ЭЛЕКТРОСТАТИКА. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЗАРЯД

Электростатика – раздел учения об электричестве, изучающий взаимодействие неподвижных электрических зарядов и свойства постоянного электрического поля.

1. Электрический заряд

Электрический заряд – это *внутреннее свойство* тел или частиц, характеризующее их способность к электромагнитным взаимодействиям.

Единица электрического заряда – кулон (Кл) – электрический заряд, проходящий через поперечное сечение проводника при силе тока 1 ампер за время 1 секунда.

Существует ***элементарный*** (минимальный) ***электрический заряд***

$$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

Носитель элементарного отрицательного заряда – ***электрон.*** Его масса $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг. Носитель элементарного положительного заряда – ***протон.*** Его масса $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг.

- Электрический заряд подчиняется ***закону сохранения заряда***: Алгебраическая сумма электрических зарядов любой замкнутой системы остаётся неизменной, какие бы процессы ни происходили внутри данной системы.

В электростатике используется физическая модель – ***точечный электрический заряд*** – заряженное тело, форма и размеры которого несущественны в данной задаче.

ЗАКОН КУЛОНА (1)

Закон взаимодействия точечных зарядов – ***закон Кулона***: сила взаимодействия F между двумя неподвижными точечными зарядами, *находящимися в вакууме*, пропорциональна зарядам q_1 и q_2, и обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Сила $\vec{F}$ направлена вдоль прямой, соединяющей взаимодействующие заряды, т. е. является центральной, и соответствует притяжению ($F < 0$) в случае разноимённых зарядов и отталкиванию ($F > 0$) в случае одноименных зарядов. В векторной форме, сила, действующая на заряд q_1 со стороны заряда q_2:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r}.$$

На заряд q_2 со стороны заряда q_1 действует сила $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$.

ε_0 – *электрическая постоянная*, относящаяся к числу фундаментальных физических постоянных: $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{\text{Кл}^2}{\text{Н}\cdot\text{м}^2}$ или $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{\text{Ф}}{\text{м}}$.

Тогда $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9\,\frac{\text{м}}{\text{Ф}}$, где **фарад (Ф)** – единица электрической ёмкости (п. 21).

Если взаимодействующие заряды находятся в изотропной среде, то кулоновская сила:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2},$$

ЗАКОН КУЛОНА (2)

где ε – ***диэлектрическая проницаемость среды*** – безразмерная величина, показывающая во сколько раз сила взаимодействия F между зарядами в данной среде меньше их силы взаимодействия F_0 в вакууме

$$\varepsilon = \frac{F_0}{F}.$$

Диэлектрическая проницаемость вакуума $\varepsilon_{вак} = 1$. Подробнее диэлектрики и их свойства будут рассмотрены ниже (п. 15).

Часто бывает значительно удобнее считать, что заряды ***распределены в заряженном теле непрерывно*** – *вдоль* некоторой *линии* (например, в случае заряженного тонкого стержня), *поверхности* (например, в случае заряженной пластины) или *объёма*. Соответственно пользуются понятиями *линейной, поверхностной и объёмной плотностей зарядов.*

Объёмная плотность электрических зарядов: $\rho = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}$,

где $\mathrm{d}q$ – заряд малого элемента заряженного тела объёмом $\mathrm{d}V$.

Поверхностная плотность электрических зарядов: $\sigma = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S}$,

где $\mathrm{d}q$ – заряд малого участка заряженной поверхности площадью $\mathrm{d}S$.

Линейная плотность электрических зарядов: $\tau = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l}$,

где $\mathrm{d}q$ – заряд малого участка заряженной линии длиной $\mathrm{d}l$.

НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Электростатическим полем называется поле, создаваемое ***неподвижными*** электрическими зарядами.

Электростатическое поле описывается двумя величинами: ***потенциалом*** (*энергетическая скалярная* характеристика поля) и ***напряжённостью*** (*силовая векторная* характеристика поля).

Напряжённость электростатического поля – *векторная* физическая величина, определяемая силой, действующей *на единичный положительный* заряд q_0, помещённый в данную точку поля.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

Единица напряжённости электростатического поля – ньютон на кулон (Н/Кл): 1 Н/Кл=1 В/м, где В (вольт) – единица потенциала электростатического поля.

Напряжённость поля точечного заряда в вакууме (и в диэлектрике)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \qquad \left(\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\right),$$

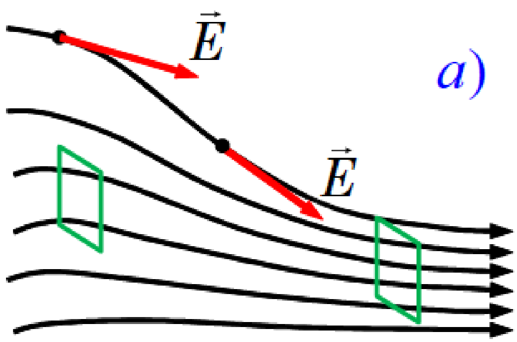
где $\vec{r}$ – радиус-вектор, соединяющий данную точку поля с зарядом q.

В скалярной форме $$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \qquad \left(E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{r^2}\right).$$

Направление вектора $\vec{E}$ *совпадает с направлением силы*, действующей на положительный заряд.

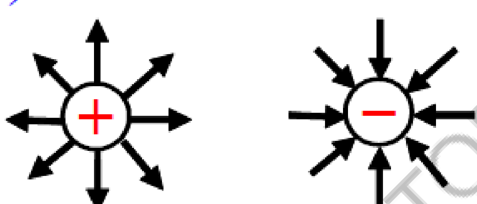
СИЛОВЫЕ ЛИНИИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Если поле создаётся ***положительным*** зарядом, то вектор $\vec{E}$ *направлен* вдоль радиуса-вектора от заряда *во внешнее пространство* (отталкивание пробного положительного заряда). Если поле создаётся ***отрицательным*** зарядом, то вектор $\vec{E}$ *направлен к заряду* (притяжение).



а)

б)

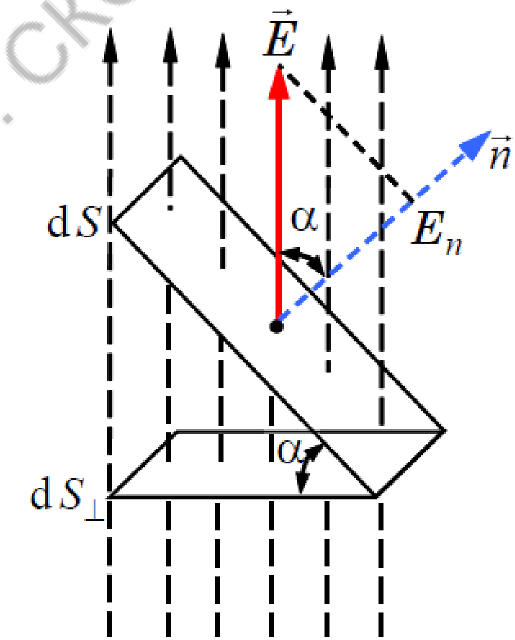


Графически электростатическое поле изображают с помощью ***линий напряжённости*** – линий, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора $\vec{E}$ (рис. (а)). Линиям напряжённости приписывается *направление, совпадающее с направлением вектора напряжённости*. Так как в данной точке пространства вектор напряжённости имеет лишь одно направление, то линии напряжённости *никогда не пересекаются*. Для ***однородного поля*** (когда вектор напряжённости в любой точке постоянен по модулю и направлению) линии напряжённости параллельны вектору напряжённости.

Если поле создаётся точечным зарядом, то линии напряжённости – радиальные прямые, *выходящие* из заряда, *если он положителен*, и *входящие* в него, *если заряд отрицателен* (рис. (б)).

ПОТОК ВЕКТОРА НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Чтобы с помощью линий напряжённости можно было характеризовать не только направление, но и *значение напряжённости* электростатического поля, их проводят с *определённой* ***густотой***: число линий напряжённости, пронизывающих единицу площади поверхности, перпендикулярную линиям напряжённости, должно быть равно модулю вектора $\vec{E}$.



Тогда число линий напряжённости, пронизывающих элементарную площадку $\mathrm{d}S$, равно $E \cdot \mathrm{d}S \cos\alpha = E_n \mathrm{d}S$, где E_n – проекция вектора $\vec{E}$ на нормаль $\vec{n}$ к площадке $\mathrm{d}S$. (Вектор $\vec{n}$ – единичный вектор, перпендикулярный площадке $\mathrm{d}S$). Величина

$$\mathrm{d}\Phi_E = E \cdot \mathrm{d}S_\perp = E \cdot \mathrm{d}S \cos\alpha = E_n \mathrm{d}S = \vec{E}\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

называется *потоком вектора напряжённости* через площадку $\mathrm{d}S$. Здесь $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mathrm{d}S\vec{n}$ – вектор, модуль которого равен $\mathrm{d}S$, а направление вектора совпадает с направлением $\vec{n}$ к площадке.

Поток вектора $\vec{E}$ сквозь произвольную замкнутую поверхность S:

$$\Phi_E = \oint_S E_n \mathrm{d}S = \oint_S \vec{E}\overrightarrow{\mathrm{d}S}.$$

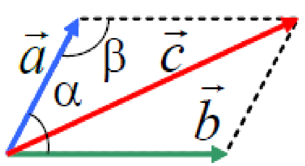
ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

К кулоновским силам применим рассмотренный в механике ***принцип независимости действия сил*** – *результирующая* сила, действующая со стороны поля на пробный заряд равна *векторной сумме* сил, приложенных к нему со стороны каждого из зарядов, создающих электростатическое поле.

Напряжённость *результирующего* поля, создаваемого системой зарядов, также равна ***геометрической*** сумме напряжённостей полей, создаваемых в данной точке каждым из зарядов в отдельности.

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i .$$

Эта формула выражает ***принцип суперпозиции*** (***наложения***) ***электростатических полей***. Он позволяет рассчитать электростатические поля любой системы неподвижных зарядов, представив ее в виде совокупности точечных зарядов.



Напомним правило определения величины вектора $\vec{c}$ суммы двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$|\vec{c}| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta} .$$

Вычисление напряжённости поля системы электрических зарядов с помощью принципа суперпозиции электростатических полей можно значительно упростить, используя теорему Гаусса, определяющую поток вектора напряжённости электрического поля *сквозь произвольную замкнутую поверхность*.

ТЕОРЕМА ГАУССА (ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА) (1) (ДЛЯ ПОТОКА ВЕКТОРА НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРОСТАТ. ПОЛЯ)

Рассмотрим поток вектора напряжённости через сферическую поверхность радиуса r, охватывающую точечный заряд q, находящийся в её центре:

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Этот результат справедлив *для любой замкнутой поверхности произвольной формы*, охватывающей заряд.

Если замкнутая поверхность не охватывает заряда, то *поток сквозь неё равен нулю*, так как число линий напряжённости, входящих в поверхность, равно числу линий напряжённости, выходящих из неё.

Рассмотрим *общий случай* ***произвольной*** *поверхности, окружающей* n *зарядов*. Согласно принципу суперпозиции напряжённость поля $\vec{E}$, создаваемого всеми зарядами, равна сумме напряжённостей $\vec{E}_i$, создаваемых каждым зарядом в отдельности. Поэтому

$$\Phi_E = \oint_S E_n \, \mathrm{d}S = \oint_S \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \sum_{i=1}^{n} \oint_S \vec{E}_i \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i .$$

Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме: поток вектора напряжённости электростатического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность равен *алгебраической* сумме заключённых внутри этой поверхности зарядов, делённых на ε_0.

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ СМЕЩЕНИЕ

Напряжённость электростатического поля зависит от свойств среды (от ε).

Безразмерная величина $\varepsilon = 1 + \chi = \dfrac{E_0}{E}$ называется ***диэлектрической проницаемостью среды***. Она характеризует способность диэлектриков поляризоваться в электрическом поле и показывает, во сколько раз поле $\vec{E}_0$ ослабляется диэлектриком. Результирующее поле внутри диэлектрика E.

Кроме того, вектор напряжённости $\vec{E}$, переходя через границу диэлектриков, претерпевает *скачкообразное изменение*, поэтому для описания (непрерывного) электрического поля системы зарядов с учётом поляризационных свойств диэлектриков вводится ***вектор электрического смещения*** (***электрической индукции***), который для изотропной среды записывается как $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$.

Единица электрического смещения – Кл/м^2.

Вектор $\vec{D}$ описывает электростатическое поле, создаваемое *свободными* зарядами (т. е. в вакууме), но при таком их распределении в пространстве, какое имеется при наличии диэлектрика.

Аналогично линиям напряжённости, можно ввести *линии электрического смещения*. Через области поля, где находятся связанные заряды, линии вектора $\vec{D}$ проходят *не прерываясь*.

ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА) (2)
(ДЛЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ДИЭЛЕКТРИКЕ)

Для произвольной *замкнутой* поверхности S поток вектора $\vec{D}$ сквозь эту поверхность:

$$\Phi_D = \oint_S \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{S} = \oint_S D_n\,\mathrm{d}S,$$

где D_n – проекция вектора $\vec{D}$ на нормаль $\vec{n}$ к площадке $\mathrm{d}S$.

Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике: поток вектора смещения электростатического поля в диэлектрике сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключённых внутри этой поверхности *свободных* электрических зарядов:

$$\oint_S \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{S} = \oint_S D_n\,\mathrm{d}S = \sum_{i=1}^{n} q_i .$$

Для непрерывного распределения заряда в пространстве с объёмной плотностью $\rho = \mathrm{d}q/\mathrm{d}V$:

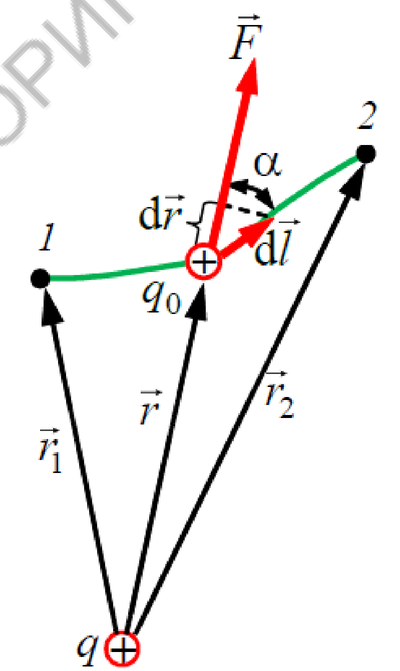
$$\oint_S \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho\,\mathrm{d}V .$$

Другая форма записи этого соотношения с учётом определения дивергенции вектора (стр.1-31):

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho .$$

РАБОТА СИЛ ПОЛЯ. ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРА НАПРЯЖЕННОСТИ (1)

Если в электростатическом поле точечного заряда q из точки 1 в точку 2 вдоль произвольной траектории перемещается другой точечный заряд q_0, то сила, приложенная к заряду, совершает работу. *Работа силы* на элементарном перемещении $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ равна



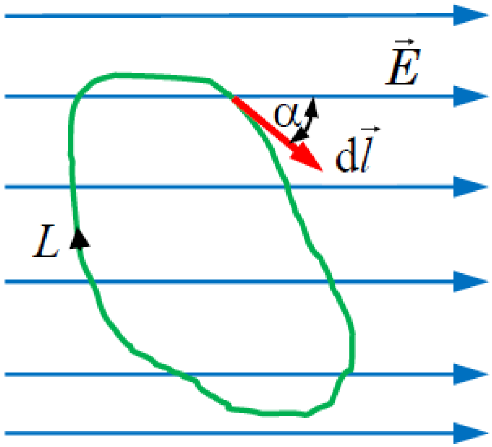
$$\mathrm{d}A = \vec{F}\overrightarrow{\mathrm{d}l} = F\,\mathrm{d}l\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\mathrm{d}l\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\mathrm{d}r.$$

Работа при перемещении заряда q_0 из точки 1 в точку 2:

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2}\mathrm{d}A = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{qq_0}{r_1} - \frac{qq_0}{r_2}\right).$$

Работа A_{12} не зависит от траектории перемещения, а *определяется только положениями начальной и конечной точек*. Следовательно, электростатическое поле точечного заряда является ***потенциальным***, а электростатические силы – ***консервативными***.

РАБОТА СИЛ ПОЛЯ. ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРА НАПРЯЖЕННОСТИ (2)



Таким образом, работа перемещения заряда в электростатическом поле по любому замкнутому контуру L равна нулю:

$$\oint_L \mathrm{d}A = 0.$$

Если переносимый заряд ***единичный***, то элементарная работа сил поля на пути $\mathrm{d}\vec{l}$ равна $\vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} = E_l\,\mathrm{d}l$, где $E_l = E\cos\alpha$ – проекция вектора $\vec{E}$ на направление элементарного перемещения $\mathrm{d}\vec{l}$.

Интеграл $\oint_L \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} = \oint_L E_l\,\mathrm{d}l$ называется ***циркуляцией вектора напряжённости*** по заданному замкнутому контуру L.

Теорема о циркуляции вектора $\vec{E}$:

Циркуляция вектора напряжённости электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю

$$\oint_L \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} = \oint_L E_l\,\mathrm{d}l = 0.$$

Силовое поле, обладающее таким свойством, называется ***потенциальным***. Эта формула справедлива ***только для*** электрического поля ***неподвижных*** зарядов (***электростатического***).

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ЗАРЯДА

В потенциальном поле тела обладают потенциальной энергией, и работа консервативных сил совершается за счёт убыли потенциальной энергии.

Поэтому работу A_{12} можно представить, как разность потенциальных энергий заряда q_0 в начальной и конечной точках в поле заряда q:

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r_2} = W_1 - W_2 .$$

Потенциальная энергия заряда q_0, находящегося в поле заряда q на расстоянии r от него равна:

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r} + \text{const} .$$

Считая, что при удалении заряда на бесконечность, потенциальная энергия обращается в нуль, получаем: $\text{const} = 0$.

Для ***одноименных*** зарядов потенциальная энергия их взаимодействия (*отталкивания*) *положительна*, для ***разноимённых*** зарядов потенциальная энергия из взаимодействия (*притяжения*) *отрицательна*.

Если поле создаётся системой n точечных зарядов, то потенциальная энергия заряда q_0, находящегося в этом поле, равна сумме его потенциальных энергий, создаваемых каждым из зарядов в отдельности:

$$W = \sum_{i=1}^{n} U_i = q_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_i} .$$

ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ. РАЗНОСТЬ ПОТЕНЦИАЛОВ

Отношение $\dfrac{W}{q_0}$ не зависит от пробного заряда q_0 и является, *энергетической характеристикой поля*, называемой ***потенциалом*** $\varphi = \dfrac{W}{q_0}$.

Потенциал φ в какой-либо точке электростатического поля есть ***скалярная*** физическая величина, определяемая потенциальной энергией единичного положительного заряда, помещённого в эту точку.

Например, потенциал поля, создаваемого точечным зарядом q, равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}.$$

Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда q_0 из точки 1 в точку 2, может быть представлена как

$A_{12} = W_1 - W_2 = q_0(\varphi_1 - \varphi_2) = q_0\Delta\varphi$, Отсюда следует: $\varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi = \dfrac{A_{12}}{q_0}$.

$A_{12} = \int\limits_1^2 \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{l} = \int\limits_1^2 q_0\vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} = q_0\int\limits_1^2 \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l}$ Отсюда следует: $\varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi = \dfrac{A_{12}}{q_0} = \int\limits_1^2 \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} = \int\limits_1^2 E_l\,\mathrm{d}l$,

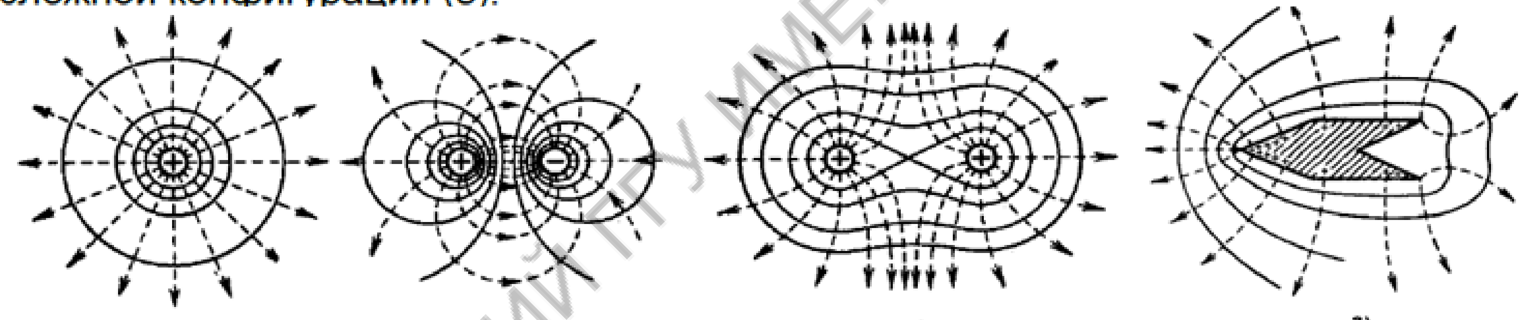
***Единица потенциала* – вольт (В)**: 1В есть потенциал такой точки поля, в которой заряд в 1Кл обладает потенциальной энергией 1 Дж (1 В=1 Дж/1 Кл).

Принцип суперпозиции потенциалов электростатических полей: Если поле создаётся несколькими зарядами, то потенциал поля системы зарядов равен *алгебраической сумме* потенциалов полей всех этих зарядов.

ЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

эквипотенциальные поверхности – поверхности, во всех точках которых потенциал имеет одно и то же значение.

Эквипотенциальные поверхности обычно проводят так, чтобы разности потенциалов между двумя соседними эквипотенциальными поверхностями были одинаковы. Тогда густота эквипотенциальных поверхностей наглядно характеризует напряжённость поля в разных точках. Там, где эти поверхности расположены гуще, напряжённость поля больше. На рисунке пунктиром изображены силовые линии, сплошными линиями – сечения эквипотенциальных поверхностей для: положительного точечного заряда (*а*), диполя (*б*), двух одноименных зарядов (*в*), заряженного металлического проводника сложной конфигурации (*г*).



а) б) в) г)

Для точечного заряда потенциал $\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r}$, поэтому эквипотенциальные поверхности – это концентрические сферы. С другой стороны, линии напряжённости – радиальные прямые. Следовательно, линии напряжённости перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям.

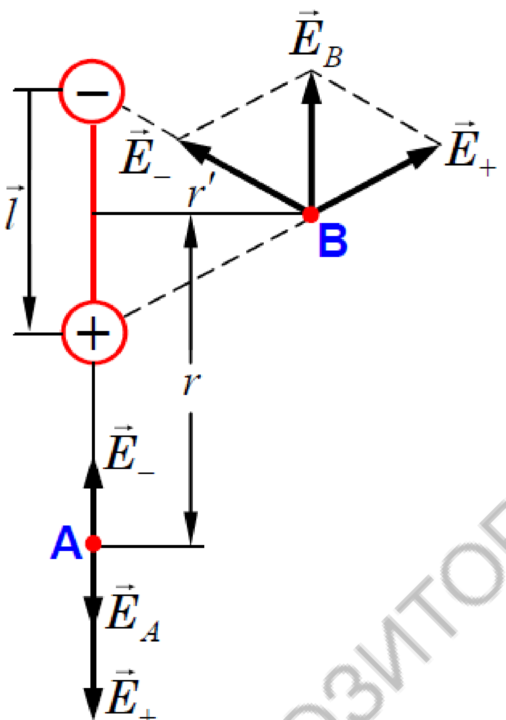
Можно показать, что *во всех случаях* вектор $\vec{E}$

1) *перпендикулярен* эквипотенциальным поверхностям;
2) всегда *направлен в сторону убывания потенциала*.

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ДИПОЛЯ В ВАКУУМЕ. ПРИМЕР РАССЧЕТА.

Электрический момент диполя $\vec{p}_e$ – вектор, совпадающий по направлению с плечом диполя и равный произведению модуля заряда $|q|$ на плечо $\vec{l}$:

$$\vec{p}_e = |q|\vec{l}$$



1) Напряжённость поля диполя *на продолжении оси диполя* в точке **A**

$$E_A = E_+ - E_-, \quad \varphi = \varphi_+ + \varphi_- .$$

Пусть r – расстояние до точки **A** от середины оси диполя. Тогда, учитывая что $r \gg l$,

$$E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2ql}{r^3} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p_e}{r^3},$$

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r-l/2} - \frac{q}{r+l/2}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_e}{r^2}.$$