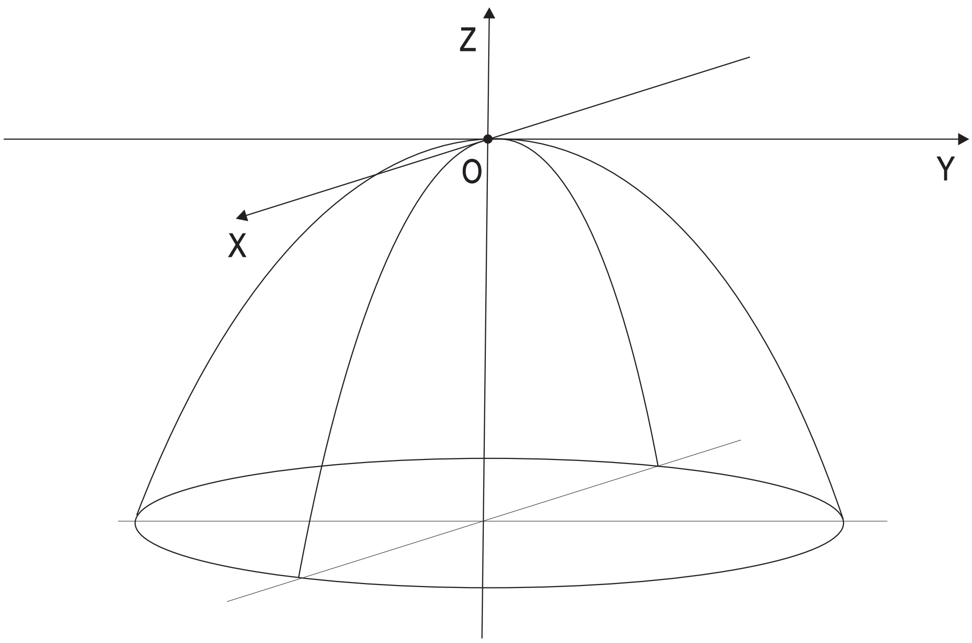


Рис. 23

5.2. Поверхности, образуемые из поверхностей вращения с помощью преобразования сжатия

Используя преобразование сжатия из полученных выше поверхностей вращения можно легко получить другие поверхности.

1. Круговой цилиндр: применив к нему преобразование сжатия к плоскости OXZ по формулам

$$\begin{cases} x = X; \\ y = \dfrac{a}{b}Y; \\ z = Z, \end{cases}$$

получим эллиптический цилиндр (рис. 24):

$$\boxed{\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.} \tag{5.8}$$

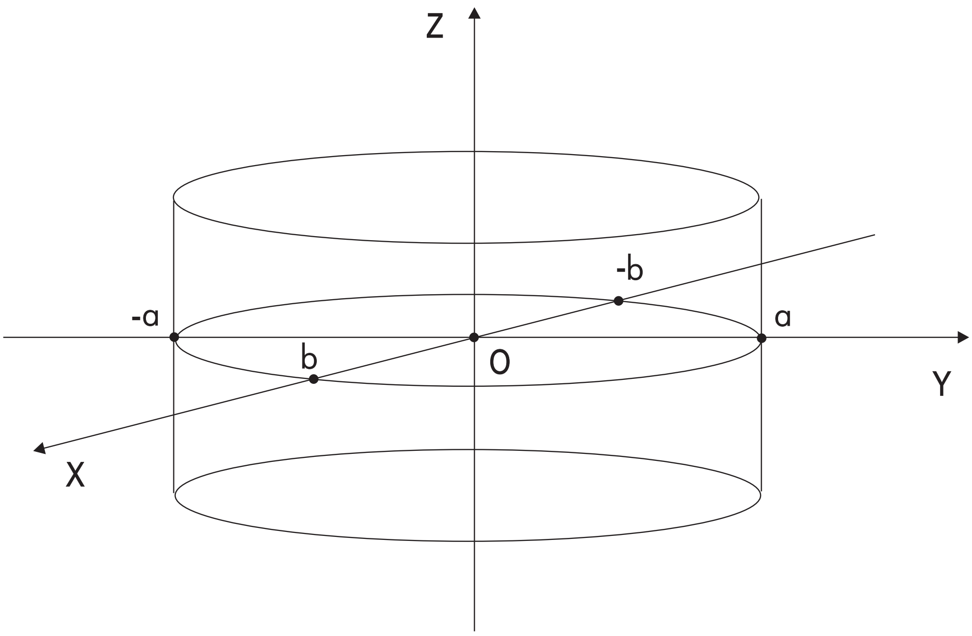


Рис. 24

2. Эллипсоид вращения: применив к нему преобразование сжатия к координатной плоскости OXZ по формулам

$$\begin{cases} x = X; \\ y = \dfrac{a}{b}Y; \\ z = Z, \end{cases}$$

получим трёхосный эллипсоид (рис. 25):

$$\boxed{\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1.} \tag{5.9}$$

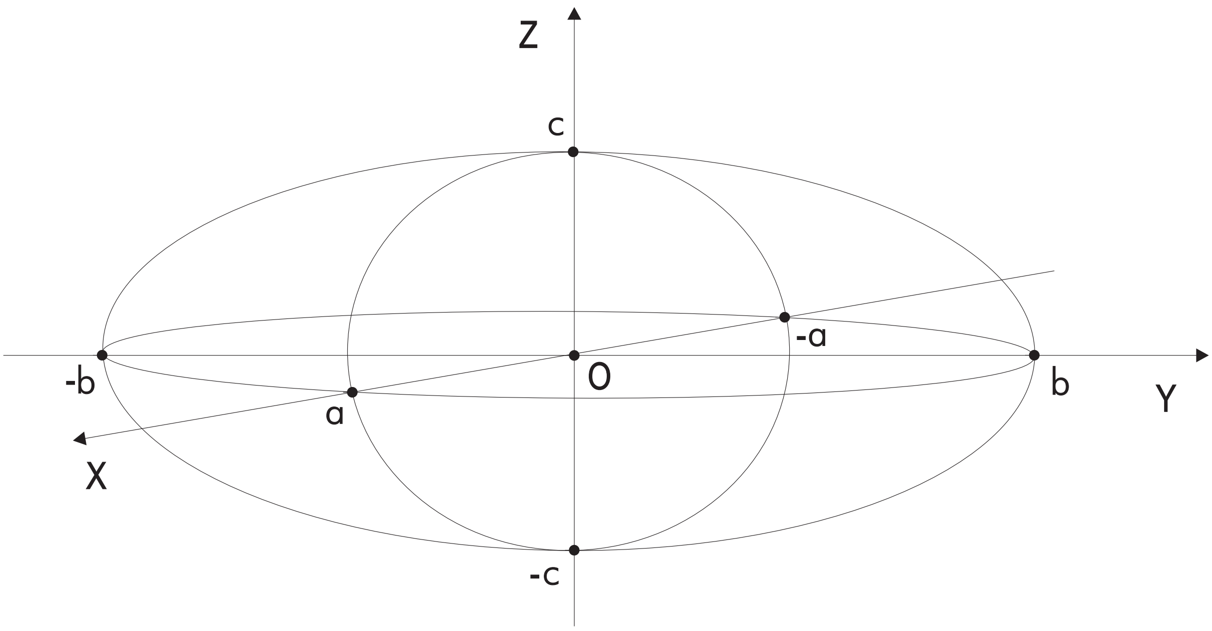


Рис. 25

3. Однополостный гиперболоид вращения: применив к нему преобразование сжатия к координатной плоскости OXZ по формулам

$$\begin{cases} x = X; \\ y = \dfrac{a}{b}Y; \\ z = Z, \end{cases}$$

получим однополостный гиперболоид (рис. 26):

$$\boxed{\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1.} \tag{5.10}$$

4. Двуполосный гиперболоид вращения: применив к нему преобразование сжатия к координатной плоскости OXZ по формулам

$$\begin{cases} x = X; \\ y = \dfrac{c}{b}Y; \\ z = Z, \end{cases}$$

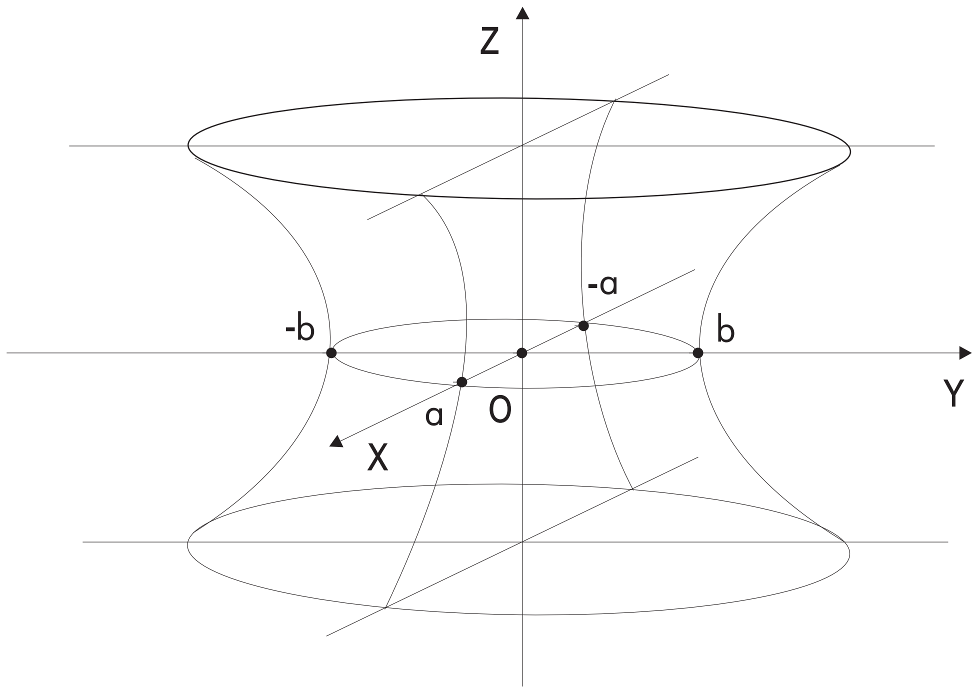


Рис. 26

получим двуполостный гиперболоид (рис. 27):

$$\boxed{\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1.} \tag{5.11}$$

5. Параболоид вращения: применив к нему преобразование сжатия к координатной плоскости OXZ по формулам

$$\begin{cases} x = X; \\ y = \dfrac{p}{q}Y; \\ z = Z, \end{cases}$$

где $q > 0$, получим эллиптический параболоид (рис. 28):

$$\boxed{\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 2Z.} \tag{5.12}$$

Замечание 5.1. *Мы не рассмотрели случаи сжатия сферы и параболоида вращения, ветви образующей которого направлены вниз, считая эти случаи тривиальными.*

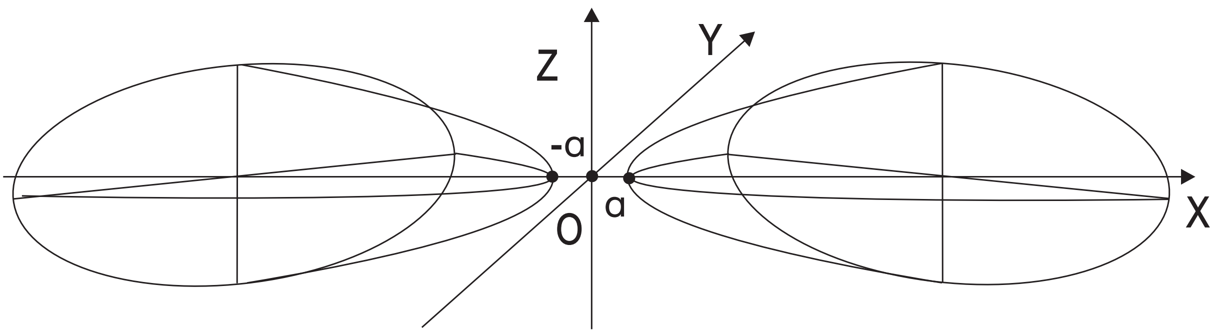


Рис. 27

6. Тема 6. Линейчатые поверхности, образованные движением прямой по направляющей

1. **Конические поверхности**
2. **Цилиндрические поверхности**

6.1. Конические поверхности

Определение 6.1. Конической поверхностью или просто конусом называется поверхность, которая образуется движением некоторой прямой (образующей), проходящей через неподвижную точку (вершину) и пересекающей неподвижную линию (направляющую).

Пусть дан некоторый эллипс

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = c, \end{cases} \qquad (*)$$

где $c > 0$.

В качестве вершины конуса выберем начало координат. Пусть $M(x, y, c)$ — некоторая произвольная точка эллипса, а $N(X, Y, Z)$ — любая точка прямой (образующей). Так как образующая проходит через точку O(0, 0, 0), то координаты точки N будут удовлетворять уравнению прямой, проходящей через точки M и O:

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{c}.$$

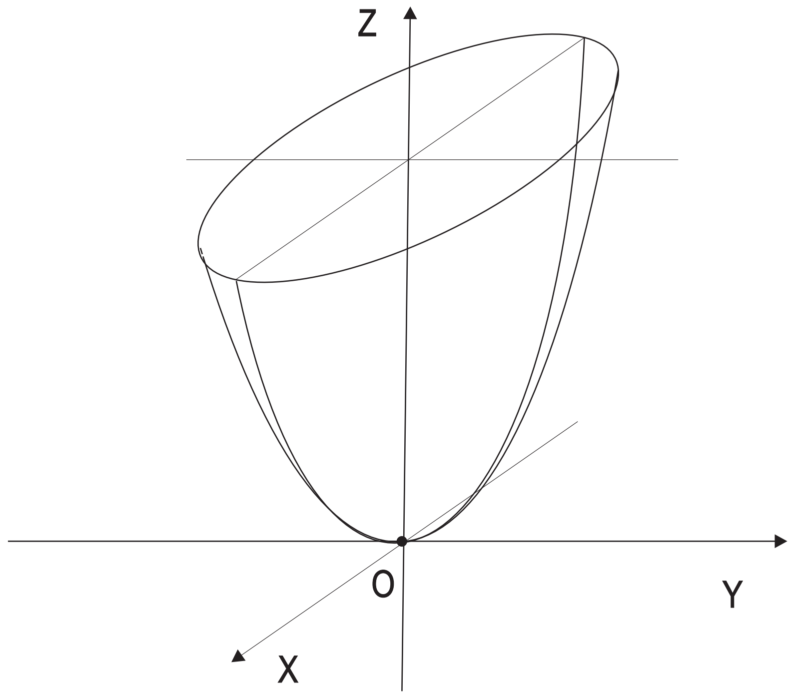


Рис. 28

.

Отсюда возможно выразить $x = \dfrac{Xc}{Z}$ и $y = \dfrac{Yc}{Z}$. Подставив эти выражения в (*), получим уравнение конической поверхности (рис. 29):

$$\boxed{\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0.} \qquad (6.1)$$

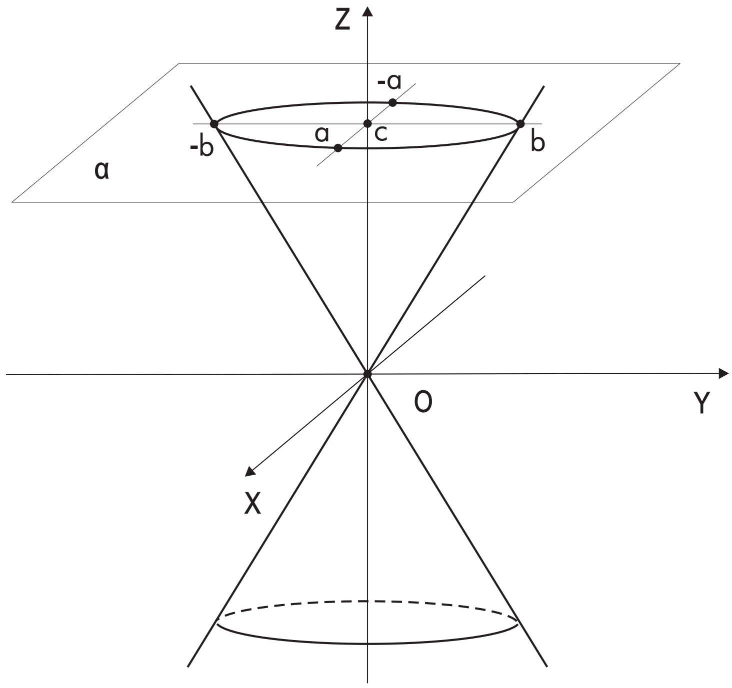


Рис. 29

Поскольку каждая произвольная точка рассмотренной конической поверхности лежит на некотором эллипсе, центр которого находится на оси OZ, то симметричная ей относительно указанной оси точка так же принадлежит поверхности. Поэтому очевидно, что ось OZ рассмотренной поверхности является её осью симметрии.

Замечание 6.1. *Мы выбрали в качестве направляющей построенной конической поверхности некоторый эллипс. Возникает вопрос: какая поверхность получится, если в качестве направляющей взять другую линию второго порядка? Если коническую поверхность, полученную выше пересечь некоторой плоскостью, то вид линии, получаемой в сечении будет зависеть от угла между осью симметрии поверхности и пересекающей плоскостью (рис. 30). Располагая эту плоскость под различными углами, мы получим в сечении параболу (плоскость* α_1*),* *гиперболу (плоскость α_2) и эллипс (плоскость α_3). При этом указанные линии служат направляющими для рассматриваемой конической поверхности.*

Таким образом, полученная нами коническая поверхность является единственным типом конической поверхности, направляющей которой является линия второго порядка.

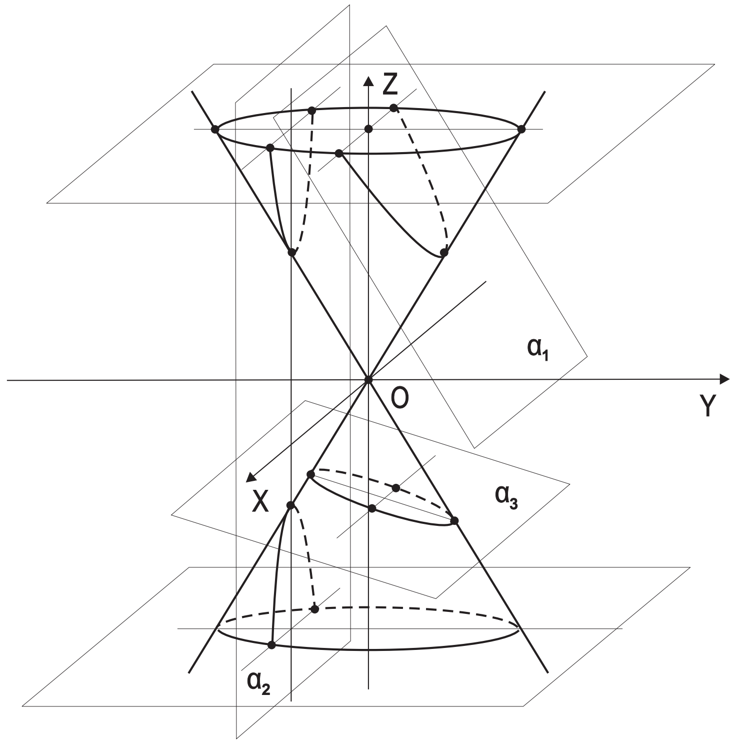


Рис. 30

6.2. Цилиндрические поверхности

Определение 6.2. Цилиндрической поверхностью или цилиндром называется поверхность, которая образуется движением некоторой прямой (образующей), сохраняющей своё направление и пересекающей некоторую неподвижную линию (направляющую).

Выше мы рассмотрели один из случаев цилиндрической поверхности — эллиптический цилиндр. Кроме указанной существует ещё две поверхности этого типа, направляющими которых являются парабола и гипербола.

1. **парабола**, заданная системой

$$\begin{cases} y^2 = 2px; \\ z = 0, \end{cases}$$

выступая в качестве направляющей, образует параболический цилиндр (рис. 31), который имеет следующее уравнение:

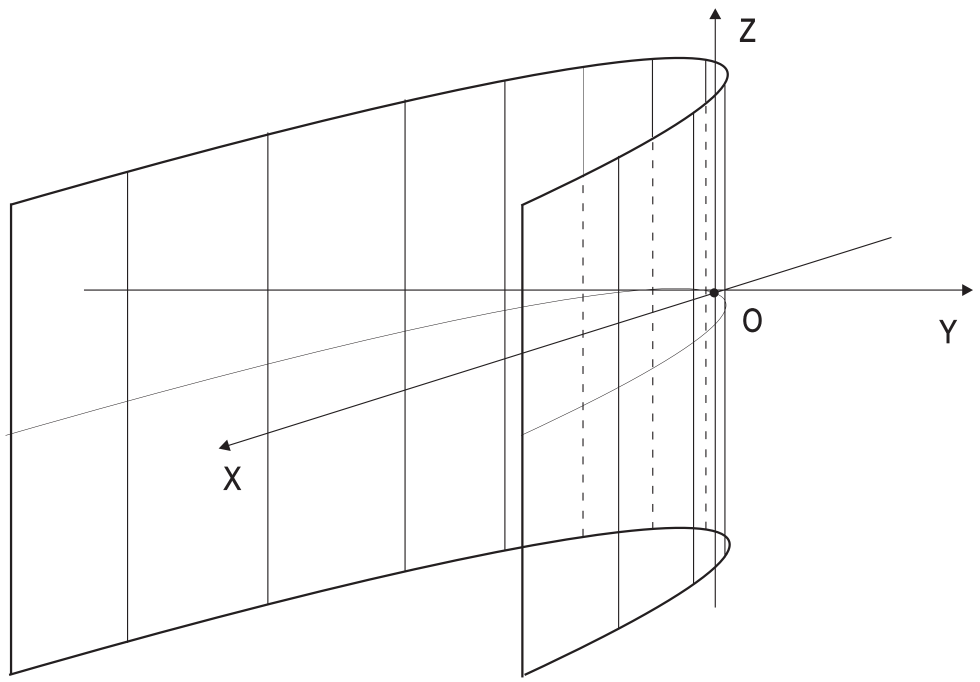


Рис. 31

$$\boxed{y^2 = 2px.} \tag{6.2}$$

2. **гипербола**, заданная системой

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1; \\ z = 0, \end{cases}$$

выступая в качестве направляющей, образует гиперболический цилиндр (рис. 32), который имеет следующее уравнение:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.} \tag{6.3}$$

Замечание 6.2. *Любое уравнение второго порядка относительно двух переменных в пространстве определяет некоторую цилиндрическую поверхность. Действительно, пусть* (x_1, x_2) *— произвольное решение*

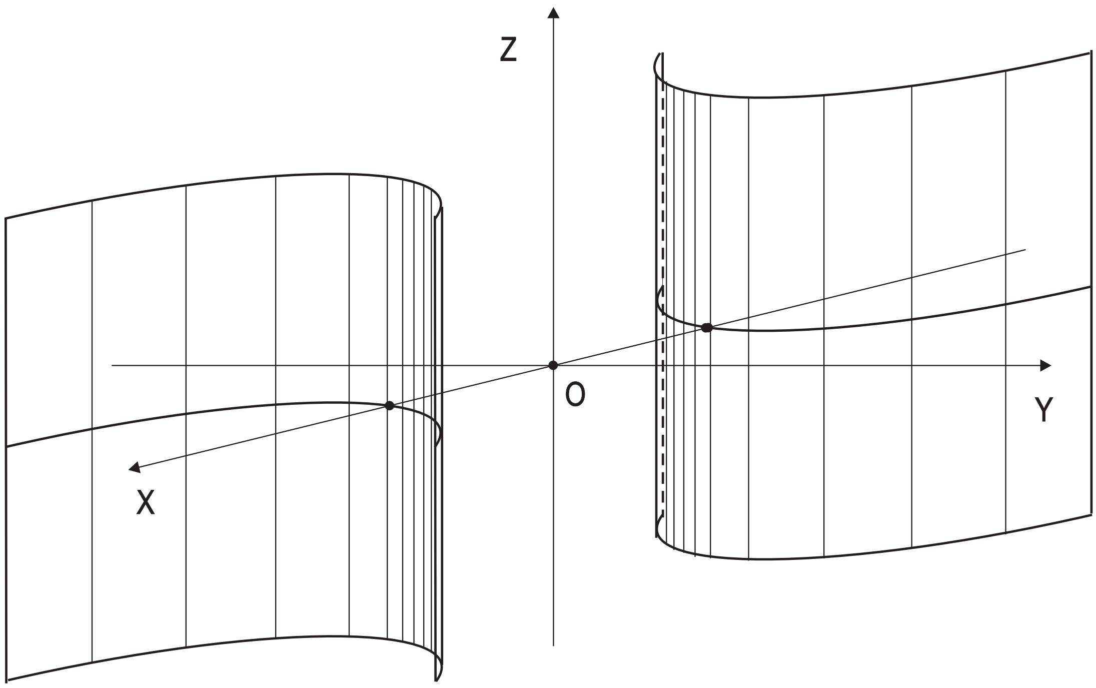


Рис. 32

некоторого уравнения второго порядка относительно двух переменных. Тогда этому решению соответствует бесконечное множество троек (x_1, x_2, x_3)*, где* x_3 *— любое действительное число. В свою очередь эти тройки определяют в некоторой ПДСК-3 бесконечное множество точек, образующее прямую, параллельную той координатной оси, которая соответствует переменной* x_3*.*

7. Тема 7. Линейчатые поверхности, состоящие из семейств образующих

1. Гиперболический параболоид

2. Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида и параболического гиперболоида

7.1. Гиперболический параболоид

Определение 7.1. Гиперболическим параболоидом называется поверхность, определяемая уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z,} \tag{7.1}$$

где $p > 0$, $q > 0$.

В отличие от рассмотренных ранее поверхностей второго порядка, гиперболический параболоид нельзя построить, используя преобразование сжатия. Для того, чтобы построить эту поверхность, применим так называемый метод сечений.

Сначала возьмём координатные плоскости. Пересекая ими поверхность, получим следующие линии второго порядка.

1) плоскость OXY:

$$\begin{cases} z = 0; \\ \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 0. \end{cases}$$

Поскольку $p > 0,\ \ q > 0$, то, разложив второе уравнение системы как разность квадратов, получим, что оно равносильно совокупности двух уравнений:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{q}{p}}x \\ y &= -\sqrt{\frac{q}{p}}x, \end{aligned}$$

т.е. определяет пересекающиеся прямые.

2) плоскость OXZ:

$$\begin{cases} y = 0; \\ \dfrac{x^2}{p} = 2z. \end{cases}$$

Поскольку $p > 0$, то получаем параболу, вершина которой находится в начале координат, а ветви вытянуты вдоль положительного направления оси OZ.

3) плоскость OYZ:

$$\begin{cases} x = 0; \\ -\dfrac{y^2}{q} = 2z. \end{cases}$$

Поскольку $q > 0$, то получаем параболу, вершина которой находится в начале координат, а ветви вытянуты вдоль отрицательного направления оси OZ.

Пересечём теперь поверхность плоскостями $x = \pm k$, где $k > 0$.

4), 5)

$$\begin{cases} x = \pm k \\ \dfrac{k^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z. \end{cases}$$

Поскольку $p > 0, \quad q > 0$, то в отмеченных плоскостях, получим параболы, ветви которых направлены вдоль отрицательного направления оси OZ, а вершины подняты над плоскостью OXY на величину $\dfrac{qk^2}{p}$:

$$y^2 = -2qz + \frac{qk^2}{p}.$$

Исследуем теперь поверхность сечением плоскостью $z = l$, $l < 0$:

6)

$$\begin{cases} z = l \\ \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2l. \end{cases}$$

Поскольку $l < 0, \quad p > 0, \quad q > 0$, то, разделив обе части последнего уравнения на $2l$ и обозначив $a^2 = -2lp; \quad b^2 = -2lq$, получим $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$, т.е. гиперболу, действительная ось которой параллельна оси OY, а вершины находятся в точках $B_1(0, -b, l)$ и $B_2(0, b, l)$.

Исследуем теперь поверхность сечением плоскостью $z = s$, $s > 0$:

7)

$$\begin{cases} z = s \\ \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2s. \end{cases}$$

Поскольку $s > 0, \quad p > 0, \quad q > 0$, то, разделив обе части последнего уравнения на $2s$ и обозначив $a^2 = 2sp; \quad b^2 = 2sq$, получим $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, т.е. гиперболу, действительная ось которой параллельна оси OX, а вершины находятся в точках $A_1(-a, 0, s)$ и $A_2(a, 0, s)$. Теперь, используя полученные сечения, построим гиперболический параболоид (рис. 33).

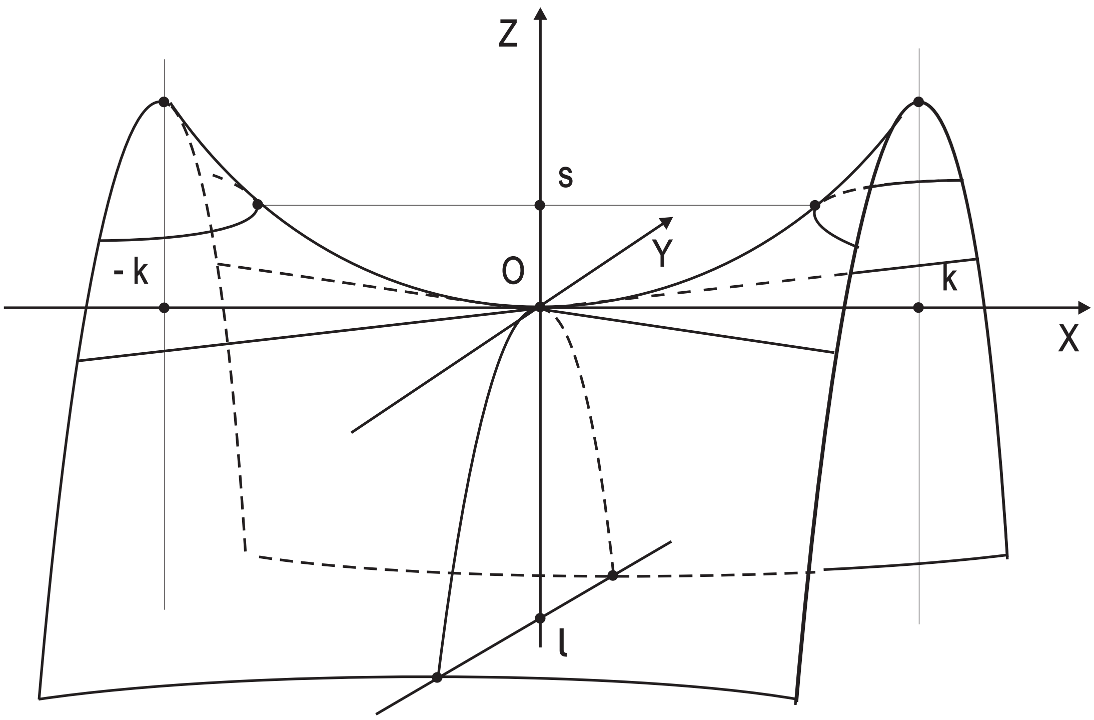


Рис. 33

7.2. Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида и параболического гиперболоида

Определение 7.2. Линейчатой называется поверхность, которая состоит из множества прямых, называемых прямолинейными образующими.

Конические и цилиндрические поверхности, рассмотренные выше очевидно являются линейчатыми. Оказывается, что кроме них существует ещё две поверхности, которые так же являются линейчатыми — однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид. Для того, чтобы в этом убедиться, достаточно провести аналитическое исследование уравнений этих поверхностей.

Рассмотрим уравнение некоторого однополостного гиперболоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Преобразуем его следующим образом:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2};$$

$$(\frac{x}{a} - \frac{z}{c})(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}) = (1 - \frac{y}{b})(1 + \frac{y}{b}). \qquad (*)$$

Рассмотрим теперь прямую, которая задаётся системой (как линия пересечения двух поверхностей)

$$\begin{cases} (\frac{x}{a} - \frac{z}{c}) = u(1 - \frac{y}{b}) \\ (\frac{x}{a} + \frac{z}{c}) = \frac{1}{u}(1 + \frac{y}{b}), \end{cases}$$

где u — некоторое действительное число.

Поскольку любая точка $M(x, y, z)$, координаты которой удовлетворяют этой системе, принадлежит множеству точек определяемому соотношением (*), то точка M принадлежит нашему однополосному гиперболоиду. Ввиду произвольности выбора вся прямая, определяемая этой системой принадлежит этой поверхности. Придавая параметру u различные числовые значения, мы получим бесконечное множество прямолинейных образующих однополосного гиперболоида.

Рассмотрим ещё одну прямую, которая задаётся системой

$$\begin{cases} (\frac{x}{a} - \frac{z}{c}) = v(1 + \frac{y}{b}) \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c}) = \frac{1}{v}(1 - \frac{y}{b}), \end{cases}$$

где v — некоторой действительное число.

Понятно что прямая, задаваемая этой системой целиком принадлежит однополостному гиперболоиду. Задавая для v различные значения, получим ещё одно множество прямолинейных образующих.

Два множества прямолинейных образующих имеет так же гиперболический парабалоид. Действительно, пусть гиперболический параболоид задан уравнением

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z.$$

Поскольку $p > 0, \quad q > 0$, то, разложив левую часть на множители, мы получим аналогично однополосному гиперболоиду следующие два множества:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}} = \dfrac{z}{v}; \\ \dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 2v; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 2u; \\ \dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}} = \dfrac{z}{u} \end{cases}$$

где v, u — некоторые действительные числа.

Определение 7.3. Два различных множества прямолинейных образующих однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида называются семействами прямолинейных образующих этих поверхностей.

$$\boxed{\begin{cases} (\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}) = u(1 - \dfrac{y}{b}); \\ (\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}) = \dfrac{1}{u}(1 + \dfrac{y}{b}); \end{cases} \begin{cases} (\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}) = v(1 + \dfrac{y}{b}); \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}) = \dfrac{1}{v}(1 - \dfrac{y}{b}). \end{cases}} \tag{7.2}$$

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}} = \dfrac{z}{v}; \\ \dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 2v; \end{cases} \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 2u; \\ \dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}} = \dfrac{z}{u}. \end{cases}} \tag{7.3}$$

Теорема 7.1. *Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида или гиперболического параболоида, принадлежащие одному семейству образующих не пересекаются, а принадлежащие разным семействам — пересекаются.*

◀ Пусть даны две прямые, принадлежащие одному семейству прямолинейных образующих гиперболического парабалоида:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 2u; \\ \dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}} = \dfrac{z}{u}; \end{cases} \tag{$*$}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 2u_1; \\ \dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}} = \dfrac{z}{u_1}, \end{cases} \tag{$**$}$$

где $u_1 \neq u$.

Вычтя почленно из первого уравнения системы (*), первое уравнение системы (**), получим что $u = u_1$. Но это противоречит условию $u_1 \neq u$. Следовательно, система, составленная из уравнений системы (*) и уравнений системы (**) несовместна, а, значит, не имеет решений. Поэтому прямые из одного семейства не пересекаются.

Возьмём теперь образующие из разных семейств:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 2u; \\ \dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}} = \dfrac{z}{u}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}} = \dfrac{z}{v}; \\ \dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 2v. \end{cases}$$

Сложив почленно первое уравнение системы (*) и второе уравнение системы (**), получим: $x = \sqrt{p}(u + v)$; вычтя почленно из первого уравнения системы (*) второе уравнение системы (**), получим: $y = \sqrt{q}(u - v)$. Подставив полученные выражения во второе уравнение системы (*), получим: $(u + v - (u - v)) = z$ или $z = 2uv$. Таким образом, система, составленная из уравнений системы (*) и уравнений системы (**), всегда имеет решение:

$$\begin{cases} x = \sqrt{p}(u + v); \\ y = \sqrt{q}(u - v); \\ z = 2uv. \end{cases}$$

Для однополостного гиперболоида доказательство проводится аналогично. ►

Итак, мы убедились, что однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид вместе с конической и цилиндрической поверхностями, являются линейчатыми поверхностями (рис. 34-35). Поскольку остальные поверхности второго порядка не состоят из прямых по определению и не допускают разложений, аналогичных применённых нами для однополостного гиперболоида и для гиперболического параболоида, то других поверхностей второго порядка, которые являются линейчатыми, нет.

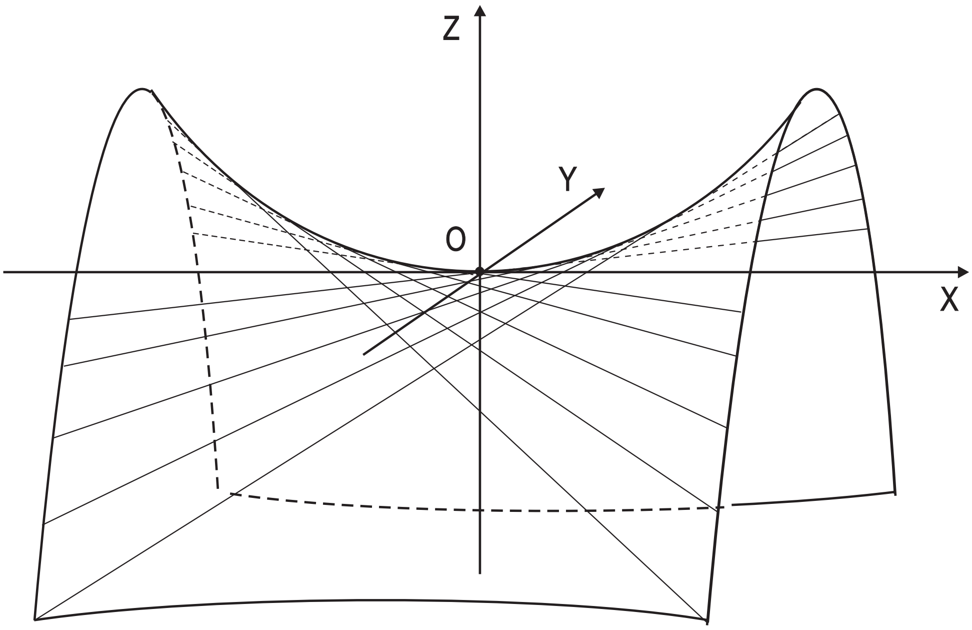


Рис. 34

8. Тема 8. Упрощение общего уравнения линии второго порядка преобразованием координат.

1. Общее уравнение линии второго порядка

2. Упрощение общего уравнения линии второго порядка преобразованием поворота системы координат

3. Упрощение общего уравнения линии второго порядка преобразованием параллельного переноса системы координат

4. Общее преобразование и построение линии второго порядка

8.1. Общее уравнение линии второго порядка

Определение 8.1. Общим уравнением линии второго порядка на плоскости называется уравнение вида

$$\boxed{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,} \tag{8.1}$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R},\ i, j \in \{1, 2, 3\},\ \ a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0.$

Примерами линий второго порядка служат изученные нами выше

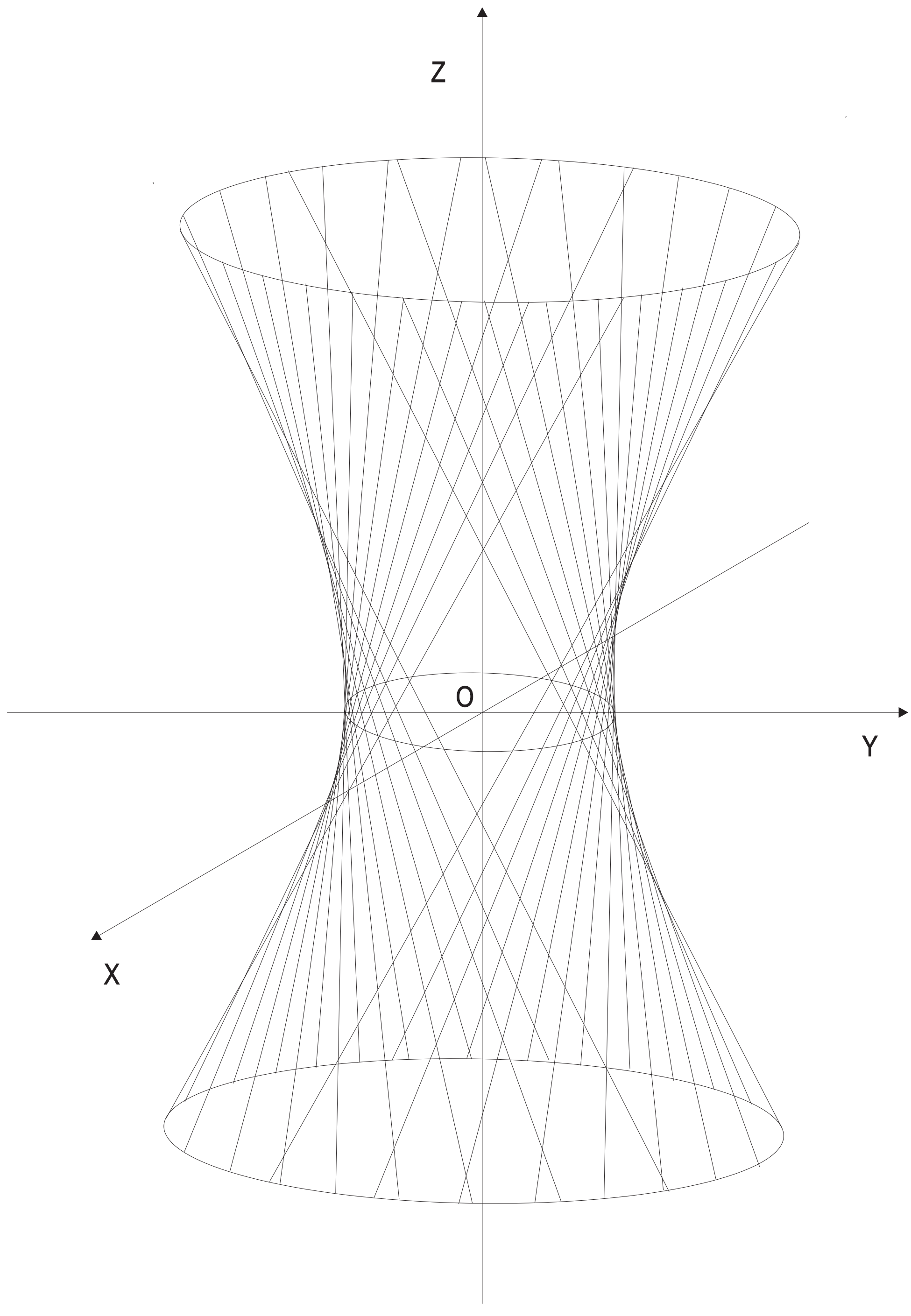


Рис. 35

эллипс, гипербола, парабола:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0;$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0;$$

$$y^2 - 2px = 0.$$

8.2. Упрощение общего уравнения линии второго порядка преобразованием поворота системы координат

Пусть в некоторой ПДСК-2 некоторая линия второго порядка задана своим общим уравнением (8.1).

Пусть коэффициент при произведении xy отличен от нуля. Совершим преобразование поворота системы координат по формулам

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha; \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases}$$

Тогда уравнение (8.1) примет вид:

$$a_{11}(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 + 2a_{12}(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)+$$

$$a_{22}(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 + 2a_{13}(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)+$$

$$2a_{23}(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + a_{33} = 0.$$

Раскрыв скобки, получим:

$$a_{11}{x'}^2\cos^2\alpha - 2a_{11}x'y'\cos\alpha\sin\alpha + a_{11}{y'}^2\sin^2\alpha+$$

$$2a_{12}{x'}^2\sin\alpha\cos\alpha + 2a_{12}x'y'\cos^2\alpha - 2a_{12}x'y'\sin^2\alpha-$$

$$2a_{12}{y'}^2\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}{x'}^2\sin^2\alpha + 2a_{22}x'y'\cos\alpha\sin\alpha+$$

$$a_{22}{y'}^2\cos^2\alpha + 2a_{13}x'\cos\alpha - 2a_{13}y'\sin\alpha+$$

$$2a_{23}x'\sin\alpha + 2a_{23}y'\cos\alpha + a_{33} = 0.$$

Теперь приведём подобные члены относительно новых переменных.

$$(a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\sin^2\alpha){x'}^2+$$

$$2(a_{22}\cos\alpha\sin\alpha + a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - a_{11}\cos\alpha\sin\alpha)x'y'+$$

$$(a_{22}\cos^2\alpha - 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{11}\sin^2\alpha){y'}^2+$$

$$2(a_{13}\cos\alpha + a_{23}\sin\alpha)x' + 2(a_{23}\cos\alpha - a_{13}\sin\alpha)y' + a_{33} = 0.$$

Приравняем к нулю коэффициент при произведении $x'y'$ и совершим затем несколько преобразований:

$$a_{22}\cos\alpha\sin\alpha + a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - a_{11}\cos\alpha\sin\alpha = 0;$$

$$a_{11}\cos\alpha\sin\alpha - a_{22}\cos\alpha\sin\alpha = a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha);$$

$$(a_{11} - a_{22})\cos\alpha\sin\alpha = a_{12}\cos 2\alpha;$$

$$(a_{11} - a_{22})\sin 2\alpha = 2a_{12}\cos 2\alpha;$$

$$\boxed{\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}.} \tag{8.2}$$

Таким образом, мы получаем формулу, позволяющую находить такой угол поворота α, что коэффициент при произведении новых переменных, т.е. при $x'y'$ равен нулю. Эта формула определена тогда и только тогда, когда коэффициент a_{12} отличен от нуля (в рассматриваемом случае это действительно так). Она называется формулой угла поворота при упрощении общего уравнения линии второго порядка преобразованием системы координат.

Для того, чтобы найти $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, пользуются, как правило, вначале следующей формулой

$$\boxed{\cos 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg} 2\alpha}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 2\alpha}},} \tag{8.3}$$

а затем — формулами половинного аргумента. Знак перед корнем зависит от угла поворота (обычно выбирается $+$, но возможны и другие случаи). Проверить правильно ли выбран угол можно с помощью основного тригонометрического тождества и условия равенства нулю коэффициента при $x'y'$, т.е.

$$\boxed{(a_{22} - a_{11})\sin\alpha\cos\alpha + a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0.} \tag{8.4}$$

8.3. Упрощение общего уравнения линии второго порядка преобразованием параллельного переноса системы координат

Итак, после совершённого преобразования поворота системы координат, мы получили уравнение, которое не содержит произведения переменных. Коэффициенты этого уравнения — некоторые действительные числа. Обозначим их по-другому, например так:

$$a'_{11}{x'}^2 + a'_{22}{y'}^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0$$

и произведём несколько несложных преобразований.

$$a'_{11}(x'^2 + 2\frac{a'_{13}}{a'_{11}}x' + \frac{a'^2_{13}}{a'^2_{11}}) + a'_{22}(y'^2 + 2\frac{a'_{23}}{a'_{22}}y' + \frac{a'^2_{23}}{a'^2_{22}}) + a'_{33} - \frac{a'^2_{13}}{a'_{11}} - \frac{a'^2_{23}}{a'_{22}} = 0;$$

$$a'_{11}(x' + \frac{a'_{13}}{a'_{11}})^2 + a'_{22}(y' + \frac{a'_{23}}{a'_{22}})^2 + a'_{33} - \frac{a'^2_{13}}{a'_{11}} - \frac{a'^2_{23}}{a'_{22}} = 0.$$

Теперь совершим преобразование параллельного переноса по формулам

$$\begin{cases} X = x' + \dfrac{a'_{13}}{a'_{11}}; \\ Y = y' + \dfrac{a'_{23}}{a'_{22}}. \end{cases}$$

Тогда рассматриваемое нами уравнение примет вид

$$a'_{11}X'^2 + a'_{22}Y'^2 + a'_{33} - \frac{a'^2_{13}}{a'_{11}} - \frac{a'^2_{23}}{a'_{22}} = 0.$$

Если теперь числовое выражение, стоящее в конце этого уравнения обозначить через a''_{33}, то мы получим уравнение

$$a'_{11}X'^2 + a'_{22}Y'^2 + a''_{33} = 0.$$

Пусть теперь в уравнении (8.1) коэффициент при xy равен нулю. Тогда для того, чтобы прийти к полученному выше уравнению, достаточно совершить только преобразование параллельного переноса.

8.4. Общее преобразование и построение линии второго порядка

Итак, для упрощения общего уравнения линии второго порядка, мы использовали преобразование поворота системы координат и преобразование параллельного переноса.

Построим теперь линию второго порядка, используя полученное после упрощения уравнение. Для этого необходимо произвести следующие действия. В старой системе координат OXY построить промежуточную систему $Ox'y'$, ось абсцисс которой образует с осью абсцисс старой системы найденный нами угол α. Затем найти в системе $Ox'y'$ точку $O'(\frac{a'_{13}}{a'_{11}}; \frac{a'_{23}}{a'_{22}})$ и построить систему координат $O'XY$, оси X и Y которой параллельны соответственно осям x' и y'. Теперь остаётся построить в полученной системе координат $O'XY$ исследуемую линию второго порядка по полученному после упрощения уравнению (рис. 36).

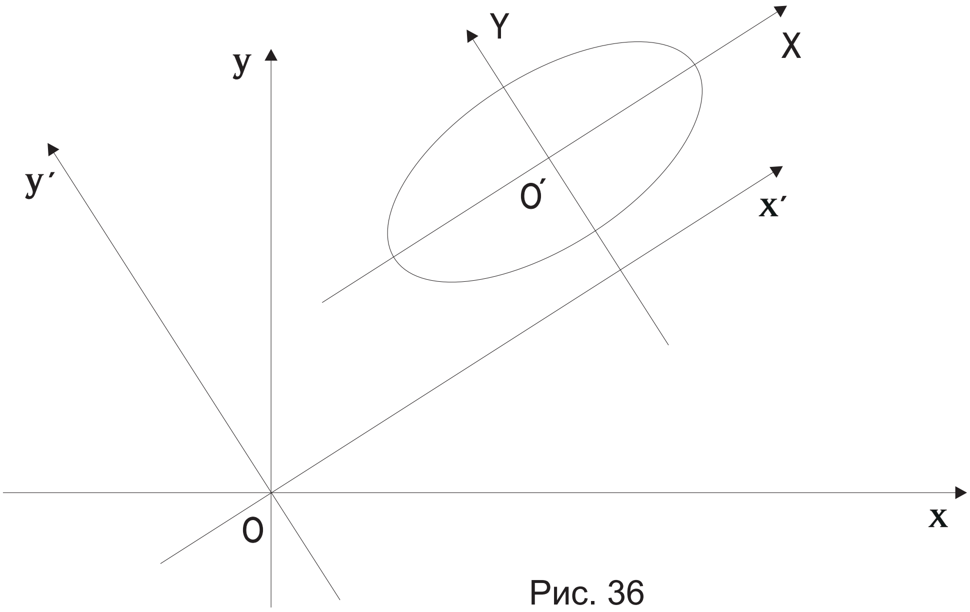


Рис. 36

9. Тема 9. Упрощение с помощью инвариантов общего уравнения центральной линии второго порядка

1. Центр линии второго порядка

2. Инварианты линии второго порядка

3. Исследование общего уравнения линии второго порядка, имеющей единственный центр

9.1. Центр линии второго порядка

Пусть в некоторой ПДСК-2 некоторая линия второго порядка задана своим общим уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Совершим преобразование параллельного переноса по формулам:

$$\begin{cases} x = x' + x_1; \\ y = y' + y_1. \end{cases}$$

Мы получим:

$$a_{11}(x'+x_1)^2+2a_{12}(x'+x_1)(y'+y_1)+a_{22}(y'+y_1)^2+$$
$$2a_{13}(x'+x_1)+2a_{23}(y'+y_1)+a_{33}=0.$$

Выделим коэффициенты при x' и y':

$$a_{11}x'^2+2a_{12}x'y'+a_{22}y'^2+2(a_{11}x_1+a_{12}y_1+a_{13})x'+$$
$$2(a_{12}x_1+a_{22}y_1+a_{23})y'+a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1y_1+a_{22}y_1^2+$$
$$2a_{13}x_1+2a_{23}y_1+a_{33}=0. \qquad (I)$$

Поскольку x_1 и y_1 — некоторые действительные числа, то их можно подобрать таким образом, чтобы коэффициенты при x' и y' были равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}y_1+a_{13}=0; \\ a_{12}x_1+a_{22}y_1+a_{23}=0. \end{cases} \qquad (*)$$

Определение 9.1. Точка $O(x_1;y_1)$, координаты которой являются решением системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}y_1+a_{13}=0; \\ a_{12}x_1+a_{22}y_1+a_{23}=0 \end{cases}$$

называется центром линии второго порядка, заданной общим уравнением

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0.$$

Определение 9.2. Линия второго порядка, заданная общим уравнением

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

называется центральной, если система

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}y_1+a_{13}=0; \\ a_{12}x_1+a_{22}y_1+a_{23}=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

9.2. Инварианты линии второго порядка

В дальнейшем будем считать, что для коэффициентов общего уравнения линии второго порядка, которые мы будем использовать в матрицах и определителях, $a_{12}=a_{21}; a_{13}=a_{31}; a_{23}=a_{32}$.

Пусть некоторая линия второго порядка, заданная в некоторой ПДСК-2 имеет единственный центр. Это значит, что система (*) имеет единственое решение. Перепишем эту систему в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}y_1 = -a_{13}; \\ a_{12}x_1 + a_{22}y_1 = -a_{23}. \end{cases} \qquad (**)$$

Эта система может иметь единственное решение лишь в том случае, если её определитель отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Таким образом, для того, чтобы найти центр линии второго порядка, необходимо решить систему (**). Введём следующие обозначения:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}; \delta_x = \begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}; \delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{12} & -a_{23} \end{vmatrix}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix};$$

По правилу Крамера, $x_1 = \dfrac{\delta_x}{\delta}; y_1 = \dfrac{\delta_y}{\delta}$.

Выделим теперь свободный член уравнения (I):

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + a_{22}y_1^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}y_1 + a_{33} =$$

$$(a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13})x_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23})y_1 + a_{13}x_1 + a_{23}y_1 + a_{33} =$$

$$a_{13}x_1 + a_{23}y_1 + a_{33} = a_{13}\frac{\delta_x}{\delta} + a_{23}\frac{\delta_y}{\delta} + a_{33}\frac{\delta}{\delta} =$$

$$a_{13}\frac{\begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}} + a_{23}\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{12} & -a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}} + a_{33}\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}} =$$

$$\frac{a_{13}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta}{\delta}.$$

Тогда преобразованное уравнение (I) имеет вид:

$$a_{11}{x'}^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}{y'}^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \qquad (II)$$

Если в этом уравнении $a_{12} = 0$, то мы сразу получаем упрощённое уравнение. Поэтому большего внимания заслуживает случай, когда $a_{12} \neq \neq 0$, который мы и будем в дальнейшем рассматривать.

Совершим преобразование поворота по следующим формулам:

$$\begin{cases} x' = X\cos\alpha - Y\sin\alpha; \\ y' = X\sin\alpha + Y\cos\alpha. \end{cases}$$

Тогда уравнение (II) примет вид:

$$a_{11}(X\cos\alpha - Y\sin\alpha)^2 + 2a_{12}(X\cos\alpha - Y\sin\alpha)(X\sin\alpha + Y\cos\alpha) +$$
$$a_{22}(X\sin\alpha + Y\cos\alpha)^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Выделим и приравняем к нулю коэффициент при произведении XY.

$$-2a_{11}\sin\alpha\cos\alpha + 2a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2a_{22}\sin\alpha\cos\alpha = 0;$$
$$-a_{11}\sin\alpha\cos\alpha + a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + a_{22}\sin\alpha\cos\alpha = 0; \qquad (II*)$$

Если $\cos\alpha = 0$, то $\sin^2\alpha = 1$. Тогда последнее уравнение принимает вид:

$$a_{12} = 0,$$

что невозможно ввиду рассматриваемого случая. Поэтому уравнение (II*) можно разделить почленно на $\cos^2\alpha$:

$$-a_{11}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + a_{12}(1 - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}) + a_{22}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0;$$
$$a_{12}\mathrm{tg}^2\alpha + (a_{11} - a_{22})\,\mathrm{tg}\,\alpha - a_{12} = 0. \qquad (III)$$

Так как дискриминант этого уравнения $D = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 > > 0$, то это уравнение имеет два различных действительных корня. Это означает, что систему координат можно повернуть в обе стороны. Системы, полученные в результате таких поворотов будут отличаться лишь ориентацией координатных осей (рис. 37).

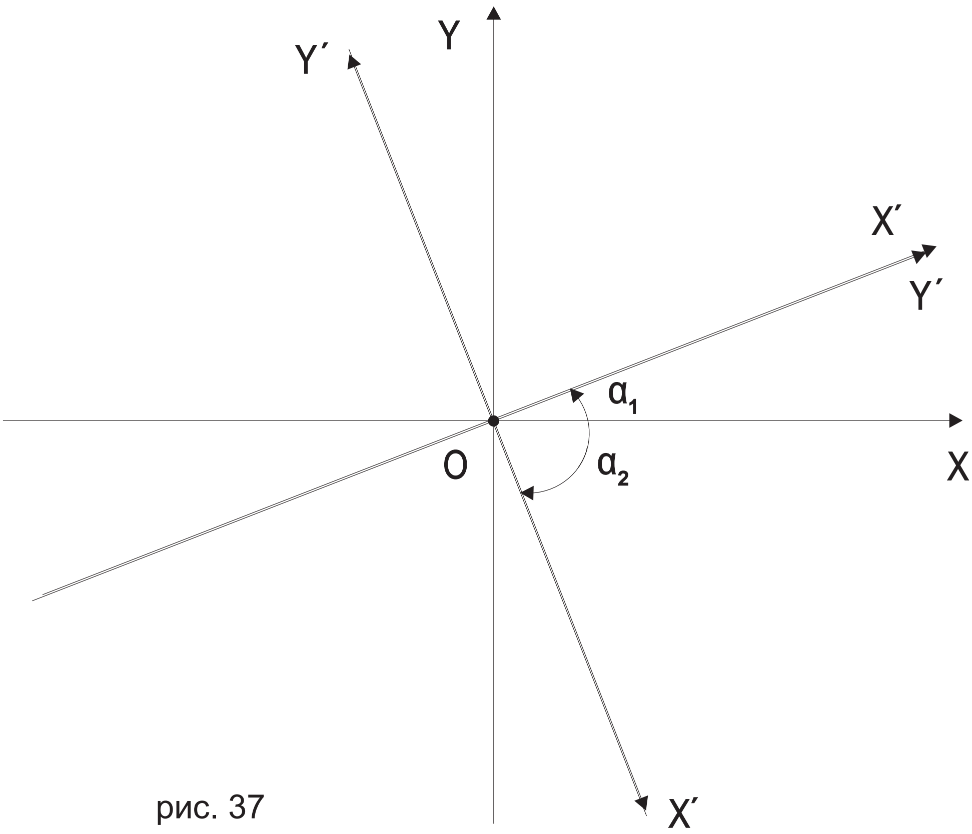


рис. 37

Итак, мы перешли в уравнении (II) от неизвестных x' и y' к неизвестным X и Y, а так же избавились от произведения XY. Поэтому, обозначив через λ_1 и λ_2 коэффициенты при X и Y соответственно, вместо уравнения (II), мы получим:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \qquad (IV)$$

В этом уравнении величина $\dfrac{\Delta}{\delta}$ легко вычисляется по коэффициентам исходного уравнения. Возможно ли вычислить подобным образом величины λ_1 и λ_2?

Уравнение (IV) получено из уравнения (II) при помощи преобразования поворота на угол α. Произведём обратное преобразование, т.е. повернём координатные оси X и Y на угол $-\alpha$. Формулы преобразования поворота в этом случае имеют вид:

$$\begin{cases} X = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha; \\ Y = -x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases}$$

Подставим эти формулы в уравнение (IV) и преобразуем полученное выражение:

$$(\lambda_1\cos^2\alpha+\lambda_2\sin^2\alpha){x'}^2+2(\lambda_1-\lambda_2)\sin\alpha\cos\alpha x'y'+$$
$$(\lambda_1\cos^2\alpha+\lambda_2\sin^2\alpha){y'}^2+\frac{\Delta}{\delta}=0.$$

Поскольку это уравнение совпадает с уравнением (II), то будут равны и соответствующие коэффициенты:

$$\begin{aligned} a_{11}&=\lambda_1\cos^2\alpha+\lambda_2\sin^2\alpha;\\ a_{12}&=(\lambda_1-\lambda_2)\sin\alpha\cos\alpha;\\ a_{22}&=\lambda_2\cos^2\alpha+\lambda_1\sin^2\alpha.\end{aligned}\qquad (V)$$

Тогда получим:

$$\lambda_1+\lambda_2=\lambda_1(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+\lambda_2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=a_{11}+a_{22};$$
$$\lambda_1\lambda_2=\lambda_1\lambda_2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^2=\lambda_1\lambda_2\cos^4\alpha+2\lambda_1\lambda_2\cos^2\alpha\sin^2\alpha+$$
$$\lambda_1\lambda_2\sin^4\alpha+\lambda_1^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha-\lambda_1^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\lambda_2^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha-$$
$$\lambda_2^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha=(\lambda_1\cos^2\alpha+\lambda_2\sin^2\alpha)(\lambda_2\cos^2\alpha+\lambda_1\sin^2\alpha)-$$
$$\lambda_1\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\lambda_2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+2\lambda_1\lambda_2\cos^2\alpha\sin^2\alpha=$$
$$(\lambda_1\cos^2\alpha+\lambda_2\sin^2\alpha)(\lambda_2\cos^2\alpha+\lambda_1\sin^2\alpha)-(\lambda_1-\lambda_2)^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=$$
$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{vmatrix}=\delta.$$

Обозначим $s=a_{11}+a_{22}$. Тогда λ_1 и λ_2 являются корнями характеристического уравнения

$$\lambda^2-s\lambda+\delta=0.\qquad (VI)$$

Определение 9.3. Величины

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix};\delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{vmatrix};s=a_{11}+a_{22}$$

называются инвариантами линии второго порядка. Их так же называют соответственно большим определителем, малым определителем и следом.

Определение 9.4. Уравнение

$$\lambda^2 - s\lambda + \delta = 0$$

называется характеристическим уравнением линии второго порядка.

Умножим первое из уравнений (V) на $\cos\alpha$, а второе — на $\sin\alpha$ и сложим их:

$$a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha = \lambda_1\cos^3\alpha + \lambda_2\sin^2\alpha\cos\alpha + (\lambda_1 - \lambda_2)\cos\alpha\sin^2\alpha;$$

$$a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha = \lambda_1\cos\alpha(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha);$$

$$a_{12}\sin\alpha = (\lambda_1 - a_{11})\cos\alpha.$$

Мы уже говорили о том, что в нашем случае $\cos\alpha \neq 0$. Поэтому, вспомнив, что $k = \operatorname{tg}\alpha$, получим формулу для вычисления углового коэффициента новой оси X в старой системе координат:

$$\boxed{k = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}.} \tag{9.1}$$

9.3. Исследование общего уравнения линии второго порядка, имеющей единственный центр

Исследуем теперь полученное выше уравнение (IV) относительно определённых нами инвариантов.

1. Пусть $\delta > 0$ и $s\Delta < 0$. Так как $\delta = \lambda_1\lambda_2$, то λ_1 и λ_2 одного знака. Кроме того, этот знак совпадает со знаком $s = \lambda_1 + \lambda_2$. Это в частности означает, что знак Δ противоположен знаку λ_1 и λ_2.

Перепишем уравнение (IV) в другом виде, сделав предварительно несколько преобразований:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = -\frac{\Delta}{\delta};$$

$$\frac{\lambda_1 X^2}{-\dfrac{\Delta}{\delta}} + \frac{\lambda_2 Y^2}{-\dfrac{\Delta}{\delta}} = 1;$$

$$\frac{X^2}{-\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_1}} + \frac{Y^2}{-\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_2}} = 1.$$

На основе вышесказанного, $-\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_1} > 0$ и $-\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_2} > 0$. Поэтому возможно обозначение $-\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_1} = a^2, -\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_2} = b^2$. Тогда преобразованное уравнение (IV) принимает вид:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Это уравнение эллипса.

2. Пусть $\delta > 0$ и $s\Delta > 0$. Тогда знак Δ совпадает со знаком $\delta, \lambda_1, \lambda_2$. Поэтому $\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_1} > 0, \dfrac{\Delta}{\delta\lambda_2} > 0$.

Следовательно, уравнение (IV) будет иметь вид:

$$\frac{X^2}{\dfrac{\Delta}{\lambda_1\delta}} + \frac{Y^2}{\dfrac{\Delta}{\lambda_2\delta}} = -1.$$

Введём теперь обозначения $\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_1} = a^2, \dfrac{\Delta}{\delta\lambda_2} = b^2$. Тогда мы получим уравнение

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1,$$

которое является уравнением так называемого мнимого эллипса. Действительно, координаты ни одной из точек действительной плоскости не удовлетворяют этому уравнению, а для комплексной плоскости такое множество точек существует.

3. Пусть $\delta > 0$ и $\Delta = 0$. Тогда рассматриваемое нами уравнение принимает вид:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 0.$$

В этом уравнении коэффициенты λ_1 и λ_2 одного знака. Только одна действительная точка — начало координат — удовлетворяет этому уравнению. Однако на комплексной плоскости можно указать множество точек, координаты которых будут превращать левую часть полученного уравнения в разность квадратов. Поэтому это уравнение называют уравнением мнимых прямых, пересекающихся в одной действительной точке.

4. Пусть теперь $\delta < 0$ и $\Delta \neq 0$. В этом случае λ_1 и λ_2 разных знаков. Предположим сначала, что знак λ_1 совпадает со знаком Δ. Представим исследуемое уравнение в виде:

$$\frac{X^2}{-\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_1}} - \frac{Y^2}{\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_2}} = 1.$$

Так как $-\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_1} > 0, \dfrac{\Delta}{\delta\lambda_2} > 0$, то возможно обозначение:

$$-\frac{\Delta}{\delta\lambda_1} = a^2, \frac{\Delta}{\delta\lambda_2} = b^2.$$

Тогда уравнение (IV) принимает вид

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Это уравнение гиперболы. Угловой коэффициент действительной оси гиперболы находится по той же формуле, что и угловой коэффициент оси абсцисс системы координат, полученной после поворота:

$$k = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}.$$

Если теперь предположить, что со знаком Δ совпадает знак λ_2, то уравнение гиперболы будет иметь вид

$$-\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1,$$

а отмеченный выше угловой коэффициент будет находиться по той же формуле:

$$k = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}.$$

5. Рассмотрим случай, когда $\delta < 0$ и $\Delta = 0$. Тогда снова получаем уравнение

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 0.$$

Но, в отличие от случая 3, теперь коэффициенты λ_1 и λ_2 разных знаков. Можно считать, что $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 < 0$ (если это не так, то достаточно умножить левую и правую части нашего уравнения на -1). Обозначим $\lambda_1 = \dfrac{1}{a^2}$ и $\lambda_2 = -\dfrac{1}{b^2}$. Тогда рассматриваемое уравнение принимает вид:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0;$$

$$\Big(\frac{X}{a}-\frac{Y}{b}\Big)\Big(\frac{X}{a}+\frac{Y}{b}\Big)=0;$$

Это уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\frac{X}{a}-\frac{Y}{b}=0;\\ \frac{X}{a}+\frac{Y}{b}=0,\end{array}\right.$$

которые задают пару пересекающихся прямых.

10. Тема 10. Исследование общего уравнения линии второго порядка, не имеющей центра

1. Парабола как единственный случай нецентральной линии второго порядка

2. Расчет характеристик параболы по ее общему уравнению

10.1. Парабола как единственный случай нецентральной линии второго порядка

В случае, если линия второго порядка не имеет центра, то система (*) не имеет решений. В этом случае использованная выше идея (совершить сначала преобразование параллельного переноса) теперь оказывается безрезультатной. Совершим вначале преобразование поворота по известным формулам

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha;\\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.\end{cases}$$

Исследуемое уравнение принимает вид:

$$(a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\sin^2\alpha){x'}^2+$$
$$(a_{11}\sin^2\alpha - 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\cos^2\alpha){y'}^2+$$
$$2(a_{13}\cos\alpha + a_{23}\sin\alpha)x' + 2(a_{23}\cos\alpha - a_{13}\sin\alpha)y' + a_{33} = 0.$$

Обозначим коэффициенты при ${x'}^2$ и ${y'}^2$, через a'_{11} и a'_{22} соответствено. Тогда, как нетрудно убедиться, $a'_{11}+a'_{22} = a_{11}+a_{22} = \lambda_1+\lambda_2$ и $a'_{11}a'_{22} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \lambda_1\lambda_2$. Поэтому выбранные нами коэффициенты a'_{11} и a'_{22} равны на самом деле корням характеристического уравнения (VI). Значит, преобразованное нами уравнение имеет вид

$$\lambda_1{x'}^2 + \lambda_2{y'}^2 + 2b_1x' + 2b_2y' + a_{33} = 0, \qquad (VII)$$

где $b_1 = a_{13}\cos\alpha + a_{23}\sin\alpha; b_2 = a_{23}\cos\alpha - a_{13}\sin\alpha$.

Поскольку система (*) не имеет решений, то $\delta = 0$, а так как $\delta = \lambda_1\lambda_2$, то хотя бы один из корней характеристического уравнения равен нулю. Пусть, например, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$. Тогда получим уравнение

$$\lambda_2 {y'}^2 + 2b_1x' + 2b_2y' + a_{33} = 0. \qquad (VIII)$$

Рассмотрим вначале случай, когда $b_1 \neq 0$. Выделим в уравнении (8) полный квадрат:

$$\lambda_2\Big({y'}^2 + 2\frac{b_2}{\lambda_2}y' + \big(\frac{b_2}{\lambda_2}\big)^2\Big) + 2b_1x' + a_{33} - \frac{b_2^2}{\lambda_2} = 0.$$

Сделаем ещё два преобразования:

$$\lambda_2\Big(y' + \frac{b_2}{\lambda_2}\Big)^2 + 2b_1\big(x' + \frac{a_{33}}{2b_1} - \frac{b_2^2}{2\lambda_2 b_1}\big) = 0.$$

Теперь совершим преобразование параллельного переноса по формулам:

$$\begin{cases} X = x' + \dfrac{a_{33}}{2b_1} - \dfrac{b_2^2}{2\lambda_2 b_1}; \\ Y = y' + \dfrac{b_2}{\lambda_2}. \end{cases}$$

Тогда мы получим уравнение:

$$\lambda_2 Y^2 + 2b_1X = 0,$$

которое после простого преобразования превращается в уравнение параболы:

$$Y^2 = 2\big(-\frac{b_1}{\lambda_2}\big)X.$$

10.2. Расчет характеристик параболы по ее общему уравнению

Найдём параметр полученной параболы, т.е. величину $p = -\dfrac{b_1}{\lambda_2}$. Из уравнения (VIII):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ 0 & \lambda_2 & b_2 \\ b_1 & b_2 & a_{33} \end{vmatrix} = -b_1^2\lambda_2.$$

Поэтому получаем: $b_1^2 = -\dfrac{\Delta}{\lambda_2}$ и, значит, $b_1 = \pm\sqrt{-\dfrac{\Delta}{\lambda_2}}$. Отсюда $p =$

$$= \frac{\pm\sqrt{-\dfrac{\Delta}{\lambda_2}}}{\lambda_2} = \pm\sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_2^3}}.$$

Как было показано выше, $s = \lambda_1 + \lambda_2$. Но в нашем случае $\lambda_1 = 0$. Поэтому $s = \lambda_2$. Итак, мы получаем формулу, которая позволяет вычислить параметр параболы только по инвариантам линии:

$$\boxed{p = \pm\sqrt{-\frac{\Delta}{S^3}}.} \tag{10.1}$$

Выбор знака делается на основании того факта, что все точки параболы лежат в одной полуплоскости.

Координаты вершины параболы можно определить из применённых выше формул параллельного переноса:

$$\boxed{x_0 = -\left(\frac{a_{33}}{2b_1} - \frac{b_2^2}{2\lambda_2 b_1}\right); y_0 = -\left(\frac{b_2}{\lambda_2}\right).} \tag{10.2}$$

Угол поворота параболы определяется так же: $k = \dfrac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}$, поскольку нам требуется найти такой угол, чтобы коэффициент при $x'y'$ был равен нулю.

Замечание 10.1. *Нет строгого правила какой из корней характеристического уравнения принять за λ_1, а какой — за λ_2. Этот выбор делается произвольно, но в дальнейшем λ_1 в формуле углового коэффициента должен быть таким же как и в характеристическом уравнении.*

Замечание 10.2. *Как следует поступать, если в общем уравнении линии второго порядка отсутствует (равен нулю) коэффициент при a_{12}?*

При упрощении общего уравнения с помощью преобразования системы координат, не нужно делать поворота, а сразу совершать параллельный перенос выделением полного квадрата.

При упрощении общего уравнения с помощью инвариантов, мы обязательно проходим через этап поворота осей координат. Этот поворот в данном случае происходит либо на угол 0, либо на угол $\dfrac{\pi}{2}$, что зависит от того, какой из корней характеристического уравнения мы приняли за λ_1, а какой — за λ_2. При этом оказывается, кстати, что

$\{\lambda_1, \lambda_2\} = \{a_{11}, a_{22}\}$. *Если поворачивать оси не нужно, то* $k = \operatorname{tg}\alpha = = \dfrac{a_{11} - a_{11}}{0} = 0$. *Если же нужно повенуть на угол* $\dfrac{\pi}{2}$, *то получим:* $k = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a_{22} - a_{11}}{0}$ *— не определён.*

11. Тема 11. Исследование общего уравнения линии второго порядка, имеющей бесконечное множество центров

1. Исследование общего уравнения линии второго порядка, имеющей бесконечное множество центров

2. Классификационная теорема линий второго порядка

11.1. Исследование общего уравнения линии второго порядка, имеющей бесконечное множество центров

Если линия второго порядка имеет бесконечное множество центров, то это означает, что система (*) совместна и неопределена. Это возможно тогда и только тогда, когда равны нулю определители $\delta, \delta_x, \delta_y$.

Разложив определитель Δ по элементам третьей строки, получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{13} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$a_{13}\delta_x + a_{23}\delta_y + a_{33}\delta = 0.$$

Таким образом, для рассматриваемых линий, $\Delta = 0$. Поскольку в нашем случае $\delta = 0$, то можно воспользоваться сведениями, полученными в предыдущем пункте, снова допустив, что $\lambda_1 = 0$, $\Delta = -b_1^2\lambda_2$. Так как $\lambda_2 \neq 0$ (в противном случае уравнение окажется первой степени), то $b_1 = 0$. Таким образом, мы приходим к рассмотрению другого логически возможного случая уравнения (VIII), которое теперь имеет вид:

$$\lambda_2 {y'}^2 + 2b_2 y' + a_{33} = 0.$$

Выделим в нём полный квадрат:

$$\lambda_2\big(y'^2+2\frac{b_2}{\lambda_2}y+\frac{b_2^2}{\lambda_2^2}\big)-\frac{b_2^2}{\lambda_2}+a_{33}=0.$$

Обозначим $c=\dfrac{\lambda_2 a_{33}-b_2^2}{\lambda_2}$ и совершим параллельный перенос по формулам:

$$\begin{cases} X=x'; \\ Y=y'+\dfrac{b_2}{\lambda_2}. \end{cases}$$

Тогда мы получим уравнение

$$\lambda_2 Y^2+c=0. \tag{IX}$$

Исследуем полученное уравнение на произведение $\lambda_2 c$.

1. Если $\lambda_2 c=0$, то $c=0$ и поэтому получаем уравнение:

$$Y^2=0,$$

которое равносильно совокупности

$$\left[\begin{aligned} &Y=0; \\ &Y=0. \end{aligned}\right.$$

Эта совокупность в некоторой ПДСК-2 определяет пару совпавших прямых.

2. Если $\lambda_2 c<0$, то знаки λ и c различны, поэтому левая часть рассматриваемого уравнения может быть представлена как разность квадратов и разложена затем на множители:

$$\big(\sqrt{|\lambda_2|}Y+\sqrt{|c|}\big)\big(\sqrt{|\lambda_2|}Y-\sqrt{|c|}\big)=0.$$

Это уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{aligned} &\sqrt{|\lambda_2|}Y+\sqrt{|c|}=0; \\ &\sqrt{|\lambda_2|}Y-\sqrt{|c|}=0 \end{aligned}\right.$$

или совокупности

$$\left[\begin{aligned} &Y=\frac{\sqrt{|c|}}{\sqrt{|\lambda_2|}}; \\ &Y=-\frac{\sqrt{|c|}}{\sqrt{|\lambda_2|}}, \end{aligned}\right.$$

которая в некоторой ПДСК-2 определяет пару параллельных прямых.

3. Если $\lambda_2 c>0$, то λ_2 и c одного знака. Тогда величина $\dfrac{c}{\lambda_2}$ положительна и поэтому уравнение (IX), которое представляется в виде

$$Y^2 = -\frac{c}{\lambda_2}$$

определяет в некоторой ПДСК-2 пару мнимых параллельных прямых.

11.2. Классификационная теорема линий второго порядка

Поскольку нами были рассмотрены все логически возможные случаи для общего уравнения линии второго порядка, то мы доказали следующую теорему.

Теорема 11.1. *Пусть в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задано уравнение второго порядка с действительными коэффициентами*

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Тогда существует такая прямоугольная декартова система координат, в которой данное уравнение принимает один из следующих канонических видов:

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *— эллипс;*

2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ *— мнимый эллипс;*

3. $a^2x^2 + b^2y^2 = 0$ *— мнимые пересекающиеся прямые;*

4. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *— гипербола;*

5. $a^2x^2 - b^2y^2 = 0$ *— пересекающиеся прямые;*

6. $y^2 = 2px$ *— парабола;*

7. $y^2 = 0$ *— пара совпавших прямых;*

8. $y^2 - a^2 = 0$ *— пара параллельных прямых;*

9. $y^2 + a^2 = 0$ *— пара мнимых параллельных прямых.*

В соответствие с этим существует 9 классов линий второго порядка. Других линий, определяемых общим уравнением линии второго порядка нет.

Составим на основе полученных выше результатов так называемую классификационную таблицу.

$\delta > 0$	$s\Delta < 0$	эллипс
	$s\Delta > 0$	мнимый эллипс
	$\Delta = 0$	мнимые пересекающиеся прямые
$\delta < 0$	$\Delta \neq 0$	гипербола
	$\Delta = 0$	пересекающиеся прямые
$\delta = 0$	$\Delta \neq 0$	парабола
	$\Delta = 0$	совпавшие прямые
		параллельные прямые
		мнимые параллельные прямые

12. Тема 12. Пересечение линии второго порядка с прямой

1. **Асимптотические направления линии второго порядка**
2. **Касательные к линии второго порядка**
3. **Диаметры линии второго порядка**

12.1. Асимптотические направления линии второго порядка

В конце раздела V мы составили классификационную таблицу для всех классов линий второго порядка. Отношение к знаку малого определителя δ делит указанные классы на три группы. Поэтому закономерным является следующее определение.

Определение 12.1. Линия второго порядка называется линией эллиптического типа, если $\delta > 0$, гиперболического, если $\delta < 0$ и параболического, если $\delta = 0$.

Пусть в некоторой ПДСК-2 произвольная линия второго порядка задана своим общим уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

и пусть в этой же системе некоторая прямая задана своими параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t; \\ y = y_0 + a_2 t. \end{cases}$$

Для того, чтобы найти их точку пересечения, необходимо решить систему

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0; \\ x = x_0 + a_1 t; \\ y = y_0 + a_2 t. \end{cases}$$

Из этой системы непосредственно получаем уравнение

$$a_{11}(x_0 + a_1 t)^2 + 2a_{12}(x_0 + a_1 t)(y_0 + a_2 t) + a_{22}(y_0 + a_2 t)^2 +$$
$$2a_{13}(x_0 + a_1 t) + 2a_{23}(y_0 + a_2 t) + a_{33} = 0.$$

Раскрыв скобки и преобразовав его как уравнение относительно параметра t, получим:

$$(a_{11}a_1^2 + 2a_{12}a_1a_2 + a_{22}a_2^2)t^2 + 2\big((a_{11}a_1x_0 + a_{12}a_2x_0 + a_{13}a_1) +$$
$$(a_{12}a_1y_0 + a_{22}a_2y_0 + a_{23}a_2)\big)t + a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 +$$
$$2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33} = 0. \qquad (I)$$

Возможны два качественно различных случая: 1) уравнение (I) является линейным; 2) уравнение (I) является квадратным.

Рассмотрим вначале 1-й случай. Очевидно, что в этом случае

$$a_{11}a_1^2 + 2a_{12}a_1a_2 + a_{22}a_2^2 = 0.$$

Определение 12.2. Ненулевой вектор $\vec{a}(a_1, a_2)$ называется вектором асимптотического направления линии второго порядка, определённой в некоторой ПДСК-2 своим общим уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

если

$$\boxed{a_{11}a_1^2 + 2a_{12}a_1a_2 + a_{22}a_2^2 = 0.} \qquad (12.1)$$

Пусть $\vec{a}(a_1, a_2)$ — вектор асимптотического направления. Если либо $a_1 = 0$, либо $a_2 = 0$, то указанный вектор оказывается параллельным либо оси абсцисс, либо оси ординат. В дальнейшем мы разберём эти случаи отдельно. Сейчас же будем считать, что $a_1 \neq 0; a_2 \neq 0$. Тогда можно говорить, что асимптотическое направление задано угловым коэффициентом $k = \dfrac{a_2}{a_1}$. Следовательно, уравнение (12.1) принимает вид:

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0. \qquad (II)$$

Если $a_{22} = 0$, то хотя бы один из коэффициентов a_{11} или a_{12} отличен от нуля. Пусть $a_{12} = 0$ и $a_{11} \neq 0$. Тогда из (12.1) следует, что $a_1 = 0$. Но этот случай нами исключён. Пусть теперь $a_{11} = 0$ и $a_{12} \neq 0$. Из того же уравнения (12.1) получаем, что $a_1 a_2 = 0$ и снова приходим к исключённому нами случаю. Итак, в рассматриваемом случае, $a_{22} \neq 0$ и поэтому уравнение (II) является квадратным. Число корней этого уравнения определяется знаком дискриминанта, т.е. знаком выражения $4a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22}$ или эквиалентного ему выражения $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$. Но $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \delta$. Следовательно, число различных асимптотических направлений (которое равно числу различных действительных корней рассматриваемого нами квадратного уравнения) определяется знаком δ. Таким образом, от Определения 1 мы приходим к следующему Определению.

Определение 12.3. Линия второго порядка называется линией эллиптического типа, если она не имеет асимптотических направлений; линией гиперболического типа, если она имеет два различных асимптотических направления и линией параболического типа, если она имеет одно асимптотическое направление.

Таким образом, известные нам 9 классов линий второго порядка делятся на три типа в зависимости от числа асимптотических направлений.

На рисунках 38-41 показаны прямые асимптотических направлений (пунктиром) и неасимптотических направлений для разных классов линий. Из этих рисунков видно, что прямые асимптотического направления пересекают линию ровно в одной точке, либо не пересекают линию вообще (этот случай иллюстрируется гиперболой — сами асимптоты тоже оказываются прямыми асимптотического направления), либо целиком принадлежат линии (в случае пересекающихся прямых).

Замечание 12.1. *Рассматриваемый нами случай (уравнение (I) является линейным) на самом деле разбивается на три подслучая: а) уравнение (I) имеет единственное решение и поэтому точка пересечения*

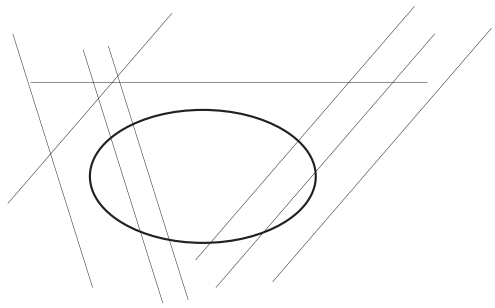


Рис. 38

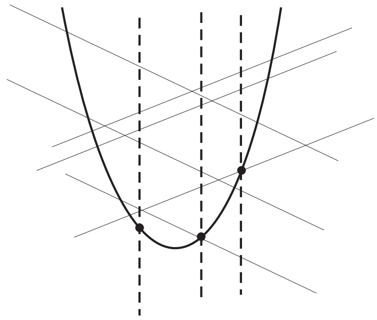


Рис. 39

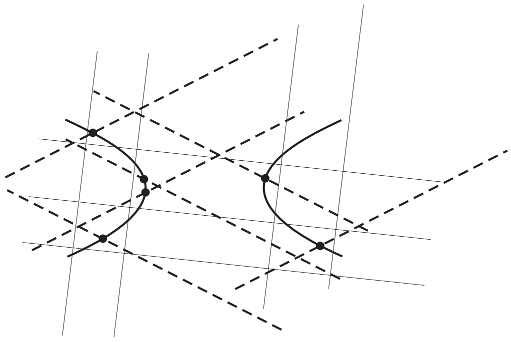


Рис. 40

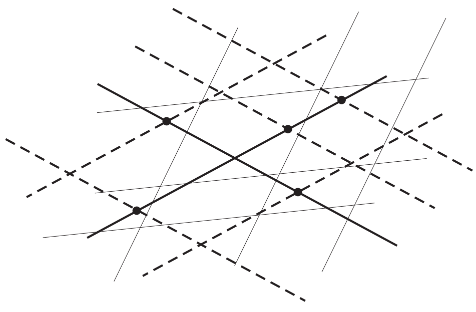


Рис. 41

единственна; б) уравнение (I) не имеет решений и поэтому точек пересечения нет; в) уравнение (I) имеет бесконечное множество решений и поэтому прямая целиком принадлежит линии.

12.2. Касательные к линии второго порядка

Рассмотрим теперь случай, когда уравнение (I) является квадратным. Тогда возможны следующие три подслучая: а) уравнение (I) не имеет действительных корней, т.е. точек пересечения прямой с линией нет; б) уравнение (I) имеет два различных действительных корня, т,е, прямая пересекает линию в двух различных точках; в) уравнение (I) имеет единственный кратный корень (который на самом деле представляет собой два действительных совпавших корня), т.е. прямая касается линии.

Рассмотрим вначале случай, когда прямая является для линии касательной. Тогда

$$a_{11}a_1^2 + 2a_{12}a_1a_2 + a_{22}a_2^2 \neq 0.$$

Уравнение касательной будем искать в виде

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}.$$

В качестве точки касания возьмём точку $M_0(x_0, y_0)$. Тогда, поскольку M_0 принадлежит линии, то

$$a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33} = 0.$$

Поэтому, как нетрудно убедиться, уравнение (I) записывается в виде

$$t\big((a_{11}a_1^2 + 2a_{12}a_1a_2 + a_{22}a_2^2)t + 2((a_{11}a_1x_0 + a_{12}a_2x_0 + a_{13}a_1)+$$
$$(a_{12}a_1y_0 + a_{22}a_2y_0 + a_{23}a_2))\big) = 0.$$

Очевидно, что $t_1 = 0$. Более того, мы рассматриваем точку касания, т.е. случай, когда две точки пересечения совпали в одну, что соответствует совпавшим корням квадратного уравнения, значит, $t_2 = 0$. Поэтому

$$2\big((a_{11}a_1x_0 + a_{12}a_2x_0 + a_{13}a_1) + (a_{12}a_1y_0 + a_{22}a_2y_0 + a_{23}a_2))\big) = 0.$$

Отсюда получаем:

$$a_{11}a_1x_0 + a_{12}a_2x_0 + a_{13}a_1 = -a_{12}a_1y_0 - a_{22}a_2y_0 - a_{23}a_2;$$
$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})a_1 = (-a_{12}x_0 - a_{22}y_0 - a_{23})a_2;$$
$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})a_1 = -(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})a_2.$$

По свойству пропорций

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{-(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})}{a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}};$$

Таким образом, уравнение касательной в точке M_0 принимает вид:

$$\frac{x - x_0}{-(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})} = \frac{y - y_0}{a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}}.$$

Снова применяя свойства пропорций, получаем:

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})(x - x_0) + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})(y - y_0) = 0.$$

Раскрыв скобки получим:

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})x + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})y-$$
$$a_{11}x_0^2 - a_{12}x_0y_0 - a_{13}x_0 - a_{12}x_0y_0 - a_{22}y_0^2 - a_{23}y_0 = 0.$$

Отсюда, снова вспомнив, что точка касания принадлежит линии и поэтому

$$a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33} = 0,$$

получим уравнение:

$$\boxed{(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})x + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})y + a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} = 0,} \qquad (12.2)$$

которое называется уравнением касательной к данной линии второго порядка в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Выведем теперь уравнения касательных к эллипсу, гиперболе и параболе. Так как для эллипса и гиперболы выводы аналогичны, то объединим их.

Пусть линия второго порядка задана уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Тогда общее уравнение этой линии имеет вид:

$$b^2x^2 \pm a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Пусть прямая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1t; \\ y = y_0 + a_2t. \end{cases}$$

Подставив их в общее уравнение нашей линии, получим:

$$b^2(x_0 + a_1t)^2 \pm a^2(y_0 + a_2t)^2 - a^2b^2 = 0.$$

Совершим теперь несколько преобразований:

$$b^2(x_0^2 + 2x_0a_1t + a_1^2t^2) \pm a^2(y_0^2 + 2y_0a_2t + a_2^2t^2) - a^2b^2 = 0;$$

$$(a_1^2b^2 \pm a_2^2a^2)t^2 + 2(a_1b^2x_0 \pm a^2a_2y_0)t + b^2x_0^2 \pm a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0.$$

Точка M_0 принадлежит линии, поэтому $b^2x_0^2 \pm a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0$. Следовательно,

$$t((a_1^2b^2 \pm a_2^2a^2)t + 2(a_1b^2x_0 \pm a^2a_2y_0)) = 0.$$

Отсюда $t_1 = 0$. Но корни совпавшие. Значит, $t_2 = 0$. Поэтому

$$a_1b^2x_0 \pm a^2a_2y_0 = 0. \qquad (*)$$

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка касательной, отличная от точки M_0. Тогда $x = x_0 + a_1t_1; y = y_0 + a_2t_1$ (t_1 — значение параметра для точки M). Следовательно,

$$a_1 = \frac{x - x_0}{t_1}; a_2 = \frac{y - y_0}{t_1}.$$

Подставив полученные выражения в (*), получим:

$$b^2x_0\frac{x - x_0}{t_1} \pm a^2y_0\frac{y - y_0}{t_1} = 0;$$

$$b^2x_0(x - x_0) \pm a^2y_0(y - y_0) = 0;$$

$$b^2x_0x - b^2x_0^2 \pm (a^2y_0y - a^2y_0^2) = 0;$$

$$b^2xx_0 \pm a^2yy_0 - (b^2x_0^2 \pm a^2y_0^2 - a^2b^2) - a^2b^2 = 0.$$

Снова воспользовавшись тем, что $M_0(x_0, y_0)$ — точка линии, получим:

$$b^2xx_0 \pm a^2yy_0 = a^2b^2$$

или окончательно:

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} \pm \frac{yy_0}{b^2} = 1} \qquad (12.3)$$

— уравнение касательной к эллипсу и гиперболе.

Выведем теперь уравнение касательной к параболе. Пусть парабола задана своим каноническим уравнением

$$y^2 = 2px.$$

Перепишем его в виде

$$y^2 - 2px = 0.$$

Подставим, как и в случае вывода уравнения касательной к эллипсу и гиперболе, значения координат из параметрических уравнений для некоторой точки $M_0(x_0, y_0)$, которая является точкой касания для нашей параболы и совершим затем несколько преобразований:

$$(y_0 + a_2t)^2 - 2p(x_0 + a_1t) = 0;$$

$$y_0^2 + 2y_0a_2t + a_2^2t^2 - 2px_0 - 2pa_1t = 0;$$

$$a_2^2t^2 + 2(y_0a_2 - pa_1)t = 0;$$

$$t(a_2^2t + 2(y_0a_2 - pa_1)) = 0.$$

Ввиду совпадения корней, $y_0a_2 - pa_1 = 0$. Теперь, как и в случае эллипса и гиперболы, подставив

$$a_1 = \frac{x - x_0}{t_1}; a_2 = \frac{y - y_0}{t_1},$$

где t_1 — значение параметра для некоторой произвольной точки M касательной, получим:

$$y_0\frac{y - y_0}{t_1} - p\frac{x - x_0}{t_1} = 0;$$

$$y_0(y - y_0) - p(x - x_0) = 0;$$

$$y_0y - y_0^2 - px + px_0 = 0;$$

$$yy_0 - px - y_0^2 + 2px_0 - px_0 = 0$$

и, вспомнив, что точка $M_0(x_0, y_0)$ так же принадлежит параболе, получаем:

$$\boxed{yy_0 = p(x + x_0)} \tag{12.4}$$

— уравнение касательной к параболе.

12.3. Диаметры линии второго порядка

Пусть линия второго порядка задана своим общим уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{$*$}$$

Пусть некоторое множество прямых имеет неасимптотическое направление. Это множество можно определить и так: множество прямых, имеющих в качестве направляющего вектора вектор $\vec{a}(a_1, a_2)$, который не является асимптотическим направлением для данной линии. На каждой из этих прямых в качестве точки $M_0(x_0, y_0)$ возьмём середину некоторой хорды l отсекаемой каждой из них на линии (*). Будем считать, что x_0 и y_0 — переменные, что позволит нам определить целый класс прямых.

Пусть $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ — концы хорды l. Тогда

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}; y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (III)$$

С другой стороны, поскольку взятые нами точки принадлежат прямой, имеющей направляющий вектор $\vec{a}(a_1, a_2)$, то можно воспользоваться параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + a_1 t_1; \\ y_1 = y_0 + a_2 t_1. \end{cases} \begin{cases} x_2 = x_0 + a_1 t_2; \\ y_2 = y_0 + a_2 t_2. \end{cases}$$

Здесь t_1 и t_2 — значения параметра для точек M_1 и M_2 соответственно. Подставив полученные выражения в (III), получим:

$$x_0 = x_0 + a_1 (\frac{t_1 + t_2}{2}); y_0 = y_0 + a_2 (\frac{t_1 + t_2}{2}).$$

Значит,

$$a_1 \frac{t_1 + t_2}{2} = 0; a_2 \frac{t_1 + t_2}{2} = 0.$$

Координаты направляющего вектора не могут быть равны нулю одновременно, поэтому получим, что $t_1 + t_2 = 0$. Но $t_1,\ t_2$ — корни квадратного уравнения (I). Запишем это уравнение в виде $Ax + By + C = 0$. Т.к. $t_1 + t_2 = -\dfrac{2B}{A}$, то $B = 0$. Поэтому из уравнения (I) получим:

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})a_1 + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})a_2 = 0. \qquad (IV)$$

Перегруппировав члены этого уравнения по-другому, и заменив фиксированные координаты x_0 и y_0 на переменные x и y, получим уравнение

$$(a_{11}a_1 + a_{12}a_2)x + (a_{12}a_1 + a_{22}a_2)y + a_{13}a_1 + a_{23}a_2 = 0. \qquad (V)$$

Это уравнение некоторой прямой d на которой расположены середины всех хорд, отсекаемых на линии (*) прямыми, направляющий вектор которых $\vec{a}(a_1, a_2)$. На рисунках 42-47 показаны примеры диаметров для линий второго порядка различных типов.

Поскольку мы рассматриваем случай когда направление хорд не совпадает с направлением ни одной из координатных осей, то $a_1 \neq 0$. Следовательно, обозначив $k = \dfrac{a_2}{a_1}$, получим следующий вид уравнения (IV):

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) + k(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}) = 0.$$

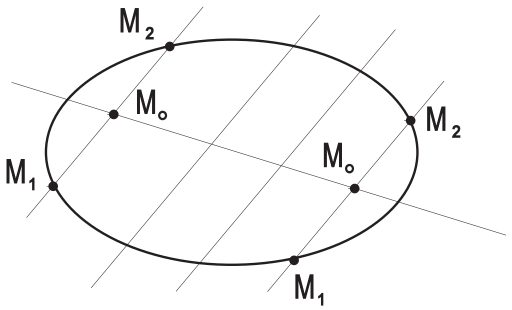


Рис. 42

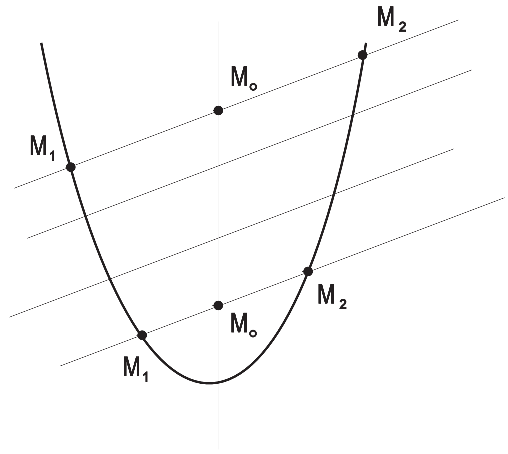


Рис. 43

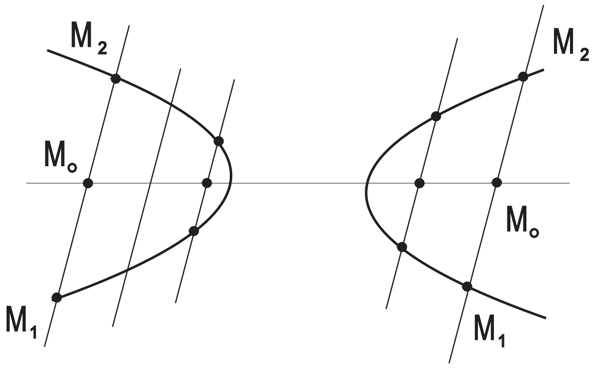


Рис. 44

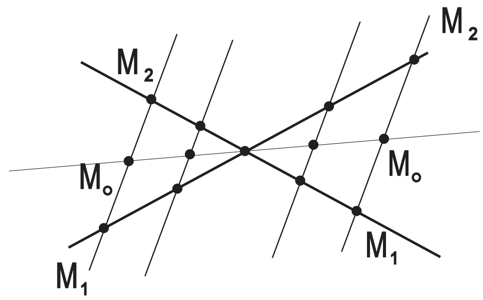


Рис. 45

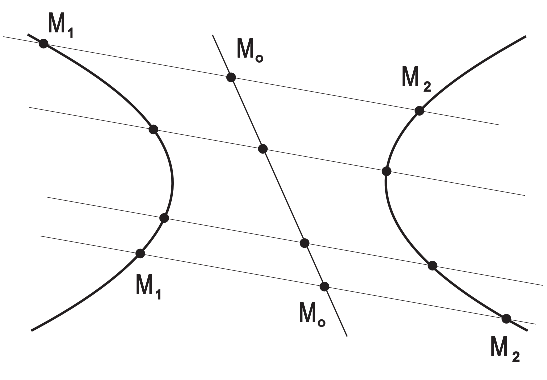


Рис. 46

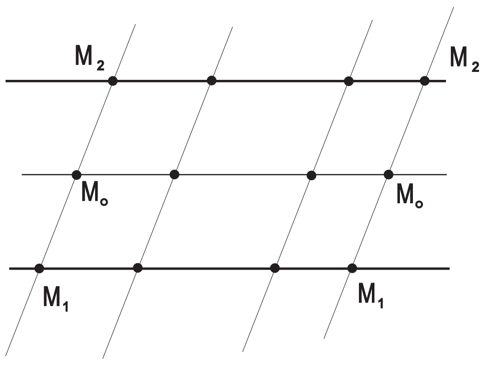


Рис. 47

Снова заменив координаты фиксированной точки на переменные, получим:

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + k(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) = 0. \qquad (VI)$$

Определение 12.4. Прямая, определяемая уравнением

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + k(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) = 0.$$

называется диаметром линии второго порядка, сопряжённым направлению (a_1, a_2).

Замечание 12.2. *Если хорды оказываются параллельными оси OX, то тогда они имеют направление $(a_1, 0)$. Следовательно, уравнение диаметра в этом случае принимает вид*

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) = 0.$$

Если же хорды параллельны оси OY, то их направление определяет вектор $(0, a_2)$. Как поступить в этом случае, ведь тогда коэффициент k неопределен? Нужно вернуться к уравнению (IV) и обозначить $k = \dfrac{a_1}{a_2}$. Тогда уравнение (VI) принимает вид

$$k(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + (a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) = 0.$$

И, так как в этом случае $k = 0$, то окончательно, уравнение диаметра будет иметь вид

$$(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) = 0.$$

Поскольку координаты центра линии заданы системой

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13} = 0; \\ a_{12}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23} = 0, \end{cases}$$

то очевидно, что центр линии (если конечно он существует) лежит на любом диаметре.

Обратно, пусть линия второго порядка центральная и пусть некоторая прямая d неасимптотического направления проходит через центр линии — точку $M_0(x_0, y_0)$. Тогда уравнение этой прямой можно записать в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \qquad (VII)$$

Попробуем найти такое направление (a_1, a_2) для которого прямая d будет сопряжённым диаметром. Если такое направление найдётся, то уравнение (VII) прямой d запишется в виде уравнения диаметра, сопряжённого направлению (a_1, a_2), т.е. в виде уравнения (V). Если раскрыть скобки в уравнении (VII), то коэффициентами при неизвестных будут A и B. Приравняв их к сооветствующим коэффициентам уравнения (V), получим систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}a_1 + a_{12}a_2 = A; \\ a_{12}a_1 + a_{22}a_2 = B. \end{cases}$$

Поскольку мы рассматриваем случай, когда линия центральна, то $\delta \neq 0$ и поэтому эта система (которая является системой двух линейных уравнений относительно неизвестных a_1 и a_2) решается однозначно. Подставив полученные значения коэффициентов в уравнение (VII), мы получим уравнение

$$(a_{11}a_1 + a_{12}a_2)(x - x_0) + (a_{12}a_1 + a_{22}a_2)(y - y_0) = 0,$$

перегруппировав которое получим:

$$(a_{11}a_1 + a_{12}a_2)x + (a_{12}a_1 + a_{22}a_2)y-$$

$$((a_{11}a_1 + a_{12}a_2)x_0 + (a_{12}a_1 + a_{22}a_2)y_0) = 0;$$

$$(a_{11}a_1 + a_{12}a_2)x + (a_{12}a_1 + a_{22}a_2)y-$$

$$((a_{11}x_0 + a_{12}y_0)a_1 + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0)a_2) = 0.$$

Но x_0 и y_0 — координаты центра. Поэтому, используя уравнения центра, получим:

$$(a_{11}a_1 + a_{12}a_2)x + (a_{12}a_1 + a_{22}a_2)y + a_{13}a_1 + a_{23}a_2 = 0,$$

т.е. действительно уравнение диаметра (V).

Таким образом, мы однозначно получаем значение некоторого направления, для которого наша прямая является сопряжённым диаметром. Итак, мы получили следующее утверждение.

Теорема 12.1. *Всякая прямая неасимптотического направления, проходящая через центр линии второго порядка является диаметром, сопряжённым некоторому асимптотическому направлению.*

Если для прямой, проходящей через центр взять асимптотическое направление, то она окажется асимптотой (такой случай возможен лишь для линий гиперболического типа). Асимптоту можно считать диаметром, сопряжённым самому себе, поскольку хорд асимптотического направления не существует. Таким образом, мы приходим к более сильному утверждению.

Теорема 12.2. *Диаметр линии второго порядка может быть определён как прямая, проходящая через центр.*

13. Тема 13. Симметрия линии второго порядка

1. Взаимно сопряжённые векторы. Особое направление

2. Вид уравнения линии второго порядка если оси координат имеют сопряжённые направления

3. Оси симметрии и главные направления линии второго порядка

13.1. Взаимно сопряжённые векторы. Особое направление

Выше мы получили уравнение диаметра, сопряжённого направлению (a_1, a_2) (IV). Направляющий вектор этого диаметра обозначим через $\vec{b}(b_1, b_2)$. Тогда непосредственно из уравнения получим: $b_1 = -(a_{12}a_1 + a_{22}a_2)$; $b_2 = (a_{11}a_1 + a_{12}a_2)$. Умножим первое из полученных равенств на $-b_2$, а второе — на b_1 и сложим их:

$$-b_2b_1 + b_2b_1 = b_2(a_{12}a_1 + a_{22}a_2) + b_1(a_{11}a_1 + a_{12}a_2).$$

Перегруппировав и введя обозначения $k_1 = \dfrac{a_2}{a_1}$ и $k_2 = \dfrac{b_2}{b_1}$, мы получим соотношение, которое называется зависимостью между двумя сопряжёнными направлениями:

$$\boxed{a_{11} + a_{12}(k_2 + k_1) + a_{22}k_1k_2 = 0} \tag{13.1}$$

Предположим, что два сопряжённых между собой направления совпадают. Это будет тогда и только тогда, когда (13.1) имеет вид:

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0,$$

или, если вернуть старые обозначения,

$$a_{11}a_1^2 + 2a_{12}a_1a_2 + a_{22}a_2^2 = 0.$$

Следовательно, направление тогда и только тогда совпадает со своим сопряжённым, когда оно является асимптотическим. Поэтому асимптотические направления называют иначе самосопряжёнными.

Может ли направление (b_1, b_2), сопряжённое направлению (a_1, a_2) быть неопределённым? Это будет означать, что $\vec{b} = \vec{0}$, т.е.

$$\begin{cases} a_{11}a_1 + a_{12}a_2 = 0; \\ a_{12}a_1 + a_{22}a_2 = 0 \end{cases} \qquad (I)$$

Но a_1 и a_2 не могут быть равны нулю одновременно. Поэтому уравнения этой системы возможны только тогда, когда $\delta = 0$, т.е. если линия является линией параболического типа.

Определение 13.1. Направление у которого сопряжённое направление неопределено называется особым.

Умножим обе части первого уравнения (I) на a_1, а второго на a_2 и сложим их:

$$a_{11}a_1^2 + 2a_{12}a_1a_2 + a_{22}a_2^2 = 0.$$

Это означает, что направление (a_1, a_2) является асимптотическим.

Теорема 13.1. *Для линии параболического типа и только для неё единственное асимптотическое направление является особым, т.е. сопряжённым всякому направлению.*

Теорема 13.2. *В случае параболы всякая прямая асимптотического направления есть диаметр, сопряжённый некоторому вполне определённому направлению. Диаметры параболы могут быть определены как прямые асимптотического направления.*

На рис. 48 показаны различные случаи диаметра для параболы (диаметры даны пунктиром), которые наглядно иллюстрируют Утверждение 2: все диаметры параболы имеют одно и то же направление, т.е. параллельны.

13.2. Вид уравнения линии второго порядка если оси координат имеют сопряжённые направления

Пусть линия второго порядка задана своим общим уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \qquad (I)$$

Уравнение диаметра, сопряжённого направлению (a_1, a_2) имеет вид:

$$(a_{11}a_1 + a_{12}a_2)x + (a_{12}a_1 + a_{22}a_2)y + a_{13}a_1 + a_{23}a_2 = 0. \qquad (II)$$

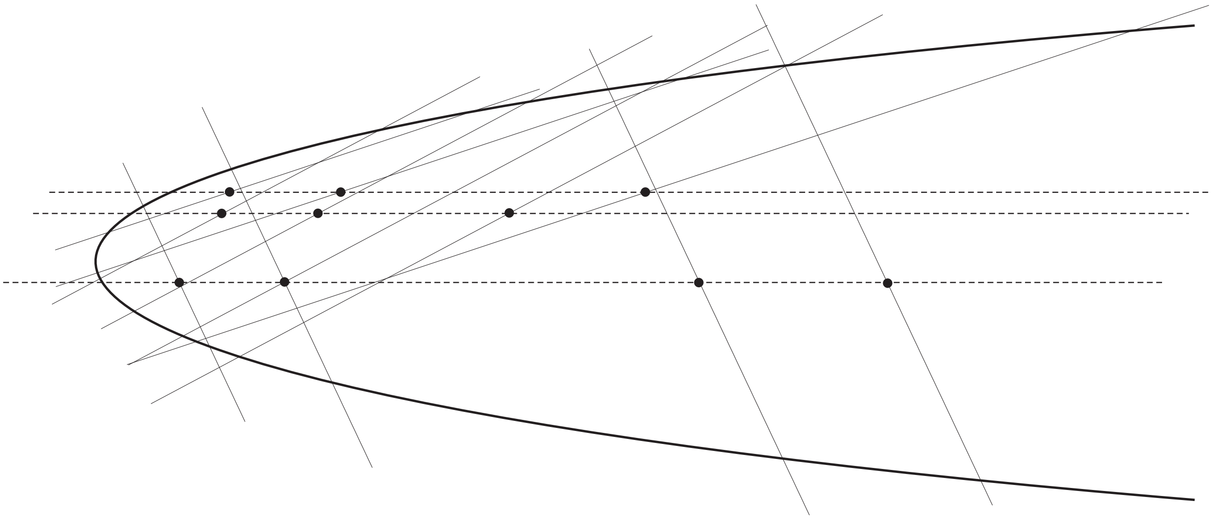


Рис. 48

Выше мы исключили случаи, когда указанное направление параллельно координатным осям. Разберём теперь их.

Если $a_1 = 1,\ a_2 = 0$ (т.е. вектор $\vec{a}(a_1, a_2)$ есть направляющий вектор оси абсцисс), то уравнение (II) превращается в уравнение

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0. \qquad (III)$$

Если $a_1 = 0,\ a_2 = 1$ (т.е. вектор $\vec{a}(a_1, a_2)$ есть направляющий вектор оси ординат), то указанное уравнение принимает вид:

$$a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0. \qquad (IV)$$

Пусть теперь ось ординат имеет произвольное направление, которое не является асимптотическим для данной линии,а ось абсцисс является диаметром, сопряжённым оси ординат. Тогда уравнение (IV) есть уравнение оси абсцисс, т.е. оно определяет ту же прямую, что и уравнение $y = 0$. Следовательно, коэффициенты $a_{12},\ a_{22},\ a_{23}$ уравнения (IV) должны быть пропорциональны коэффициентам $0,\ 1,\ 0$ уравнения оси OX. Это означает, что $a_{12} = 0,\ a_{22} \neq 0,\ a_{23} = 0$. Следовательно, в нашей системе координат линия имеет уравнение

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0. \qquad (V)$$

Рассмотрим отдельно два случая — когда линия центральна и когда нецентральна.

Пусть линия центральна. Координатные оси представляют собой сопряжённые друг другу направления относительно данной линии. Значит, поскольку у линии есть центр, то оси координат пересекаются в этом центре, т.е. являются сопряжёнными друг другу диаметрами. Тогда ось ординат имеет уравнение (III), которое должно быть равносильно уравнению

$$x = 0.$$

Значит, коэффициенты $a_{11},\ a_{12},\ a_{13}$ должны быть пропорциональны коэффициентам $1,\ 0,\ 0$ уравнения оси OY, т.е. $a_{11} \neq 0,\ a_{12} = 0,\ a_{13} = 0$. Поэтому уравнение (V) имеет вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0. \qquad (VI)$$

Пусть теперь линия нецентральна. Предположим, что она уже приведена к виду (V). Тогда, поскольку для нецентральных линий $\delta = 0$, то получим, что $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$. Но в (V) $a_{12} = 0$. Значит, $a_{11}a_{22} = 0$. Так как $a_{22} \neq 0$, то $a_{11} = 0$. Поэтому в итоге получаем уравнение

$$a_{22}y^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0.$$

Применив преобразование параллельного переноса по формулам:

$$\begin{cases} x' = x + \dfrac{a_{33}}{2a_{13}}; \\ y' = y, \end{cases}$$

мы получим уравнение

$$a_{22}{y'}^2 + 2a_{13}x' = 0. \qquad (VII)$$

Таким образом, если оси координат образуют пару сопряжённых диаметров линии (в случае если линия центральна) или ось ординат совпадает с единственным асимптотическим направлением (если линия параболического типа), то её уравнение имеет вид (VI) или (VII).

13.3. Оси симметрии и главные направления линии второго порядка

Пусть дана линия второго порядка F и пусть прямая d является её осью симметрии. Рассмотрим случай, когда направление, перпендикулярное к прямой d является для данной линии асимптотическим. Возьмём пару точек A_1 и A_2 линии F, симметричных относительно прямой d. Ввиду рассматриваемого случая, прямая d_1, проходящая через выбранные точки имеет асимптотическое направление и в то же время содержит по крайней мере две точки пересечения с линией. Это может быть только в том случае, когда указанная прямая целиком принадлежит линии (мы уже говорили о такой возможности в Замечании VI.1.1). Следовательно, линия F распадается на пару прямых — d_1 и d_2, одна из которых перпендикулярна к d. Прямая d_2 не может быть наклонной к прямой d. Следовательно, либо d_2 перпендикулярна к d, либо d_2 совпадает с d. В первом случае линия F состоит из двух параллельных прямых (рис. 49) и тогда всякая прямая, перпендикулярная этим прямым является их осью симметрии. Осью симметрии линии F является так же и единственный её диаметр d' — прямая, проходящая посередине между ними.

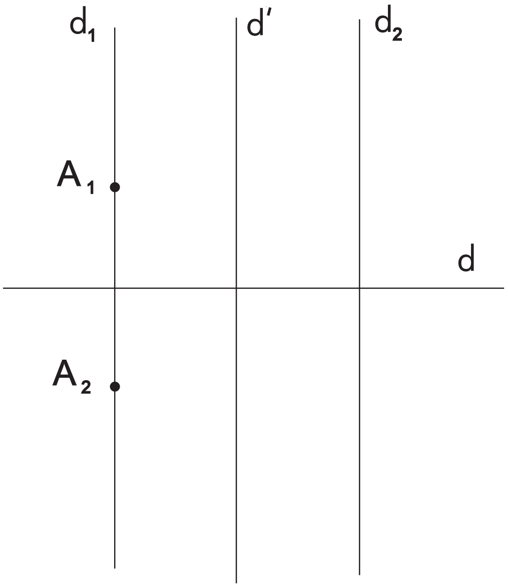


Рис. 49

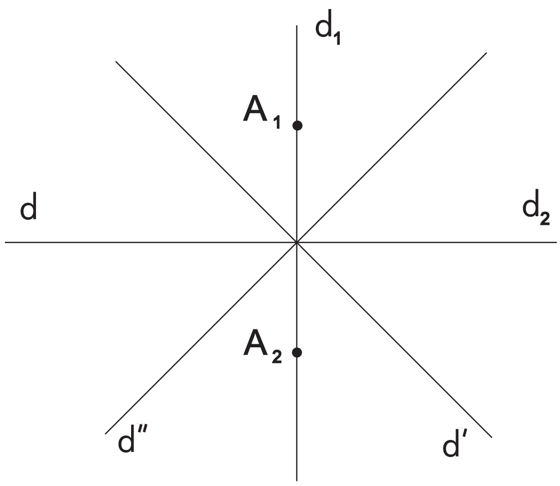


Рис. 50

Во втором случае (рис. 50) линия представляет собой пару перпендикулярных друг другу прямых. Каждая из этих прямых есть ось симметрии линии F. Кроме того, осями симметрии являются и две биссектриссы двух пар вертикальных прямых углов, образованных этими прямыми. Эти биссектриссы являются (взаимно перпендикулярными) сопряжёнными диаметрами: каждый из них делит пополам хорды ему перпендикулярные (и параллельные второй биссектриссе). Итак, получаем следующее утверждение.

Теорема 13.3. *В случае, если ось симметрии линии второго порядка оказывается перпендикулярной некоторому асимптотическому направлению, то линия распадается либо на пару параллельных прямых и имеет бесконечно много осей симметрии, либо на пару пересекающихся прямых и имеет четыре оси симметрии.*

Рассмотрим теперь случай, когда направление, перпендикулярное к прямой d, выбранной нами в качестве оси симметрии, не является асимптотическим для данной линии F. Пусть d_1 — какая-нибудь прямая, перпендикулярная к прямой d. Линия пересекает прямую d_1 в двух точках A_1 и A_2 (они могут быть в том числе и совпавшими или даже мнимыми), симметричных относительно прямой d так, что прямая делит пополам хордуA_1A_2 (рис. 51). Это значит, что прямая d является диаметром линии F, сопряжённым направлению, перпендикулярному к прямой d (на рисунке даны три положения прямой d_1, которые и иллюстрируют три возможных случая).

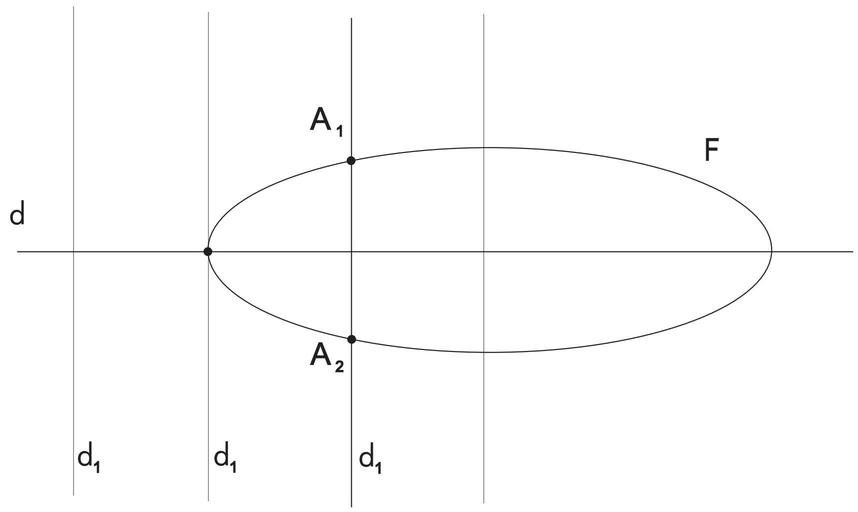


Рис. 51

Определение 13.2. Направление называется главным относительно линии второго порядка, если это направление и направление, перпендикулярное к нему являются взаимно сопряжёнными направлениями для данной линии. Диаметр линии, сопряжённый перпендикулярному к нему направлению, называется главным диаметром линии. Направление главного диаметра является главным направлением.

Непосредственно из определения главного направления вытекают следующие следствия:

Следствие 13.1. *Направление, перпендикулярное к главному так же является главным.*

Следствие 13.2. *Особое направление линии является для неё главным.*

По определению, особое направление — это такое направление, у которого сопряжённое направление перестаёт быть определённым. Любой диаметр параболы параллелен её оси, т.е. имеет асимптотическое направление. Среди диаметров параболы, однако, существует один, который сопряжён перпендикулярному ему направлению — это ось параболы. Значит, особое направление параболы является главным. Направление, перпендикулярное особому направлению параболы так же является главным.

Теорема 13.4. *Ось параболы — единственная её ось симметрии.*

Если линия второго порядка представляет собой пару параллельных прямых (т.е. линию параболического типа), то она снова имеет два главных направления: направление прямых и перпендикулярное к нему направление.

Пусть теперь линия центральная. Поскольку асимптотическое направление является самопряжённым лишь самому себе, то ни одно из главных направлений не может быть асимптотическим. Значит диаметр центральной линии, имеющей главное направление является главным диаметром, т.е. осью симметрии линии. Но у центральных линий две оси симметрии.

Итак, всякая линия второго порядка имеет по крайней мере два главных направления, которые взаимно перпендикулярны.

Таким образом, можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 13.5. *За исключением случая, когда линия второго порядка является парой параллельных или перпендикулярных прямых, главные диаметры и только они являются осями симметрии линии.*

Будем искать такое направление, чтобы вектор $\vec{a}(a_1, a_2)$ этого направления был перпендикулярен к сопряжённому с ним вектору $\vec{b}(b_1, b_2)$. Тогда, с одной стороны,

$$-\frac{b_2}{b_1} = \frac{a_{11}a_1 + a_{12}a_2}{a_{12}a_1 + a_{22}a_2},$$

а с другой, ввиду условия перпендикулярности, $-\dfrac{b_2}{b_1}=\dfrac{a_1}{a_2}$. Значит,

$$\frac{a_{11}a_1+a_{12}a_2}{a_{12}a_1+a_{22}a_2}=\frac{a_1}{a_2}.$$

Это означает, что существует такое действительное число λ, что

$$\begin{cases} a_{11}a_1+a_{12}a_2=\lambda a_1; \\ a_{12}a_1+a_{22}a_2=\lambda a_2 \end{cases} \qquad (I)$$

или

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)a_1+a_{12}a_2=0; \\ a_{12}a_1+(a_{22}-\lambda)a_2=0. \end{cases} \qquad (II)$$

Пусть вначале линия центральна, т.е., $\delta\neq 0$. Тогда искомое нами направление (a_1,a_2) есть решение системы (II). Поскольку система однородная, то существование такого решения возможно лишь когда

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0. \qquad (III)$$

Это в частности означает, что уравнения (I) линейно зависимы или эквивалентны между собой. Поэтому достаточно взять одно из двух эквивалентных направлений:

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{\lambda-a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{\lambda-a_{22}}, \qquad (IV)$$

где λ — один из корней уравнения (III) (любой). Корни λ находятся из (III), которое можно записать в виде

$$\lambda^2-s\lambda+\delta=0,$$

т.е. получаем хорошо нам известное характеристическое уравнение линии второго порядка. Если теперь отдельно взять корни λ_1 и λ_2, то получим два главных направления:

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{(\lambda_1-a_{11})}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{\lambda_1-a_{22}}$$

и

$$\frac{a'_2}{a'_1}=\frac{(\lambda_1-a_{11})}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{\lambda_1-a_{22}}.$$

Поскольку

$$\lambda_{1,2}=\frac{s\pm\sqrt{s^2-4\delta}}{2}=\frac{s\pm\sqrt{(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)}}{2}=$$

$$\frac{s \pm \sqrt{a_{11}^2 + 2a_{11}a_{22} + a_{22}^2 - 4a_{11}a_{22} + 4a_{12}^2}}{2} =$$

$$\frac{s \pm \sqrt{a_{11}^2 - 2a_{11}a_{22} + a_{22}^2 + 4a_{12}^2}}{2} =$$

$$\frac{s \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2},$$

то эти корни действительны и различны и поэтому найденные нами направления существуют и различны. Если же $a_{11} = a_{22}$ и $a_{12} = 0$ (в случае окружности), то корни совпадают. При этом ни один из корней не равен нулю, т.к. подставив $\lambda = 0$ в характеристическое уравнение, мы получили бы $\delta = 0$. Из (IV) следует, что главные направления неопределённы тогда и только тогда, когда $a_{12} = 0;\ \lambda = a_{11}; \lambda = a_{22}$, т.е. снова приходим к окружности для которой всякий диаметр есть ось симметрии, а всякое направление — главное. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 13.6. *За исключением окружности, всякая линия второго порядка, которая является центральной, имеет два сопряжённых направления, которые взаимно перпендикулярны между собой.*