

**Министерство образования Республики Беларусь**

**Учреждение образования  
«Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины»**

**С. С. Гиргель**

**ОСНОВЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ КРИСТАЛЛООПТИКИ  
МАГНИТОУПОРЯДОЧЕННЫХ СРЕД**

*Монография*

**Гомель 2008**

УДК 537.632  
ББК 22.374+22.373  
Г 51

**Рецензенты:**

А. Н. Сердюков, профессор, доктор физико-математических наук;  
кафедра оптики учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»;  
П. А. Хило, профессор, доктор физико-математических наук;  
кафедра физики учреждения образования «Гомельский государственный политехнический университет имени П. Сухого»

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

**Гиргель, С. С.**

Г51 Основы теоретической кристаллооптики магнитоупорядоченных сред: монография / С. С. Гиргель; М-во образования РБ, Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2008.– 200 с.

ISBN 978-985-439-299-8

Изложены основы последовательной феноменологической теории кристаллооптических явлений в средах с упорядоченной магнитной структурой с учетом анизотропии, гиротропии и поглощения. Широкое применение принципов симметрии позволило автору развить теорию и предсказать ряд новых магнитооптических явлений, большинство из которых затем были экспериментально обнаружены и исследовались.

Предназначена для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов физических специальностей.

УДК 537.632  
ББК 22.374+22.373

ISBN 978-985-439-299-8

© Гиргель, С. С., 2008  
© УО «ГГУ им. Ф.Скорины», 2008

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b> .....	6
<b>1 Принцип симметрии кинетических коэффициентов в кристаллофизике сред с магнитной структурой</b> .....	12
1.1 О применении принципа симметрии кинетических коэффициентов к макроскопическим явлениям в магнитных кристаллах.....	12
1.2 Принцип Онзагера-Казимира для магнитоупорядоченных кристаллов и линейные материальные уравнения электродинамики.....	
1.3 Законы сохранения в кристаллооптике линейных диспергирующих сред.....	23
<b>2 Электромагнитные волны в магнетиках</b> .....	27
2.1 Показатели преломления и поляризация собственных волн в прозрачных кристаллах.....	27
2.2 Поляризация собственных волн и сингулярные направления в поглощающих магнетиках.....	29
2.3 Поляризация световых волн и оптические оси в поглощающих кристаллах средней и высшей категорий.....	35
2.4 Сингулярные направления в кристаллах ромбической системы.....	39
2.5 Оптические оси в кристаллах низших сингоний.....	43
2.6 Распространение света вдоль сингулярных эллиптических направлений.....	46
2.7 Преобразование поляризации излучения вдоль оптических осей.....	47
2.8 Соотношения биортогональности для собственных волн в бианизотропных средах.....	49
2.9 Новые формы уравнения нормалей для бианизотропных сред.....	52
2.10 Волны в нецентросимметричных магнетиках.....	54
2.11 Итерационные методы решения уравнений нормалей в линейных анизотропных и гиротропных средах.....	62
<b>3 Распространение света в магнитоупорядоченных кристаллах</b> .....	65
3.1 Тензоры показателей преломления и импедансов в линейных средах. Нормальное падение.....	65
3.2 Тензоры нормальной рефракции и импедансов в линейных средах. Наклонное падение.....	70

3.3	Матрица показателей преломления и оптические свойства кристаллов.....	74
3.4	Интегральная матрица распространения света (матрица Джонса) и ее параметризация.....	79
3.5	Симметрия оптических тензоров и оптических свойств направлений.....	82
3.6	Матрицы Мюллера.....	86
3.7	Ограничения на компоненты матриц Мюллера деполяризующих оптических систем.....	90
<b>4</b>	<b>Влияние подрешеточной магнитной структуры на оптические свойства кристаллов.....</b>	<b>95</b>
4.1	Тензор диэлектрической проницаемости в ферритах-гранатах.....	95
4.2.	О феноменологической тензорной кристаллофизике двухподрешеточных магнетиков. Их симметрия и макроскопические свойства.....	99
4.3.	Кристаллооптические свойства двухподрешеточных магнетиков.....	103
4.4.	Симметрия и правила отбора для тензоров макроскопических физических свойств многоподрешеточных магнетиков.....	107
<b>5</b>	<b>Нелинейные оптические явления в кристаллах с магнитной структурой.....</b>	<b>111</b>
5.1	Частотно-перестановочные соотношения для тензоров нелинейных оптических восприимчивостей.....	111
5.2	Четный эффект Фарадея.....	116
5.3	Магнитогирация.....	122
5.4	Новые фотомагнитные явления.....	128
5.5	Влияние магнитного поля и магнитного упорядочения на генерацию второй оптической гармоники.....	134
5.6	Влияние магнитоэлектрической связи на нелинейные оптические взаимодействия в сегнетомагнитных борацитах.....	136
5.7	Магнитооптические свойства антиферромагнитного Ca-Mn-Ge-граната.....	138
<b>6</b>	<b>Граничные задачи и определение оптических параметров.....</b>	<b>145</b>
6.1	Отражение и преломление света на границе магнитоупорядоченного кристалла. I. Метод главных векторов.....	145
6.2	Отражение и преломление света. II. Операторный метод.....	146
6.3	Матрицы Джонса и Мюллера плоскопараллельной пластинки.....	148
6.4	Преобразование поляризации света линейной пластинкой.....	153
6.5	Применение методов отражательной фотометрической эллипсометрии для определения оптических постоянных	

гироанизотропных кристаллов.....	159
6.6 Прохождение света через систему поляризатор – кристаллическая пластинка - анализатор и определение оптических параметров.....	165
<b>Заключение.....</b>	<b>170</b>
<b>Литература.....</b>	<b>174</b>
<b>Приложение А – Матрицы псевдотензоров четвертого ранга, симметричных по двум индексам.....</b>	<b>192</b>
<b>Приложение Б – Матрицы псевдотензоров четвертого ранга общего вида.....</b>	<b>196</b>

## ВВЕДЕНИЕ

История магнитооптики начинается в 1846 году, когда М. Фарадей [1] обнаружил, что плоскость поляризации линейно поляризованного светового луча, прошедшего через тяжелое стекло из боросиликата свинца, поворачивается на угол, пропорциональный напряженности магнитного поля  $H$  и длине пути света в веществе  $l$ . Это явление позже было названо эффектом Фарадея и является одним из наиболее характерных магнитооптических эффектов.

Позже наблюдалось возникновение линейного двупреломления света в направлении, перпендикулярном магнитному полю  $H$  и получило название эффекта Коттона-Мутона. Этот эффект, квадратичный по  $H$ , затем детально исследовался В. Фойгтом [2]. Влияние намагниченности вещества на интенсивность и состояние поляризации отраженного от него света было обнаружено [3] Дж. Керром и было позже названо эффектом Керра. Расщепление спектральных линий в магнитном поле впервые наблюдал [3] П. Зеeman, а Г. Лорентц дал ему теоретическое объяснение [4]. Результаты теоретических и экспериментальных исследований первого этапа развития магнитооптики изложены в работах Д. А. Гольдгаммера [3], П. Друде [5], Фойгта [2] и других авторов [6-9].

В целом, однако, кристаллооптика магнитоупорядоченных сред развивалась сравнительно медленно. Это было связано с тем, что в немагнитных прозрачных средах магнитооптические эффекты очень малы. Заметных величин они достигали лишь в ферромагнитных металлах и их сплавах, где определялись внутренним магнитным упорядочением, а не внешним магнитным полем. Но ферромагнитные металлы являются сильно поглощающими, прозрачны для света лишь их тонкие пластинки, магнитные пленки.

За последние 60 лет положение существенно изменилось. Было открыто или синтезировано более тысячи различных кристаллических веществ, атомы или ионы которых обладают магнитными моментами, ориентированными не хаотично, а вполне упорядоченно [10-13]. Такие кристаллы обладают упорядоченной магнитной структурой и называются магнитоупорядоченными, хотя могут иметь или не иметь результирующую намагниченность.

Классические ферромагнетики (железо, кобальт, никель) характеризуются параллельной ориентацией магнитных моментов отдельных атомов. Однако соседние моменты частиц в магнитоупорядоченных кристаллах могут быть расположены и антипараллельно (антиферромагнетики). Существуют также кристаллы с более сложной неколлинеарной и некомпланарной магнитной структурой, например, вещества, в которых магнитные моменты образуют спиральные, зонтичные, геликоидальные и другие пространственные структуры [10-13]. Поэтому обычная классификация всех веществ на диа-, пара- и ферромагнетики, как известно, устарела. Магнитную структуру кристаллов изучают, в основном, с помощью дифракции нейтронов на кристаллической решетке, поскольку нейтроны обладают собственным магнитным моментом. При этом выяснилось, что магнитоупорядоченные вещества широко распространены в при-

роде, причем ферромагнетики являются даже редкими представителями среди них [10-13]. Экспериментальное обнаружение новых и разнообразных типов магнитного упорядочения стимулировало дальнейшие экспериментальные и теоретические исследования магнетиков, включая изучение их оптических свойств.

В Советском Союзе первые работы в области кристаллооптических явлений в прозрачных магнетиках были проведены на кафедре магнетизма МГУ, в Физико-техническом институте им. А.Ф.Иоффе АН СССР, в Физико-техническом институте низких температур АН УССР. Сейчас как экспериментальные, так и теоретические исследования магнитооптических явлений проводятся во многих регионах стран ближнего зарубежья: Москва, С.-Петербург, Киев, Харьков, Донецк, Минск, Красноярск и др.

В настоящей работе в рамках феноменологического подхода развивается теория оптических свойств магнитоупорядоченных кристаллов, поэтому и литературные ссылки будут приводиться под этим углом зрения. Отнюдь не претендуя на полноту литературного обзора, все же указаны, тем не менее, основные и наиболее важные, на наш взгляд, литературные источники, непосредственно связанные с тематикой настоящей книги. Автор заранее приносит свои извинения тем исследователям, существенные работы которых, относящиеся к теме данного исследования, по тем или иным причинам не вошли в библиографию.

Кристаллооптика магнетиков развивается на стыке кристаллографии, оптики, магнетизма и других наук. Развитие классической теории кристаллооптических явлений в немагнитных средах было, в основном, завершено к началу нашего века. Назовем, прежде всего, фундаментальный труд Г. Шивесси [14], а также монографии М. Борна и Э. Вольфа [15] и Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [8].

В нецентросимметричных средах наряду с анизотропией возможно также проявление естественной гиротропии или оптической активности, которая приводит к новым закономерностям в них. Современное состояние теоретических и экспериментальных исследований по кристаллооптике немагнитных кристаллов с естественной оптической активностью в обобщенной и систематизированной форме освещено в работах Ф. И. Федорова [16], А. Н. Сердюкова и И. В. Семченко [17], В. А. Кизеля и В. И. Буркова [18], В. М. Аграновича и В. Л. Гинзбурга [19], О. Г. Влоха [20], Б. В. Бокутя, Б. Ш. Гречушникова и А. Ф. Константиновой [21, 22].

Многие физические, в том числе и оптические, свойства кристаллов зависят от наличия электрического или магнитного упорядочения. Поэтому для развития теории оптических свойств магнетиков необходима теория их магнитных свойств, включая и теорию магнитной симметрии. Из работ по феноменологической теории магнитных сред отметим монографии Е. А. Турова [23, 24], С. В. Вонсовского [7], Г. С. Кринчика [9], Ю. А. Изюмова [25].

Характернейшей чертой кристаллов является их симметрия. Симметричные подходы и методы изучения кристаллов, основанные А. В. Шубниковым [26, 27], нашли свое дальнейшее развитие во многих работах, посвященных

симметричным аспектам кристаллофизики и кристаллооптики. Это, главным образом, труды российских ученых: Ландау и Лифшица [8], В. А. Копчика [27], Ю. И. Сиротина и М. П. Шаскольской [28], Б. К. Вайнштейна [29], Л. А. Шувалова [30, 31], И. С. Желудева [31, 32], В. Л. Инденбома [33, 34], А. М. Заморзаева [35, 36] и других [29, 31].

Дополнительно из оригинальных и обзорных исследований по магнитной симметрии отметим также работы [37-47].

Одновременное существование и взаимодействие магнитного упорядочения и кристаллографической структуры в образцах приводит к тому, что явления в кристаллооптике магнетиков, по сравнению с классическими в немагнитных средах, значительно сложнее и разнообразнее.

В магнетиках, кроме обычных оптических явлений двупреломления и дихроизма, возможны также новые эффекты. Например, эффект Фарадея, обусловленный наличием в них результирующей спонтанной намагниченности. эффект Фарадея, т.е. невзаимное циркулярное двупреломление и магнитное линейное двупреломление являются характерными эффектами магнитной гиротропии и анизотропии. Состояние оптики магнитных сред и перспективы ее развития были освещены в исследованиях Кринчика [9], А. К. Звездина [48, 49]. В. В. Еременко и Н. Ф. Харченко [50], Р. В. Писарева и Г. А. Смоленского [51-55], и других [56, 57]. Кристаллооптика магнетиков активно развивается и в настоящее время [58-90, 12, 13].

Одним из интенсивно развивающихся направлений на стыке оптики, кристаллографии и физики магнетизма за последние три десятилетия являются исследования оптических свойств магнитоупорядоченных кристаллов, относительно прозрачных в широком диапазоне волн. Интерес к таким исследованиям объясняется, прежде всего, тем, что магнитооптические методы могут служить мощным инструментом изучения физических свойств кристаллов. Используя явления Фарадея и магнитного линейного двупреломления можно исследовать магнитные возбуждения, различные дефекты и дислокации, неоднородности структуры. Это позволяет применять бесконтактные методы контроля и изучения поверхностных свойств магнитных сред, распределения намагниченности и др. [9, 55, 58, 12]. С помощью методов магнитного и циркулярного дихроизма проводится изучение особенностей энергетического спектра, тонкой структуры полос поглощения [50]. Важными направлениями являются исследование магнитных фазовых переходов, доменной структуры и ее перестройки, установление магнитной структуры и магнитной симметрии [55, 9, 52, 58, 12].

С другой стороны, появление новых магнетиков, прозрачных в ИК- и частично в видимой области спектра открыло широкие возможности для создания новых систем отображения и хранения информации [58, 9, 10, 57, 91, 13, 12]. Созданы опытные образцы запоминающих устройств на магнитооптических дисках. Запись и считывание информации в таких устройствах производится на тонкую магнитную пленку с помощью луча лазера, что позволяет значительно повысить быстродействие и плотность записи информации. Световое пятно фокусируется на участок меньше 1 мкм.

Тонкие пленки прозрачных магнетиков используются для визуализации, регистрации и измерения магнитных полей. Разрабатываются магнитооптические считывающие головки. Пленки ферритов-гранатов используются при разработке лазерных гироскопов с магнитными элементами [58, 12, 49].

Невзаимные магнитооптические устройства или оптические изоляторы пропускают оптический сигнал в одном направлении и блокируют в противоположном [57, 49]. Осуществлялась пространственная фильтрация оптических сигналов. Созданы магнитооптические транспаранты, дисплеи, гираторы, малогабаритные быстродействующие магнитооптические линзы [49]. Перспективны такие направления, как интегральная магнитооптика и магнитная голография [58, 12, 57, 91].

Магнитооптические устройства отображения и обработки информации перед аналогичными электро- и акустооптическими системами могут иметь, как мы видим, и ряд преимуществ. В частности, они являются более радиационно-устойчивыми. Отсюда ясно, что изучение закономерностей распространения света в гироанизотропных средах, обладающих магнитной структурой, является одним из актуальных направлений современной кристаллофизики.

Несмотря на заманчивые перспективы практических приложений, магнитооптика магнитных сред развивалась недостаточно интенсивно. Это связано, главным образом, с низким уровнем технологии выращивания и синтеза магнитных кристаллов. Качественных крупных монокристаллических образцов магнетиков, обладающих малым поглощением, пока еще недостаточно. С другой стороны, экспериментальные исследования сдерживаются недостаточной теоретической проработкой вопросов распространения света в гироанизотропных поглощающих магнитных средах.

Начало работы автора над вопросами теории кристаллооптических явлений в магнитоупорядоченных средах пришлось на первый этап развития современной магнитооптики. Здесь много было нерешенных вопросов. Например: - Как влияет магнитная структура на оптические свойства среды? - Какими пользоваться материальными уравнениями связи? - Какие ограничения накладывают на тензоры оптических свойств фундаментальные принципы П. Кюри, Ф. Неймана, Л. Онзагера, закон сохранения энергии?

Нелинейные оптические явления в магнитных кристаллах имеют свою специфику и изучены слабо. В магнетиках были обнаружены некоторые новые оптические эффекты, казалось бы, запрещенные принципом Онзагера. В связи с этим требовалось выяснить, какие в принципе новые магнитооптические явления и при каких условиях возможны в магнетиках.

Здесь нужно отметить еще одно важное обстоятельство: большинство физических свойств анизотропных сред либо непосредственно характеризуются тензорами различных рангов, либо являются тензорными функциями. При использовании координатного метода тензорные уравнения расписываются по компонентам. Тем самым тензорное уравнение, описывающее одно физическое свойство, искусственно расчленяется на несколько уравнений. Основной же недостаток координатного метода заключается в том, что получаемые соотношения не имеют инвариантного характера и при переходе к другой системе коор-

динат приходится делать пересчет, Кроме того, координатный метод в случаях низко симметричных кристаллов часто приводит к громоздкости получаемых уравнений и соотношений. Все отмеченные трудности отсутствуют при использовании инвариантных, т.е. бескоординатных или прямых тензорных методов, разработанных Федоровым и развиваемых его школой [16, 17, 92-98,]. Достоинством прямых тензорных методов является также то, что они делают возможным дополнительное использование специфических математических матричных приемов, позволяющих сокращать и ускорять вычисления. Неуклонное использование бескоординатных методов позволило Федорову рассмотреть и последовательно развить теорию оптических свойств анизотропных сред [92], теорию упругих волн в кристаллах [93], теорию гиротропии [16], теорию группы Лоренца [94].

**Целью настоящей работы является изложение последовательной общей феноменологической теории кристаллооптических явлений в кристаллах с упорядоченной магнитной структурой с учетом анизотропии, гиротропии и поглощения.**

Краткое содержание книги следующее.

В первой главе проведен критический анализ использования в кристаллофизике магнетиков принципа симметрии кинетических коэффициентов. Предложена его уточненная формулировка применительно к линейным уравнениям связи. Обсуждаются взаимосвязи между различными формами материальных уравнений. Для диспергирующих линейных кристаллических сред сформулированы законы сохранения энергии-импульса.

Во второй главе исследуются поляризация и распространение собственных плоских монохроматических волн в магнитоупорядоченных кристаллах различной симметрии. Предложены эффективные итерационные методики для решения уравнений нормалей в различных линейных кристаллах. Предсказаны новые типы сингулярных оптических направлений. Произведена классификация кристаллов высших, средних и низших сингоний по числу и характеру сингулярных осей.

В третьей главе с помощью операторного формализма тензоров показателей преломления  $N$  и импедансов  $\gamma$  дано описание распространения света в линейных средах общего вида. Предложены обобщенные классификации основных оптических явлений в кристаллах. Исправлены ошибки Джонса и некоторых других авторов. Произведена параметризация матриц Джонса и Мюллера, установлена их структура и взаимосвязь для различных сред. Найдены группы симметрии оптических свойств направлений.

В четвертой главе обсуждается влияние двух- и многоподрешеточной магнитной структуры на макроскопические свойства магнетиков. Вводятся две новые симметричные операции обмена подрешетками  $I^{(-)}$  и  $I^{(*)}$  и на этой основе устанавливается симметрия как самих кристаллов, так и симметрия и правила отбора для тензоров в них.

Пятая глава посвящена изучению нелинейных оптических и фотомагнитных явлений. Предложены частотно-перестановочные соотношения, описы-

вающие симметрию тензоров нелинейных оптических восприимчивостей в диспергирующих поглощающих магнетиках. На основе подхода магнитной симметрии обсуждаются возможности наблюдения и изучения магнитооптических явлений магнитогирации и четного эффекта Фарадея, не имеющих аналогов в оптике немагнитных сред. Предсказаны также два новых фотомагнитных явления намагничивания антиферромагнитных либо нецентросимметричных кристаллов линейно поляризованным светом и даны их численные оценки. Анализируются магнитооптические свойства антиферромагнитного *Ca-Mn-Ge* граната. Обсуждается влияние магнитного поля и магнитного и электрического упорядочения на генерацию второй гармоники. Исследуется влияние магнитоэлектрической связи на нелинейные оптические взаимодействия в сегнетомагнитных борацитах.

В шестой главе решен ряд граничных задач. На этой основе предложены методы измерения оптических параметров различных сред.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы работы.

После библиографического списка в приложениях А и Б для справочных целей приводятся формы матриц псевдотензоров четвертого ранга для различных групп симметрии.

Содержание книги является результатом 30-летней работы и отражает личный вклад автора в теорию кристаллооптических явлений в магнитоупорядоченных средах.

Основные результаты работы докладывались на Международных и Республиканских конференциях и семинарах, вошли в содержание научных отчетов по г/б и х/д темам. Многие результаты вошли в содержание спецкурсов и курсов, читавшихся на физическом факультете УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», а также использовались студентами при выполнении ими курсовых и дипломных работ. Всем соавторам работ, а также участникам научных конференций и семинаров, чьи внимание, плодотворные обсуждения и доброжелательная критика во многом способствовали творческим достижениям, автор выражает глубокую благодарность.

# 1 ПРИНЦИП СИММЕТРИИ КИНЕТИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В КРИСТАЛЛОФИЗИКЕ СРЕД С МАГНИТНОЙ СТРУКТУРОЙ

## 1.1 О применении принципа симметрии кинетических коэффициентов к макроскопическим явлениям в магнитных кристаллах

Принципы симметрии имеют фундаментальное значение в макроскопической кристаллофизике сплошных сред. Один из них, принцип симметрии кинетических коэффициентов или соотношения взаимности

$$L_{ij} = L_{ji} \quad (1.1.1)$$

был сформулирован Онзагером в 1931 году [99, 100] для необратимых процессов как следствие инвариантности микроскопических уравнений движения частиц системы относительно операции инверсии времени ( $t \rightarrow -t$ ), обозначаемой далее  $I'$ .

В случае действия внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}$  соотношения взаимности можно записать, согласно Г. Б. Казимиру, в более общем виде [101, 8] (принцип Онзагера-Казимира)

$$L_{ij}(\mathbf{H}) = L_{ji}(-\mathbf{H}), \quad (1.1.2)$$

где  $L_{ij}$  – матрица кинетических коэффициентов, линейно связывающая силы  $X_j$  и потоки  $J_i$ :  $J_i = L_{ij}X_j$ . Плюс (минус) соответствует случаям, когда потоки и силы обладают одинаковой (противоположной) четностью по отношению к инверсии времени  $I'$ .

Одно время возникла широкая дискуссия о понимании и применении фундаментальных симметричных положений макрофизики принципов Онзагера и Неймана, нашедшая отражение в литературе [102-112]. Поэтому мы проведем краткий критический анализ итогов этой дискуссии. Затем будет дана уточненная формулировка принципа Онзагера с учетом магнитной структуры и внешних воздействий.

В 1956 году Б. А. Тавгер и В. М. Зайцев вывели точечные группы магнитной симметрии [113], используя дополнительную симметричную операцию обращения магнитного момента  $\underline{I}$ . Оказалось, однако, что полученные группы магнитной симметрии изоморфны шубниковским группам антисимметрии [26]. Это и не удивительно, поскольку операцию антиотождествления  $\tilde{I}$  А. В. Шубникова [26] можно трактовать как операцию изменения всех магнитных моментов системы на противоположные.

Так как операция инверсии времени  $I'$  также изменяет знаки всех магнитных моментов на противоположные, то в последующих работах по магнитной симметрии ряд авторов стали отождествлять операции  $\underline{I}$  и  $I'$ .

1. Сиротиным (см. [28]) и независимо и одновременно Р. Р. Бирссом [37] в 1962 году были заложены феноменологические основы магнитной кристаллофизики. При этом, однако, сразу же возникли трудности и противоречия, связанные с пониманием и применением принципов Онзагера и Неймана, Принцип Неймана (1885 г.) [28], согласно которому группа симметрии любого макроскопического свойства кристалла должна включать его точечную группу симметрии ( $G_{св} \supseteq G_{кр}$ ), является фундаментальным постулатом кристаллофизики и накладывает, в частности, ограничения на компоненты тензоров физических свойств кристаллов.

2. Бирсс [37] при описании кинетических статических явлений (процессы переноса тепла, тока и др.) пришел к непреодолимой трудности с применением принципа Неймана к немагнитным средам. Пусть в проводящем кристалле под действием приложенного электрического поля  $E$  течет ток  $j = \sigma E$ . Под действием операции  $I'$  ток  $j$ , и, следовательно, и тензор проводимости  $\sigma$  меняют знак, т.е.  $I'\sigma = -\sigma$ . С другой стороны, если кристалл немагнитен, то  $I'$  является операцией симметрии и, согласно принципу Неймана,  $I'\sigma = \sigma$ . Отсюда  $j = \sigma = 0$ , что явно противоречит опыту. Этот парадокс с проводимостью Бирссу не удалось разрешить, поэтому он утверждал [37], что принцип Неймана неприменим к магнитным средам. Бирсс предложил [37] рецепт  $A$ , согласно которому для определения вида тензоров следует игнорировать комбинированные (содержащие  $I'$ ) операции, а соотношения взаимности применять в обычной форме (1.1.1). Заметим, однако, что рецепт Бирсса  $A$  лишь частично использует информацию о симметрии кристалла и противоречит, например, существованию аномального эффекта Е. Холла.

3. Следующий большой шаг в развитии макроскопической магнитной кристаллофизики сделал В. Г.Клейнер [114, 115]. Для матрицы кинетических коэффициентов, характеризующих термогальваномагнитные явления в магнитных кристаллах, Клейнер получил законы преобразования (свойства симметрии) кристалла во внешнем магнитном поле  $H$  (рецепт  $B$ ). Дальнейшие многочисленные дискуссии и экспериментальные исследования показали, что рецепт  $B$  [114, 115] Клейнера верен. Однако трактовка Клейнера собственных формально правильных результатов является неудовлетворительной. Во-первых, как будет нами выяснено далее, ошибочным является вывод Клейнера о том, что соотношения взаимности Онзагера в общем случае неприменимы к магнетикам. Во-вторых, автор [114] не случайно обходит молчанием принцип Неймана из-за отмеченного выше парадокса с проводимостью  $\sigma$ . Фактически Клейнер в своем рецепте  $B$  для прозрачных сред неявно использует принцип Онзагера одновременно с принципом Неймана.

4. П. В. Пантулу и др. [102, 103] исследуют ограничения пространственно-временной симметрии на матрицу кинетических коэффициентов явлений переноса, используя фактически рецепт  $B$  Клейнера, но в более простой форме. Они справедливо полагают, что принцип Неймана имеет аксиоматическую природу и не должен нарушаться в парадоксе с проводимостью. Вместе с тем их позиция является внутренне противоречивой. Сначала авторы [102, 103] в теорети-

ческом плане обосновывают первую часть рецепта  $A$  Бирсса, однако при конкретных расчетах используют подход, эквивалентный рецепту  $B$  Клейнера.

5. В своей работе [104] А. П. Крэкнелл подверг критике рецепты  $A$  и  $B$ . Анализируя парадокс с проводимостью, Крэкнелл при нахождении законов преобразования тензора  $\sigma$  шубниковскими операциями симметрии приходит к собственному рецепту  $C$ . С критическими высказываниями автора [104], в целом, можно согласиться, Тем не менее, предложенный им рецепт  $C$  является ошибочным, ибо приводит к исчезновению эффекта Холла для некоторых направлений, что противоречит эксперименту.

6. Для  $(6 \times 6)$ -матрицы кинетических коэффициентов, описывающей неравновесные поляризационные процессы в антиферромагнетиках, Г. Радо [105] предложил следующие соотношения взаимности:

$$L_{ij}(\omega) = \varepsilon_i \varepsilon_j L'_{ji}(\omega). \quad (1.1.3)$$

Достоинство подхода Радо заключается в том, что он, рассматривая процессы поляризации вещества в переменном электромагнитном поле, отделил ограничения, вытекающие из временной симметрии на матрицу  $L_{ij}$  (принцип Онзагера), от ограничений, накладываемых пространственными преобразованиями симметрии (принцип Неймана).

Однако соотношения взаимности Радо (1.1.3) справедливы только для прозрачных магнитных сред, поскольку автор [105] считает, что  $I'$  эквивалентна операции  $\underline{I}$ . Кроме того, в уравнениях связи он не учитывает возможностей существования естественной и магнитной гиротропии.

7. В своей монографии [28] Сиротин и Шаскольская, придерживаясь идеологии Клейнера [114, 115], Пантулу и др. [102, 103], изложили в более систематизированной и несколько упрощенной форме трактовку и методику нахождения формы матрицы  $L_{ij}$  для явлений переноса в магнитных кристаллах.

Хотя эта методика аналогична рецепту  $B$  Клейнера и поэтому является верной, тем не менее, все возражения, высказанные выше относительно неправильной ее интерпретации, остаются в силе. Так, авторы [28] полагают, что принцип Онзагера в магнетиках выполняется не всегда и обходят молчанием парадокс с проводимостью, хотя последний у них фигурирует неявно.

8. А. Поургази и др. [106, 107] подвергли критике рецепты  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Причину возникновения парадокса с проводимостью  $\sigma$  они справедливо видят в неправомерном отождествлении операций  $\underline{I}$  и  $I'$ . Вместо фактической магнитной группы  $G_m$  авторы [106, 107] рекомендуют выбирать некоторую условную немагнитную группу  $G_{nm}$  кристалла, находящегося во внешнем магнитном поле  $H$  так, чтобы общая симметрия не изменилась. Однако пользоваться новым рецептом  $D$  [106, 107] невозможно, ибо неизвестно, как быть, например, в случае антиферромагнетиков. Показательно, что авторы [106, 107] не приводят ни одного примера, иллюстрирующего предлагаемый ими рецепт  $D$  в действии.

9. В [108] Д. Л. Португал вводит некий внутренний скалярный параметр магнитного упорядочения  $s$ , меняющий знак при обращении всей спиновой структуры магнетика. Затем, разлагая тензор  $\varepsilon$  по  $\omega$ ,  $k$ ,  $E_0$ ,  $H_0$ ,  $s$ , автор [108] об-

суждает возможные магнитооптические явления. Однако рецепт Португала [108] является внутренне противоречивым и им невозможно пользоваться. Действительно, в [108] операции  $\underline{I}$  и  $I'$  то считаются различными, то отождествляются. Аналогично, в [108] векторы  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{H}_0$  то считаются  $i$ -векторами, то  $s$ -векторами.

10. Бирсс и др. в [109] продолжили дискуссию о соотношениях взаимности и фактически признали ошибочность своего прежнего рецепта  $A$  [47]. Критикуя далее рецепты  $B$ ,  $C$  и  $D$ , авторы [109] предлагают новый рецепт  $P5$ . Хотя авторы [109] и критикуют рецепт  $D$ , их новый рецепт  $P5$  представляет, по нашему мнению, определенное развитие именно рецепта  $D$ . Однако подход  $P5$ , как и  $D$ , применим только к простейшим магнитным структурам – ферромагнетикам.

11. Еще в 1963 году [38] Е. А. Туров и В. Г. Шавров предложили аналогичный, но более общий чем  $D$  и  $P5$ , рецепт расчета ограничений пространственно-временной симметрии на тензорные кинетические коэффициенты явлений переноса для двухподрешеточных магнетиков. Например, принцип Онзагера для тензора проводимости  $\sigma$  приводит по [38] к соотношениям

$$\sigma_{ik}(\mathbf{H}, \mathbf{M}, \mathbf{L}) = \sigma_{ki}(-\mathbf{H}, -\mathbf{M}, -\mathbf{L}), \quad (1.1.4)$$

где  $\mathbf{H}$  – внешнее магнитное поле,  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{L}$  – ферро- и антиферромагнитные векторы магнитной структуры.

Рецепт работы [38] является верным. Вместе с тем он сформулирован только для одно- и двухподрешеточных магнетиков, т.е. имеет ограниченную область применимости. Кроме того, в [38] при феноменологическом описании макроскопических свойств кристалла рекомендуется использовать пространственную-, а не точечную (как обычно) группу симметрии, что менее удобно и не всегда целесообразно.

12. Через два года после предложения рецепта  $P5$  Бирсс совместно с Г. Д. Бутсэлом снова вернулся [110] к соотношениям взаимности в магнитной кристаллофизике и предложил их новую (третью по счету!) формулировку. Хотя ранее в [109] и даже в [110] Бирсс и критикует рецепт  $B$  Клейнера [114], тем не менее, фактически авторы [110] снова пришли к математическим формулировкам Клейнера, хотя и по-другому интерпретируемым.

13. Потом появились статьи С. Малиновского [111, 112], посвященные применению принципа Онзагера к явлениям переноса в магнетиках. Автор подвергает критике рецепт  $B$  Клейнера [114, 115] и рецепт  $C$  Крэнелла [104]. Выше мы уже показали, что рецепт  $C$  неверен и поэтому не будем на нем останавливаться. Что же касается рецепта  $B$ , то Малиновский просто искажил его и приписывает Клейнеру ошибочный алгоритм. В действительности же, как можно проверить, рецепт  $B$  Клейнера формально верен, а предлагаемый автором [111] рецепт эквивалентен частным случаям рецепта  $B$ , хотя и представлен в иной форме.

Таким образом, проведенный нами здесь краткий критический анализ литературы показал, что было предложено более десятка различных рецептов понимания и использования принципов Онзагера и Неймана к макроскопическим

явлениям в магнитных кристаллах. Несмотря на такое разнообразие, ни один из них нельзя признать полностью удовлетворительным во всех отношениях (более подробный анализ использования принципа Онзагера в магнитной кристаллооптике см. в [116]).

## 1.2 Принцип Онзагера-Казимира для магнитоупорядоченных кристаллов и линейные материальные уравнения электродинамики

Как показано в предыдущем критическом обзоре, одно время в литературе сложилась парадоксальная ситуация с принципом симметрии кинетических коэффициентов, высказывались самые разнообразные точки зрения по этому вопросу. Поэтому на примере линейных уравнений электродинамики мы кратко обсудим и представим уточненную формулировку принципа Онзагера-Казимира.

При описании оптических свойств прозрачных магнитных сред авторы [117] исходили из линейных материальных уравнений

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + i(\gamma k) \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H}, \quad (1.2.1)$$

связывающих комплексные Фурье-компоненты векторов для плоских монохроматических световых волн. Они показали, что поскольку физическое электрическое поле инвариантно относительно операции времени  $I'$ , то [117]

$$I' \mathbf{E} = \mathbf{E}^*, \quad I' \mathbf{D} = \mathbf{D}^* \quad (1.2.2)$$

и, следовательно, отсюда

$$I' \varepsilon = \varepsilon^+, \quad I' \gamma = \gamma^*. \quad (1.2.3)$$

Для прозрачных сред из закона сохранения энергии вытекает также, что [117, 118]

$$\varepsilon = \varepsilon^+, \quad \gamma = -\gamma^+. \quad (1.2.4)$$

С. Багавантам, используя материальные уравнения (1.2.1), распространил подход Клейнера [114, 115] на описание оптических свойств магнетиков и показал, что тензоры  $\varepsilon$  и  $\gamma$  в (1.2.1) преобразуются следующим образом [119]:

$$\varepsilon_{ik} = R_{im} R_{kn} \varepsilon_{nm}, \quad \gamma_{ikl} = \mp R_{im} R_{kn} R_{lp} \gamma_{nmp} \quad (1.2.5)$$

причем  $(\pm)$  соответствует операциям  $\bar{R}'$  или  $R'$ . Здесь  $R$  – матрица чистого вращения,  $\bar{I}$  и  $I'$  – операции пространственной и временной инверсии соответственно [119]. Соотношения (1.2.5) Багавантам трактует как обобщенные соотношения взаимности Онзагера.

Ограничения принципа Онзагера на тензор  $\varepsilon$  в магнетиках в рамках подходов Клейнера [114, 115] и Багавантама [119] изложены также в монографиях [28, 50].

По поводу результатов работы [119] можно высказать следующие замечания. Во-первых, формулы (1.2.5) справедливы только для прозрачных магнитных сред. Не случайно автор [119] полностью обходит молчанием вопрос о возможности диссипации энергии. Кроме того, как и у Клейнера [114, 115], со-

отношения (1.2.5) практически представляют собой одновременное применение принципов Онзагера и Неймана, По-видимому, этими недостатками статьи [119] можно объяснить тот факт, что никто из участников рассмотренной выше дискуссии о применении принципа симметрии кинетических коэффициентов к магнетикам на работу [119] не ссылается. Рассмотрим поэтому этот вопрос подробнее.

В недиссипативных средах, как следует из (1.2.4),

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^s + i\varepsilon_{ij}^a, \quad \gamma_{ijk} = \gamma_{ijk}^a + i\gamma_{ijk}^s, \quad (1.2.6)$$

где надстрочный индекс  $(a)s$  означает (анти)симметрию тензоров по перестановке индексов  $i$  и  $j$ . В поглощающей же среде симметричные и антисимметричные части тензоров  $\varepsilon$  и  $\gamma$  становятся, вообще говоря, комплексными.

С другой стороны, в обзоре [54] кристаллооптики сред с магнитной структурой авторы считают, что комплексные неэрмитовы тензоры  $\varepsilon$  и  $\gamma$  обладают следующей временной симметрией:

$$I'\varepsilon = \tilde{\varepsilon}, \quad I'\gamma = -\tilde{\gamma}. \quad (1.2.7)$$

Эта точка зрения поддерживается также в монографии [18].

По Бирссу [37], тензоры статических физических свойств по отношению их к операции  $I'$  можно разделить на  $i$ - и  $c$ -тензоры.  $c$ -величины меняют свой знак при инверсии времени, а  $i$ -тензоры – инвариантны. Распространяя эту терминологию на тензоры высокочастотных свойств, авторы [54] называют  $\varepsilon^s$  и  $\gamma^a$  –  $i$ -тензорами, а  $\varepsilon^a$  и  $\gamma^s$  –  $c$ -тензорами.

Однако соотношения (1.2.7) и (1.2.3) эквивалентны, как мы видим, только для прозрачных сред, а при наличии диссипации энергии несовместимы. Конкретнее, для эрмитовой  $\varepsilon^h$  и антиэрмитовой  $\gamma^{ah}$  частей матриц  $\varepsilon$  и  $\gamma$  равенства (1.2.3) и (1.2.7) эквивалентны, для  $\varepsilon^{ah}$  и  $\gamma^h$  дают противоположные выводы. В чем же дело?

Обе симметричные операции –  $I'$  и  $\underline{I}$  – одинаково обращают знаки магнитных моментов кристалла на противоположные. В связи с этим обстоятельством авторы большинства работ по магнитной симметрии стали постепенно отождествлять различные операции  $I'$  и  $\underline{I}$ . Такое неправомерное отождествление и явилось, по нашему мнению, первопричиной основных трудностей в трактовке и применении симметричных принципов физики магнитных кристаллов: принципа Онзагера и принципа Неймана. Хотя операция  $I'$  и изменяет знаки всех магнитных моментов и магнитных полей на противоположные, действия ее все же значительно шире, чем у  $\underline{I}$ . Операция  $I'$  фактически изменяет также направления протекания (или знаки) всех динамических явлений, зависящих от времени нечетным образом. Обращение времени затрагивает гораздо больше свойств, чем более ограниченная операция  $\underline{I}$ . Отсюда следует, что использование операции  $I'$  вместо  $\underline{I}$  не всегда корректно.

Противоречие между (1.2.3) и (1.2.7) можно объяснить и устранить, если предположить, что в (1.2.7) фактически должна идти речь об операции обращения магнитной структуры  $\underline{I}$ , а не об операции инверсии времени  $I'$ .

Вместо (1.2.7) правильными будем считать соотношения симметрии  $\underline{I}\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$ ,  $\underline{I}\gamma = -\gamma$ , т.е. [120]

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon}, \quad \gamma = -\tilde{\gamma}. \quad (1.2.8)$$

Здесь и далее подчеркивание означает обращение во времени внутренней и/или внешней магнитной структуры кристалла.

Так как операция  $\underline{I}$ , согласно (1.2.8), одинаково действует на действительные и мнимые части тензоров, то легко разрешается также обсуждаемый ранее парадокс с проводимостью. Действительно, согласно (1.2.3), (1.2.8), имеем

$$\underline{I}'\gamma = -\gamma^+, \quad \underline{I}'\varepsilon = \varepsilon^+, \quad (1.2.9)$$

где новая комбинированная операция симметрии  $\underline{I}' = \underline{I}I' = I'\underline{I}$ . С другой стороны, в прозрачных кристаллах, в соответствии с (1.2.5),

$$\underline{I}'\varepsilon = \varepsilon, \quad \underline{I}'\gamma = \gamma, \quad (1.2.10)$$

т.е. в прозрачных магнетиках операция  $\underline{I}'$  является операцией симметрии и принцип Неймана выполняется. Аналогично, в поглощающих немагнитных кристаллах операцией симметрии является  $\underline{I}$  (но не  $I'$ !), поэтому тогда  $\varepsilon = \tilde{\varepsilon} = \varepsilon^s$ ,  $\gamma = -\tilde{\gamma} = \gamma^a$ . Прозрачные немагнитные среды обладают следующими операциями симметрии;  $I'$ ,  $\underline{I}$ ,  $\underline{I}'$  и поэтому тогда  $\varepsilon = \varepsilon^s = \varepsilon^*$ ,  $\gamma = \gamma^a = -\gamma^*$  в полном соответствии с принципом Неймана.

Таким образом, операции инверсии времени  $I'$  и обращения магнитной структуры  $\underline{I}$  являются различными операциями, действия которых определяются выражениями (1.2.3), (1.2.2), (1.2.8). отождествление  $I'$  и  $\underline{I}$  законно только для недиссипативных сред. Поэтому более точно симметрию магнитных кристаллов можно характеризовать не шубниковскими, а группами кратной [42] антисимметрии, различая операции  $I'$  и  $\underline{I}$ . Заметим, однако, что вводить группы кратной антисимметрии необязательно. Достаточно пользоваться в шубниковских группах одной операцией  $\underline{I}$  (вместо  $I'$ ), дополнительно применяя закон сохранения энергии для бездиссипативных систем.

В отличие от действительных статических величин комплексные тензоры материальных констант и физических полей зависят от частоты и поэтому не имеют определенной четности относительно операций  $I'$  и  $\underline{I}$ . Поэтому понятия  $i$ - и  $c$ -тензоров, введенные Бирссом [37] для статических свойств, для высокочастотных оптических явлений нужно обобщить. Будем считать, что  $c$ -тензоры (в отличие от  $i$ -тензоров) меняют свой знак при  $\underline{I}$  (а не при  $I'$ !). В соответствии с этой уточненной терминологией  $\varepsilon^s$  и  $\gamma^a$  —  $i$ -тензоры, а  $\varepsilon^a$  и  $\gamma^s$  —  $c$ -тензоры, как при наличии, так и при отсутствии диссипации энергии. Действительно, известно [119], что  $\varepsilon^a$  и  $\gamma^s$  могут быть отличными от нуля только в магнитоупорядоченных кристаллах или в немагнитных средах во внешнем магнитном поле.

Соотношения (1.2.8) будем трактовать также как применение принципа Онзагера к уравнениям (1.2.1). Это соответствует подстрочным замечаниям, включенным во второе издание монографии Ландау и Лифшица ([8], с. 493) о том, что правая часть (1.2.8) "должна быть взята при измененном знаке поля или для обращенной во времени структуры...", "если тело находится во внеш-

нем магнитном поле или обладает магнитной структурой" (см. также [120, 96, 50, 12, 24]).

Возвратимся к работе Багавантама [119]. Теперь становится ясным, что в выражениях (1.2.5) нужно использовать операции симметрии инверсии магнитной структуры  $\underline{I}$ , а не инверсии  $I'$ .

Сейчас вместо (1.1.2) можно записать уточненную формулировку принципа Онзагера-Казимира для матрицы  $L_{ij}$  кинетических коэффициентов в виде [120]

$$L = \pm \underline{\tilde{L}}. \quad (1.2.11)$$

Отличие выражения (1.2.11) от соответствующих ему выражений в [8] (§96) в том, что справа матрица  $L_{ij}$  берется для обращенной во времени не самой *системы*, а только ее *магнитной структуры* (внутренней и/или внешней).

Кристаллооптические свойства различных линейных сред часто описываются более общими, чем (1.2.1) линейными уравнениями связи вида [16, 121]

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \alpha \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \beta \mathbf{E} + \mu \mathbf{H}, \quad (1.2.12)$$

для Фурье-компонент плоских гармонических волн вида

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \quad (1.2.13)$$

где векторы полей и материальные тензоры зависят от  $\omega$  и  $k$ , например,  $\varepsilon = \varepsilon(\omega, k)$ ,  $E = E(\omega, k)$ .

Найдем ограничения, накладываемые на тензоры  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu$  принципом Онзагера-Казимира. Будем следовать подходу [8], который был применен для уравнений вида (1.2.1), а затем распространен в [122, 123] на оптически активные среды без магнитной структуры. Мы же будем учитывать также возможность магнитного упорядочения кристаллов. Запишем (1.2.12) в матричной блочной форме [122, 123]

$$X_A = K_{AB} F_B, \quad (1.2.14)$$

где  $A, B = 1, 2, \dots, 6$ , а блочная (6×6)-матрица

$$K_{AB} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \alpha \\ \beta & \mu \end{bmatrix} \quad (1.2.15)$$

связывает 6-мерные векторы-столбцы

$$X = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}. \quad (1.2.16)$$

Скорость изменения плотности энергии электромагнитных волн равна [8]

$$4\pi\dot{w} = (\mathbf{E}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H}\dot{\mathbf{B}}) = F_A \dot{X}_A, \quad (1.2.17)$$

поэтому в соответствии с формализмом [8] (см. также [96, 122, 123]) матрица  $K_{AB}$  в (1.2.4) является матрицей кинетических коэффициентов и должна удовлетворять принципу Онзагера-Казимира (1.2.11), т.е. [120]

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon}, \quad \mu = \tilde{\mu}, \quad \alpha = -\tilde{\beta}. \quad (1.2.18)$$

Например, в более подробной записи,

$$\alpha_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{h}, \mathbf{e}, \mathbf{m}, l_1, l_2, \dots) = -\beta_{ij}(\omega, -\mathbf{k}, -\mathbf{h}, \mathbf{e}, -\mathbf{m}, -l_1, -l_2, \dots) \quad (1.2.19)$$

и аналогично для тензоров  $\varepsilon$  и  $\mu$ . Здесь  $\omega$  – циклическая частота,  $\mathbf{k}$  – волновой вектор волн,  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{h}$  – векторы внешних электрического и магнитного полей соответственно,  $\mathbf{m}$  – вектор ферро-, а  $l_1, l_2, \dots$  – различные векторы антиферромагнетизма.

Соотношения (1.2.18), (1.2.19) представляют собой уточненные формулировки ограничений, налагаемых принципом Онзагера-Казимира на материальные тензоры линейных уравнений связи (1.2.12) для анизотропных поглощающих сред с упорядоченной многоподрешеточной магнитной структурой при учете частотной и пространственной дисперсии. Для тензора  $\varepsilon$  они были приведены в [39], для оптически активных немагнитных сред ограничения на  $\varepsilon, \mu, \alpha, \beta$  получены в [122, 123].

Общее феноменологическое рассмотрение оптических и акустических свойств кристаллов на основе использования принципа Онзагера-Казимира проведено в [96] Сердюковым, где для тензоров  $\varepsilon, \mu, \alpha, \beta$  получены ограничения типа (1.2.19). С целью учета возможной ферро- или антиферромагнитной структуры в [96] вводится один вектор упорядочения. Здесь введены несколько векторов магнитного упорядочения  $(\mathbf{m}, l_1, l_2, \dots)$  и тем самым результаты [96] относительно свойств временной симметрии оптических тензоров обобщены на **многоподрешеточные** магнетики.

Линейные уравнения (1.2.12) можно разрешить также относительно других пар векторов поля. Часто, как выяснится позже, целесообразно выразить векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  через  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{H}$ :

$$\Psi = L_l \Phi. \quad (1.2.20)$$

Здесь

$$\Psi = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}, \quad L_l = \begin{bmatrix} \varepsilon_l^{-1} & \alpha_l \\ \beta_l & \mu_l \end{bmatrix}, \quad (1.2.21)$$

где вводятся переобозначения

$$\varepsilon_l = \varepsilon, \quad \mu_l = \mu - \beta \varepsilon^{-1} \alpha, \quad \beta_l = \beta \varepsilon^{-1}, \quad \alpha_l = -\varepsilon^{-1} \alpha. \quad (1.2.22)$$

Отсюда следует связь между новыми  $(\varepsilon_l, \mu_l, \alpha_l, \beta_l)$  и первоначальными  $(\varepsilon, \mu, \alpha, \beta)$  тензорами:  $\varepsilon = \varepsilon_l, \quad \mu = \mu_l - \beta_l \varepsilon_l \alpha_l, \quad \beta = \beta_l \varepsilon, \quad \alpha = -\varepsilon_l \alpha_l.$

Теперь принцип симметрии кинетических коэффициентов, согласно (1.2.18), принимает форму

$$L = \underline{\tilde{L}}_l, \quad \text{т.е. } \varepsilon_l = \underline{\tilde{\varepsilon}}_l, \quad \mu_l = \underline{\tilde{\mu}}_l, \quad \alpha_l = \underline{\tilde{\beta}}_l. \quad (1.2.23)$$

В литературе используются самые разнообразные линейные материальные уравнения связи [16-18, 117-119, 124-135, 97, 98]. Так, в некоторых случаях удобнее вместо уравнений (1.2.20) пользоваться им обратными [136-138, 126]

$$\underline{C} = L_l^{-1} \underline{D} \quad (1.2.24)$$

и, аналогично, вместо (1.2.14) применять обратные линейные соотношения [126, 139-142]

$$\underline{F} = K^{-1} \underline{X}. \quad (1.2.25)$$

Все 4 типа линейных уравнений связи (1.2.20), (1.2.24), (1.2.14), (1.2.25) эквивалентны. Преимущества уравнений (1.2.14), чаще всего применяющихся среди названных, в частности, в том, что, как далее увидим, законы сохранения для них можно записать в компактной блочной форме. С другой стороны, именно пары векторов  $(\mathbf{B}, \mathbf{E})$  и  $(\mathbf{D}, \mathbf{H})$  образуют 4-тензоры электромагнитного поля, поэтому выбор уравнений в виде (1.2.20) имеет релятивистское обоснование. Хотя из физических соображений предпочтительнее (1.2.24), при расчетах часто целесообразнее пользоваться соотношениями (1.2.20), так как оптические свойства удобнее характеризовать тензором  $\varepsilon^{-1}$ , а не прямым  $\varepsilon$ . Наряду с этими уравнениями связи также пользуются и другими, например, уравнениями типа (1.2.1).

Система макроскопических уравнений Дж. Максвелла является незамкнутой и поэтому дополняется материальными уравнениями связи. Существует значительный произвол в выборе различных уравнений связи. Для описания кристаллов с естественной оптической активностью используются разные подходы [16-21, 118, 130]. Так, оптическая активность часто рассматривается как один из эффектов пространственной дисперсии [130, 131, 8, 19, 20, 117-119]. При этом используются уравнения вида (1.2.1), в которых естественная оптическая активность характеризуется антисимметричной частью коэффициента  $\gamma_{inn}$  разложения  $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$  по вектору  $\mathbf{k}$ .

В другой концепции оптической активности [126, 132, 133], которая развивается и часто применяется в последнее время, пользуются локальными материальными уравнениями типа (1.2.12), где, как будет показано далее, немагнитные части тензоров  $\alpha$  и  $\beta$  характеризуют естественную гиротропию. Фундаментальный вклад в теорию гиротропии внес Федоров [16]. Отметим также работы Федорова, Бокутя и Сердюкова [95, 122, 123, 17], Гречушниковой и Константиновой [21]. Этот подход применялся и другими исследователями [118, 117, 121, 140, 135, 138, 124, 97, 17]. Предлагались и иные варианты описания естественной активности [16-19].

Детальное исследование вопроса о взаимосвязи между различными формами материальных уравнений, их связью с граничными условиями и законом сохранения энергии для оптически активных кристаллов было проведено Федоровым, Бокутем и Сердюковым [16, 95]. Общий вывод заключается в том, что

различные уравнения, описывающие оптическую гиротропию, эквивалентны до членов первого порядка по активности, т.е. отличия проявляются лишь во втором порядке по гиротропии.

Оптические свойства магнитных кристаллов часто характеризуют уравнениями [9, 57, 127]

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (1.2.26)$$

или даже [8, 19, 20, 53, 54] уравнениями

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H}, \quad (1.2.27)$$

причем магнитная гиротропия определяется антисимметричными частями тензоров  $\varepsilon$  (либо  $\varepsilon$  и  $\mu$ ).

Вопрос о правомерности и необходимости введения отличной от нуля магнитной проницаемости  $\mu$  на оптических частотах является дискуссионным [118, 16, 11, 57, 127, 128, 143]. Не касаясь подробно этого вопроса, отметим только, что разложение индуцированного тока  $\langle \mathbf{j} \rangle$  на ток проводимости  $\mathbf{j}_{np}$ , поляризационный  $\partial \mathbf{P} / \partial t$  и соленоидальный  $c \cdot \text{rot } \mathbf{M}$  токи является неоднозначным. Отсюда следует, что векторы  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{H}$ , а вместе с ними тензоры магнитной  $\mu$  и диэлектрической  $\varepsilon$  проницаемостей, другие оптические тензоры определяются также неоднозначно [118, 16, 95, 127, 128].

В литературе высказывается ряд аргументов в пользу сохранения  $\mu \neq 1$  для магнетиков на оптических частотах. Так, было показано, что во многих магнитооптических кристаллах в инфракрасной области спектра существует частотно независимый эффект Фарадея [9]. Автор [9] интерпретирует этот эффект как вращение, определяемое недиагональными компонентами тензора  $\mu$  на ИК-частотах и являющееся следствием ферромагнитного и обменного резонансов. Затем в [143] удалось непосредственно измерить компоненты тензоров  $\varepsilon$  и  $\mu$  для пленки феррита-граната сложного состава.

Конечно, эти эксперименты можно также объяснить в рамках одного тензора  $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$ , не прибегая к введению  $\mu \neq 1$ . Однако это внесло бы неоправданные усложнения в теорию наблюдаемых в [9, 143] явлений, в частности, привело бы к необходимости изменения стандартных граничных условий.

Таким образом, в электродинамике кристаллов существует довольно широкий произвол в выборе уравнений связи. Мы, в зависимости от свойств кристалла и характера задачи, также будем пользоваться различными материальными уравнениями, выбирая их так, чтобы оставались неизменными стандартные граничные условия.

Итак, проведенный анализ показал, что следует отличать по симметрии операцию инверсии времени  $I'$  от операции обращения магнитной структуры  $\underline{I}$ . Был разрешен парадокс с проводимостью  $\sigma$  и предложена [120] уточненная формулировка (1.2.11) принципа симметрии кинетических коэффе́ктов Фарадея-фициентов. Установлены [120] ограничения (1.2.18) на материальные тензоры  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  линейных уравнений общего вида (1.2.12). В обзорном плане обсуждены различные варианты линейных уравнений связи и их взаимосвязь.

### 1.3 Законы сохранения в кристаллооптике линейных диспергирующих сред

Если в определенной области частот (области прозрачности) диссипацией энергии электромагнитного поля можно пренебречь, то тогда можно сформулировать ряд законов сохранения. Будем исходить из материальных уравнений (1.2.14) – (1.2.16).

Начнем с закона сохранения энергии. Усредненное по периоду значение скорости изменения плотности энергии электромагнитного поля  $\langle \dot{\theta} \rangle = \langle \dot{w} \rangle$  (1.2.17) при отсутствии поглощения должно обратиться в нуль. Учитывая (1.2.14), получаем, что в прозрачных средах  $K = K^+$  или, в более подробной записи

$$\varepsilon = \varepsilon^+, \quad \alpha = \beta^+, \quad \mu = \mu^+. \quad (1.3.1)$$

Впервые соотношения вида (1.3.1) для линейных прозрачных сред были получены, по-видимому, еще Ле Корром [139] и Е. Постом [144].

Для бездиссипативных сред можно определить также плотность энергии электромагнитного поля. Разлагая квазимонохроматическое поле  $F(t) = F_0(t)e^{-i\omega t}$  в ряд Ж. Фурье, учитывая медленность изменения его во времени и производя обратное суммирование аналогично [123, 8] получаем

$$\dot{X} = (-i\omega F + \dot{F}_0 \partial(\omega K) / \partial \omega) e^{-i\omega t}. \quad (1.3.2)$$

Подставляя это выражение в (1.2.17), находим следующее выражение для плотности энергии электромагнитного поля квазимонохроматических квазиплоских волн в прозрачных линейных средах с пространственной и частотной дисперсией [124]

$$w = F^* (\partial(\omega K) / (\partial \omega)) F / (16\pi), \quad (1.3.3)$$

которое, учитывая (1.2.15), (1.2.16), можно представить в виде [420]

$$w = [E^* \frac{\partial(\omega \varepsilon)}{\partial \omega} E + H^* \frac{\partial(\mu \omega)}{\partial \omega} H + 2Re(E^* \frac{\partial(\alpha \omega)}{\partial \omega} H)] / (16\pi). \quad (1.3.4)$$

Для сред без магнитной структуры  $\varepsilon = \tilde{\varepsilon} = \varepsilon^*$ ,  $\mu = \tilde{\mu} = \mu^*$ ,  $\alpha = -\alpha^*$ , тогда (1.3.4) соответствует выражению для  $w$  в [123], а при  $\alpha = 0$  - в [8]. Для кристаллов с эрмитовыми тензорами  $\varepsilon$  и  $\mu$  - см. [125, 8].

Уравнения Максвелла для плоских монохроматических волн типа (1.2.13) имеют вид [92]

$$\omega \mathbf{D} = -c[\mathbf{k} \mathbf{H}], \quad \omega \mathbf{B} = c[\mathbf{k} \mathbf{E}], \quad (1.3.5)$$

откуда, учитывая (1.2.15) и (1.2.16)

$$ck([\mathbf{E} \mathbf{H}^*] + [\mathbf{E}^* \mathbf{H}]) = \omega F^* K F. \quad (1.3.6)$$

Дифференцируя далее (1.3.6) по  $\mathbf{k}$ , получаем выражение для плотности потока энергии  $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S} = w\mathbf{u} \quad , \quad (1.3.7)$$

где  $\mathbf{u} = \partial\omega / \partial\mathbf{k}$  - групповая скорость,  $w$  - средняя плотность энергии поля, определяемая формулой (1.3.4), а вектор Дж. Пойнтинга [145]

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \text{Re}[\mathbf{E} \mathbf{H}^*] - \frac{\omega}{16\pi} F_A^* \frac{\partial K_{AB}}{\partial \mathbf{k}} F_B, \quad (1.3.8)$$

причем

$$F_A^* \frac{\partial K_{AB}}{\partial \mathbf{k}} F_B = E_i^* \frac{\partial e_{ij}}{\partial \mathbf{k}} E_j + H_i^* \frac{\partial m_{ij}}{\partial \mathbf{k}} H_j + 2 \text{Re}(E_i^* \frac{\partial b_{ij}}{\partial \mathbf{k}} H_j). \quad (1.3.9)$$

Найденные соотношения (1.3.8), (1.3.9) представляют собой выражения для плотности потока энергии в линейных средах с пространственной и временной дисперсией. При  $\alpha=0$  они соответствуют результатам [146]; полагая еще дополнительно  $\mu=1$ , приходим к соотношениям [147, 19].

Для квазимонохроматических квазиплоских волн нетрудно, используя, например, методику [148, 8], получить уравнение

$$\text{div} \mathbf{S} + \partial w / \partial t = 0, \quad (1.3.10)$$

которое можно трактовать как закон сохранения энергии электромагнитного поля в дифференциальной форме. Здесь  $w$  и  $\mathbf{S}$  определяются формулами (1.3.4), (1.3.8).

Умножая (1.3.7) слева диадно на  $k/w$ , получаем, что усредненный по периоду тензор напряжений Максвелла (тензор плотности среднего потока импульса электромагнитного поля) равен

$$T = \mathbf{k} \cdot \mathbf{s} / \omega = \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{g} = w\mathbf{k} / \omega, \quad (1.3.11)$$

где  $\mathbf{g}$  – среднее значение вектора суммарной плотности поля и вещества в прозрачных линейных диспергирующих средах.

После некоторых преобразований формул (1.3.11), полагая  $k=k^*$  и учитывая уравнения Максвелла (1.3.5), находим явные выражения [145]

$$T = \frac{1}{16\pi} [\mathbf{H}^* \mathbf{B} + \mathbf{E}^* \mathbf{D} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}^* - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}^* - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* - \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{D} - \mathbf{k} \cdot F^* \frac{\partial K}{\partial \mathbf{k}} F], \quad (1.3.12)$$

$$\mathbf{g} = \frac{1}{8\pi c} \text{Re}[\mathbf{D} \mathbf{B}^*] + \frac{1}{16\pi} F^* \frac{\partial K}{\partial \omega} F \cdot \mathbf{k}, \quad (1.3.13)$$

для тензора натяжений  $T$  Максвелла (в форме Г. Минковского) и плотности импульса  $\mathbf{g}$ .

Формулы для  $T$  и  $\mathbf{g}$  для сред, описываемых двумя эрмитовыми тензорами  $\varepsilon$  и  $\mu$ , были изложены (в четырехмерной форме) в [125, 149], соотношения (1.3.12), (1.3.13) являются обобщением этих результатов на линейные среды общего вида.

Введем четырехмерный тензор энергии-импульса Минковского для сред с

пространственной и временной дисперсией в форме [125]

$$T^{mn} = g^m u^n = \begin{bmatrix} T & c\mathbf{g} \\ \mathbf{S}/c & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^{mn} & T^{m4} \\ T^{4n} & T^{44} \end{bmatrix}, \quad (1.3.14)$$

где 4-векторы групповой скорости  $u^m$  плотности импульса  $g^m$  равны

$$u^m = (\mathbf{u}, c)/\sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad g^m = (\mathbf{g}, w/c)/\sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad (1.3.15)$$

причем  $u^m u_m = -c^2$ . Здесь используется псевдоэвклидова метрика и различаются ко-, контвариантные- и смешанные компоненты тензоров. Греческие индексы принимают значения (1,2,3), а латинские – (1,2,3,4) [125]. Заметим, что электромагнитный тензор энергии-импульса  $T^{mn}$  является несимметричным, потому что описывает систему (среда + электромагнитное поле).

Аналогично закону сохранения энергии (1.3.10) может быть получен закон сохранения момента поля

$$\partial T_{mn}/\partial x_n + \partial g_m/\partial t = 0, \quad (1.3.16)$$

где 3-тензоры  $T_{\mu\nu}$  и  $g_\mu$  определяются формулами (1.3.12) и (1.3.13). Объединяя (1.3.10) и (1.3.16), получаем закон сохранения тензора энергии-импульса системы (вещество + поле) в 4-форме [125, 149]

$$\partial T^{mn}/\partial x^n = 0, \quad x^m = (\mathbf{r}, ct). \quad (1.3.17)$$

Представим линейные уравнения связи (1.2.20) в ковариантной 4-форме

$$\Psi_{ln} = L_{lnpq} \Phi^{pq}, \quad (1.3.18)$$

где введены следующие [125, 149] 4-тензоры полей

$$\Phi^{pq} = \begin{bmatrix} -\mathbf{H}^\times & -\mathbf{D} \\ \mathbf{D} & 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi_{ln} = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}^\times & \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.3.19)$$

тогда 4-тензор энергии-импульса  $T_s^m$  принимает вид

$$T_s^m = -\frac{1}{16\pi} [\Psi_{sl}^* \Psi^{lm} + \Psi_{sl} \Psi^{*lm} + \frac{k_s}{2} \Psi^{*ln} \frac{\partial L_{lnpq}}{\partial k_m} \Psi^{pq}]. \quad (1.3.20)$$

Несложные, но громоздкие вычисления показывают, что [145]

$$\frac{1}{2} \Psi^{*lm} \Psi^{pq} \frac{\partial L_{lnpq}}{\partial k_m} = F^* \frac{\partial K}{\partial k_i} F = \mathbf{H}^* \frac{\partial \mathcal{M}_l}{\partial k_i} \mathbf{H} - \mathbf{D}^* \frac{\partial e_l^{-1}}{\partial k_i} \mathbf{D} - 2\text{Re}(\mathbf{D}^* \frac{\partial \alpha_l}{\partial k_i} \mathbf{H}). \quad (1.3.21)$$

В [125, 149] для сред с эрмитовыми тензорами  $\varepsilon_l$  и  $\mu_l$  получено выражение для  $T_s^m$ , аналогичное (1.3.20). Здесь эти результаты обобщены на линейные диспергирующие среды общего вида (1.2.20) с  $\alpha_l \neq 0$ , в которых

$$\varepsilon_l = \varepsilon_l^+, \quad \mu_l = \mu_l^+, \quad \alpha_l = -\beta_l^+. \quad (1.3.22)$$

Таким образом, в данном разделе для прозрачных линейных сред с временной и пространственной дисперсией общего вида (1.2.20) получены [145] выражения для плотностей потока энергии (1.3.8) и импульса  $g$  (1.3.13), для тензора натяжений Максвелла (1.3.12). Записан 4-тензор энергии-импульса Минковского (1.3.20), удовлетворяющий законам сохранения энергии и импульса системы в трехмерной- (1.3.10), (1.3.16) и четырехмерной- (1.3.17) формах.

## 2 ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В МАГНЕТИКАХ

### 2.1 Показатели преломления и поляризация собственных волн в прозрачных кристаллах

Большинство кристаллов с магнитной структурой обладает центросимметричной парамагнитной фазой, поэтому возможные эффекты оптической активности и магнитоэлектрического эффекта в них запрещены симметрией. Для описания оптических свойств таких магнитоупорядоченных кристаллов будем пользоваться материальными уравнениями вида [8]

$$\mathbf{E} = \varepsilon^{-1} \mathbf{D}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H}, \quad (2.1.1)$$

полагая  $\mu=1$ . Обратим внимание на то, что термины "магнитный", и "магнитоупорядоченный" вообще говоря, неэквивалентны. Магнитоупорядоченный кристалл обладает упорядоченной ориентацией магнитных моментов (спинов), однако в оптическом диапазоне можно полагать  $\mu=1$ . В то же время в литературе термин "магнитный" часто означает, что  $\mu \neq 1$ . Однако, строго говоря, для всех веществ статическая проницаемость  $\mu \neq 1$ . Поэтому более точно говорить "магнитоупорядоченный кристалл" и указывать область частот. Вместе с тем в литературе под терминами "магнитные материалы", "магнитные пленки", "магнетики" чаще всего понимают соответствующие образцы с упорядоченной магнитной структурой. Следуя этой традиции, в дальнейшем мы будем использовать термин "магнитный" в смысле "магнитоупорядоченный" безотносительно к параметру  $\mu$ .

Таким образом, оптические свойства обсуждаемых магнетиков характеризуются одним тензором обратной диэлектрической

$$\varepsilon^{-1} = \chi + i\mathbf{G}^\times, \quad \chi = \tilde{\chi}, \quad (2.1.2)$$

где  $\chi$  – симметричная часть тензора  $\varepsilon^{-1}$ , а  $\mathbf{G}^\times$  – антисимметричный тензор второго ранга, дуальный вектору гирации  $\mathbf{G}$ .

Проведем общее феноменологическое изучение собственных волн в таких средах, не конкретизируя явную зависимость  $\varepsilon^{-1}$  от параметров магнитного упорядочения. Для плоских монохроматических волн типа (1.2.13) уравнения Максвелла имеют вид [16]

$$\mathbf{m}^\times \mathbf{E} = \mathbf{B}, \quad \mathbf{m}^\times \mathbf{H} = -\mathbf{D}, \quad (2.1.3)$$

где  $\mathbf{m} = n\mathbf{n}$  – вектор рефракции,  $n$  – показатель преломления,  $\mathbf{n}$  – единичный вектор волновой нормали. Из (2.1.1), (2.1.3) вытекает волновое уравнение

$$\tau_\pm \mathbf{H}_\pm = 0, \quad \tau_\pm = n_\pm^{-2} + \mathbf{n}^\times \varepsilon^{-1} \mathbf{n}^\times, \quad (2.1.4)$$

из которого получаем уравнение нормалей [16, 97]

$$n^{-4} + \mathbf{n}(\chi - \chi_c)\mathbf{n}n^{-2} + \mathbf{n}\bar{\chi}\mathbf{n} = (\mathbf{n}\mathbf{G})^2, \quad (2.1.5)$$

где  $\chi_c$  – след матрицы  $\chi$ ,  $\bar{\chi} = |\chi| \chi^{-1}$  – матрица, взаимная к  $\chi$ , а  $|\chi|$  – ее определитель.

Будем считать теперь, что кристалл прозрачен, тогда  $\varepsilon = \varepsilon^+$ , т.е.  $\chi$  и  $\mathbf{G}$  – вещественны. Кристаллооптика сред с эрмитовым тензором  $\varepsilon$  развивалась многими авторами [8, 16, 97]. Мы следуем нашим работам [150-152].

Если использовать инвариантное представление тензора  $\chi$  в форме [90]

$$\chi = a + b(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{c}_1), \quad (2.1.6)$$

где  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$  – единичные векторы оптических осей, то показатели преломления собственных волн  $n_{\pm}$  из (2.1.5) равны [152]

$$n_{\pm}^{-2} = a + b[\mathbf{n}\mathbf{c}_1][\mathbf{n}\mathbf{c}_2] \pm (b^2[\mathbf{n}\mathbf{c}_1]^2[\mathbf{n}\mathbf{c}_2]^2 + (\mathbf{n}\mathbf{G})^2)^{1/2} \quad (2.1.7)$$

Здесь параметр  $b$  характеризует анизотропию кристалла. Отсюда видно, что гиротропия  $\mathbf{n}\mathbf{G}$  может только увеличивать двупреломление  $\Delta n = n_+ - n_-$  в кристалле. Двупреломление может обращаться в нуль только для кристаллов, удовлетворяющих условию  $\mathbf{c}_i\mathbf{G} = 0$ , при  $(\mathbf{n}||\mathbf{c}_i)$  ( $i=1, 2$ ).

Значения диагональных компонент тензора  $\chi$  порядка  $1/3$ , а компонент вектора гирации  $G_i \sim 10^{-5} \div 10^{-3}$ , поэтому влияние гиротропии в математическом плане можно рассматривать как слабое возмущение негиротропного кристалла, описываемого тензором  $\chi$ , полагая в (2.1.2) и других соотношениях  $\mathbf{G} = 0$ . Отсюда вытекает целесообразность, наряду с гиротропным ( $\mathbf{G} \neq 0$ ), рассматривать также и соответствующий ему негиротропный ( $\mathbf{G} = 0$ ) кристалл. Все величины, относящиеся к негиротропному кристаллу, будем помечать сверху значком  $^{\circ}$ .

Уравнение нормалей (2.1.5) можно теперь представить в форме [8]

$$(n^{-2} - n_+^{\circ-2})(n^{-2} - n_-^{\circ-2}) = (\mathbf{n}\mathbf{G})^2, \quad (2.1.8)$$

где  $n_{\pm}^{\circ}$  – показатели преломления волн без учета магнитной гиротропии ( $\mathbf{G} = 0$ ). Отсюда видно, что магнитная гиротропия обычно слабо влияет на показатели преломления и двупреломление (во втором порядке) и только вдоль и вблизи оптических осей – в первом порядке.

Перейдем к исследованию поляризации собственных плоских монохроматических волн вдоль заданной нормали  $\mathbf{n}$ . Из (2.1.1)–(2.1.4) получаются следующие [150, 16] соотношения биортогональности

$$\mathbf{H}_+ \mathbf{H}_-^* = \mathbf{D}_+ \mathbf{D}_-^* = \mathbf{E}_{\pm} \mathbf{D}_{\mp}^* = 0 \quad (2.1.9)$$

для векторов  $\mathbf{H}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$  изонормальных волн, соответствующих двум различным показателям преломления  $n_+$  и  $n_-$ .

В (2.1.4)  $\bar{\tau}$  является диадой:  $\bar{\tau} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{A}$  [92]. Вычисляя матрицу  $\bar{\tau}$  и умножая ее справа на произвольный вектор  $\mathbf{d}$  ( $\mathbf{dn} = 0$ ), находим поляризацию собственных волн по вектору  $\mathbf{H}$  [150]:

$$\mathbf{H}_{\pm} \parallel [\mathbf{n}, (e^{-1} - n_{\mp}^{-2})[\mathbf{nd}]]. \quad (2.1.10)$$

Если правая часть (2.1.10) обращается в нуль, то это означает, что  $\mathbf{d} \parallel \mathbf{H}_{\pm}$ .

Выражение (2.1.10) можно преобразовать и записать в другом, более компактном виде [150]:

$$\mathbf{H}_{\pm} \parallel (\mathbf{H}_{+}^{\circ} + i\gamma \mathbf{H}_{-}^{\circ}), \quad \gamma = \mathbf{nG} / (n_{+}^{\circ -2} - n_{-}^{\circ -2}). \quad (2.1.11)$$

Здесь  $n_{\pm}^{\circ}$ ,  $\mathbf{H}_{\pm}^{\circ}$  – показатели преломления и нормированные ( $[\mathbf{n} \mathbf{H}_{+}^{\circ}] = \mathbf{H}_{-}^{\circ}$ ) векторы напряженностей магнитного поля линейно поляризованных изонормальных волн в отсутствие гиротропии ( $\mathbf{G} = 0$ ). Полученное выражение для эллиптичности  $\gamma$  в (2.1.11) несколько проще, хотя и эквивалентно приведенному в [8].

Эллиптичность  $\gamma$  целесообразно также представить как функцию отношения гиротропии к анизотропии [150]

$$\gamma = \operatorname{tg}[\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2\mathbf{nG} / (n_{+}^{\circ -2} - n_{-}^{\circ -2}))]. \quad (2.1.12)$$

Из (2.1.11) следует, что в прозрачных магнетиках собственные волны (по вектору  $\mathbf{H}$ ) эллиптически поляризованы. Главные оси эллипсов ортогональны, а направления вращения противоположны [8]. При  $\mathbf{nG} = 0$  волны поляризованы линейно, вдоль оптических осей – циркулярно. Произвольная поляризация может быть только вдоль оси  $c_i$ , удовлетворяющей условию  $c_i \mathbf{G} = 0$ . Условия линейной и круговой поляризации векторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  подробно рассмотрены в работе [150].

Таким образом, в данном разделе получены [150-152] выражения (2.1.10), (2.1.11), (2.1.12) для поляризации и эллиптичности собственных волн в прозрачных магнитоупорядоченных кристаллах.

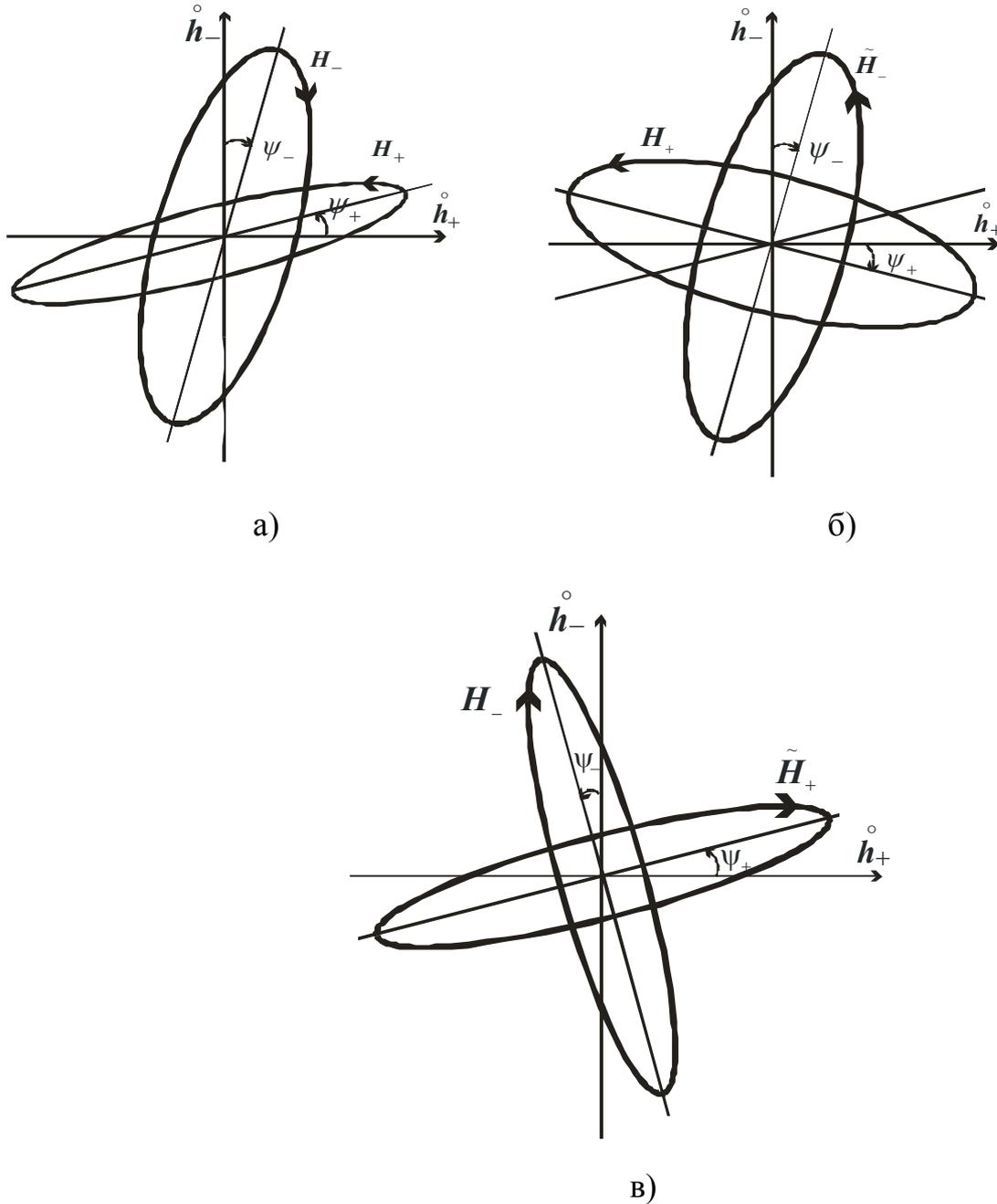
## 2.2 Поляризация собственных волн и сингулярные направления в поглощающих магнетиках

Проведем обобщение полученных в разделе 2.1 результатов на диссипативные среды. Будем исходить, как и ранее, из материальных уравнений (2.1.1), (2.1.2) и уравнений Максвелла (2.1.3) и следовать нашим работам [152-154]. При наличии поглощения симметричный тензор  $\chi$  и вектор гирации  $\mathbf{G}$  в  $\varepsilon^{-1}$  (2.1.2) становятся комплексными.

Получим соотношения биортогональности для векторов поля двух изонормальных волн, соответствующих двум различными показателям преломления и

противоположным направлениям намагниченности в кристалле. Для перемангниченного кристалла тензор  $\varepsilon^{-1}$  переходит в транспонированный  $\tilde{\varepsilon}^{-1}$ , поэтому соответствующие ему величины обозначим тильдой ( $\tilde{H}, \tilde{D}, \tilde{E}, \tilde{n}$ ). Эти выражения получаются из обычных заменой  $G \rightarrow (-G)$ . Вместо (2.1.4) будем иметь

$$(\tilde{n}_{\pm}^{-2} + n^{\times} \tilde{\varepsilon}^{-1} n^{\times}) \tilde{H}_{\pm} = 0. \quad (2.2.1)$$



**Рисунок 1** – Поляризация собственных плоских монохроматических световых волн в поглощающих магнитоупорядоченных кристаллах:

а)  $H_+, H_-$ ;  $\varphi_+ - \varphi_- = \alpha''/2$ . б)  $H_+, \tilde{H}_-$ ;  $H_+ \tilde{H}_- = 0$ . в)  $H_-, \tilde{H}_+$ ;  $H_- \tilde{H}_+ = 0$ .

Из (2.1.3) и (2.2.1) находим соотношения биортогональности [153]:

$$\mathbf{H}_{\pm} \tilde{\mathbf{H}}_{\mp} = \mathbf{D}_{\pm} \tilde{\mathbf{D}}_{\mp} = \mathbf{E}_{\pm} \tilde{\mathbf{D}}_{\mp} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{D}_{\pm} \parallel \tilde{\mathbf{H}}_{\mp}, \quad (2.2.2)$$

имеющие вполне определенный физический смысл. Каждой собственной волне  $\mathbf{H}_{\pm}$  ортогональна другая волна  $\tilde{\mathbf{H}}_{\mp}$ , движущаяся в том же самом кристалле, но намагниченном в противоположном направлении.

Это означает, что оси эллипсов поляризации векторов  $\mathbf{H}_{\pm}$  и  $\tilde{\mathbf{H}}_{\mp}$  соответственно подобны, направления вращения одинаковы, а их главные оси взаимно перпендикулярны (рисунок 1). Практически такие волны возбуждаются, например, в двух противоположно намагниченных доменах одного монокристалла магнетика.

Нетрудно проверить, что все остальные соотношения из раздела 2.1, кроме (2.1.9), формально остаются в силе и при наличии поглощения, только параметры  $n_{\pm}^{\circ}$ ,  $n_{\pm}$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $\zeta$ ,  $\mathbf{G}$  становятся комплексными.

Выражения для поляризации (2.1.10)–(2.1.12) остаются справедливыми в поглощающих магнетиках даже для неоднородных ( $[\mathbf{m}\mathbf{m}^*] \neq 0$ ) волн, исключая случай  $\mathbf{m}^2 = 0$ . Последний вариант может быть реализован лишь в исключительных условиях и поэтому нами не рассматривается.

Известно [92, 15], что в поглощающих негиротропных ( $\mathbf{G} = 0$ ) кристаллах две изонормальные волны  $\mathbf{H}_{-}^{\circ}$  и  $\mathbf{H}_{+}^{\circ}$  поляризованы, вообще говоря, эллиптически и имеют взаимно перпендикулярные эллипсы поляризации с одинаковым отношением полуосей и направлением вращения, т.е.  $\mathbf{H}_{+}^{\circ} \mathbf{H}_{-}^{\circ} = 0$ , поэтому можем записать

$$\mathbf{H}_{\pm}^{\circ} = \mathbf{h}_{\pm}^{\circ} \pm i\gamma_0 \mathbf{h}_{\mp}^{\circ}, \quad [\mathbf{n}\mathbf{h}_{\pm}^{\circ}] = \pm \mathbf{h}_{\mp}^{\circ}, \quad (2.2.3)$$

где  $\gamma_0$  – эллиптичность волн, а  $\mathbf{h}_{\pm}^{\circ}$  – ортонормированные векторы осей эллипсов.

Введем углы – вещественный  $\beta$  и комплексный  $\alpha = \alpha' + i\alpha''$  соотношениями [154]

$$\gamma_0 = th(\beta/2), \quad \gamma = th(\alpha/2), \quad (2.2.4)$$

тогда (2.1.11) принимает вид

$$\mathbf{H}_{\pm} \sim (\mathbf{h}_{\pm}^{\circ} + i th[(\beta \pm \varrho)/2] \mathbf{h}_{\mp}^{\circ}), \quad (2.2.5)$$

откуда следует, согласно [6, 16], что главные оси эллипсов поляризации собственных волн  $\mathbf{H}_{\pm}$  поглощающего магнитоупорядоченного кристалла повернуты относительно базисных направлений  $\mathbf{h}_{+}^{\circ}$  и  $\mathbf{h}_{-}^{\circ}$  на равные и противоположные углы  $\psi_{\pm}$  соответственно, а эллиптичности  $\gamma_{\pm}$  их различны [153, 154, 152]

$$\psi_{\pm} = \pm \alpha'' / 2, \quad \gamma_{\pm} = th[(\varrho' \pm \beta')/2]. \quad (2.2.6)$$

При этом углы между главными полуосями эллипсов поляризации  $\mathbf{H}_+$  и  $\mathbf{H}_-$  равны  $(90^\circ - \alpha'')$  и  $(90^\circ + \alpha'')$ .

Предельный случай, когда  $\alpha' = 0$ , реализуется, в частности, при  $\mathbf{nG} = 0$ . При этом обе волны поляризованы как в поглощающем негиротропном кристалле, т.е. главные оси эллипсов ортогональны, а направления их вращения одинаковы. Линейная же поляризация обеих изонормальных волн в поглощающих магнетиках может существовать лишь при одновременном выполнении условий  $\alpha' = 0$ ,  $\beta = 0$ .

Это означает, что оси эллипсов поляризации векторов  $\mathbf{H}_\pm$  и  $\tilde{\mathbf{H}}_\mp$  соответственно подобны, направления вращения одинаковы, а их главные оси взаимно перпендикулярны (рисунок 1). Практически такие волны возбуждаются, например, в двух противоположно намагниченных доменах одного монокристалла магнетика.

Нетрудно проверить, что все остальные соотношения из раздела 2.1, кроме (2.1.9), формально остаются в силе и при наличии поглощения, только параметры  $n_\pm^\circ$ ,  $n_\pm$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $\zeta$ ,  $\mathbf{G}$  становятся комплексными.

Выражения для поляризации (2.1.10)–(2.1.12) остаются справедливыми в поглощающих магнетиках даже для неоднородных ( $[\mathbf{mm}^*] \neq 0$ ) волн, исключая случай  $\mathbf{m}^2 = 0$ . Последний вариант может быть реализован лишь в исключительных условиях и поэтому нами не рассматривается.

Известно [92, 15], что в поглощающих негиротропных ( $\mathbf{G} = 0$ ) кристаллах две изонормальные волны  $\mathbf{H}_-^\circ$  и  $\mathbf{H}_+^\circ$  поляризованы, вообще говоря, эллиптически и имеют взаимно перпендикулярные эллипсы поляризации с одинаковым отношением полуосей и направлением вращения, т.е.  $\mathbf{H}_+^\circ \mathbf{H}_-^\circ = 0$ , поэтому можем записать

$$\mathbf{H}_\pm^\circ = \mathbf{h}_\pm^\circ \pm i\gamma_0 \mathbf{h}_\mp^\circ, \quad [\mathbf{nh}_\pm^\circ] = \pm \mathbf{h}_\mp^\circ, \quad (2.2.3)$$

где  $\gamma_0$  – эллиптичность волн, а  $\mathbf{h}_\pm^\circ$  – ортонормированные векторы осей эллипсов.

Введем углы – вещественный  $\beta$  и комплексный  $\alpha = \alpha' + i\alpha''$  – соотношениями [154]

$$\gamma_0 = th(\beta/2), \quad \gamma = th(\alpha/2), \quad (2.2.4)$$

тогда (2.1.11) принимает вид

$$\mathbf{H}_\pm \sim (\mathbf{h}_\pm^\circ + i th[(\beta \pm \vartheta)/2] \mathbf{h}_\mp^\circ), \quad (2.2.5)$$

откуда следует, согласно [6, 16], что главные оси эллипсов поляризации собственных волн  $\mathbf{H}_\pm$  поглощающего магнитоупорядоченного кристалла повернуты относительно базисных направлений  $\mathbf{h}_+^\circ$  и  $\mathbf{h}_-^\circ$  на равные и противоположные углы  $\psi_\pm$  соответственно, а эллиптичности  $\gamma_\pm$  их различны [153, 154, 152]

$$\psi_\pm = \pm \alpha'' / 2, \quad \gamma_\pm = th[(\vartheta' \pm \beta')/2]. \quad (2.2.6)$$

При этом углы между главными полуосями эллипсов поляризации  $H_+$  и  $H_-$  равны  $(90^\circ - \alpha'')$  и  $(90^\circ + \alpha'')$ .

Предельный случай, когда  $\alpha' = 0$ , реализуется, в частности, при  $nG = 0$ . При этом обе волны поляризованы как в поглощающем негиротропном кристалле, т.е. главные оси эллипсов ортогональны, а направления их вращения одинаковы. Линейная же поляризация обеих изонормальных волн в поглощающих магнетиках может существовать лишь при одновременном выполнении условий  $\alpha' = 0$ ,  $\beta = 0$ .

Направления вращения эллипсов поляризации в общем случае характеризуются знаками выражений  $\gamma_{\pm}$ . При  $(\alpha')^2 < \beta^2$  имеем вращения в одном направлении, при  $(\alpha')^2 > \beta^2$  – в противоположных. Когда  $(\alpha')^2 = \beta^2$ , то одна из волн становится линейно поляризованной, а вторая по-прежнему остается эллиптической.

Проанализируем условия круговой поляризации векторов  $H_{\pm}$ . Используем инвариантный [16] критерий  $H^2 = 0$  циркулярной поляризации. Учитывая выражения (2.1.11), находим:  $(1 - \gamma^2)H_{\pm}^{\circ 2} = 0$ . Откуда общее необходимое условие круговой поляризации векторов однородных плоских волн в поглощающем магнитоупорядоченном кристалле имеет вид

$$[nc_1]^2 [nc_2]^2 = 0. \quad (2.2.7)$$

Такой же результат был получен другим путем также в работе [16].

Круговая поляризация векторов  $H_{\pm}$  может быть также в вырожденном случае, когда параметр  $b = 0$  и тензор  $\chi$  становится изотропным.

В отличие от изотропных сред вдоль заданного направления нормали  $n$ , как следует из уравнения нормалей (2.1.5), могут, как правило, возникать две собственные волны с различными показателями преломления  $n_+$  и  $n_-$ . Однако в кристаллах возможны также направления, вдоль которых двупреломление  $\Delta n$  собственных волн исчезает. Такие направления будем называть сингулярными или оптическими осями. В прозрачных негиротропных кристаллах всегда имеются изотропные оптические оси, т.е. направления, вдоль которых двупреломление равно нулю и могут распространяться световые волны произвольной поляризации. Изотропные оси характеризуются линейными векторами  $c_1, c_2$  для двуосных–, либо линейным вектором  $c$  для одноосных кристаллов [92]. В поглощающих же кристаллах возможно наличие сингулярных направлений другого типа, вдоль которых обе собственные волны вырождаются в одну с определенной поляризацией. Федоров разработал инвариантную теорию оптических свойств поглощающих немагнитных негиротропных кристаллов и нашел общее условие оптических осей для негиротропных сред [92], которое имеет вид (2.27). Эллиптическому, т.е. удовлетворяющему определению  $[c_1 c_1^*] \neq 0, c_1^2 \neq 0$ , вектору  $c_1$  отвечают в кристалле два сингулярных направления – круговые оси, вдоль которых собственная волна поляризована по кругу, т.е.  $H^2 = 0$  [92]. Круговому вектору  $c_1$  соответствует одна круговая ось, линейному – одна изотропная. (Эти же правила относятся и к вектору  $c_2$ ). В негиротропных кристаллах могут быть только изотропные и круговые оси [92].

Несимметричность тензора диэлектрической проницаемости, т.е. наличие магнитной гиротропии в среде, приводит к появлению новых особенностей в отношении их оптических свойств, в том числе и в отношении сингулярных осей. Перейдем к их рассмотрению.

Если  $[nc_i] \neq 0$ , но  $[nc_i]^2 = 0$ , тогда получаем одну циркулярную волну, как и в негиротропном кристалле, а соответствующие направления можно назвать круговыми осями [92].

Согласно (2.1.7), при [152]

$$(\mathbf{nG})^2 + b^2[nc_1]^2[nc_2]^2 = 0, \quad (2.2.8)$$

также исчезает двупреломление для собственных волн. Здесь могут быть два принципиально различных варианта. При  $\mathbf{n} \parallel \mathbf{c}_i$ ,  $i=1,2,\dots$  и  $\mathbf{nG}=0$  имеем волну произвольной поляризации. Такие направления, соответствующие линейному вектору  $\mathbf{c}_i$  и волне произвольной поляризации, можно также назвать [90] изотропными осями.

Однако за счет гиротропии возможен еще один интересный случай. При выполнении условия [153, 152]

$$\mathbf{nG} = \pm ib([nc_1]^2[nc_2]^2)^{1/2} \neq 0, \quad (2.2.9)$$

согласно (2.1.7), (2.1.11), (2.1.12), также исчезает двупреломление, но обе однородные волны вырождаются в одну

$$\mathbf{H}_+ = \mp \mathbf{H}_- = (\mathbf{h}_+^\circ \mp \mathbf{h}_-^\circ) + i\gamma_0(\mathbf{h}_-^\circ \pm \mathbf{h}_+^\circ). \quad (2.2.10)$$

Это значит, что может возбуждаться лишь одна собственная волна, но, вообще говоря, эллиптической поляризации. Ее полуоси эллипса поляризации повернуты на  $45^\circ$  относительно векторов  $\mathbf{h}_+^\circ$  и  $\mathbf{h}_-^\circ$ , а эллиптичность [153] равна  $\gamma_0$ . Те же результаты можно получить сразу из (2.2.4), (2.2.6), (2.1.12). Обе собственные волны вырождаются в одну при наложении ограничений  $\alpha' = 0$ ,  $\alpha'' = \pm 90^\circ$ , но тогда  $\gamma = \pm i$ , откуда вытекает (2.2.10).

Отметим, что возможность существования эллиптических осей впервые была предсказана в [155] для магнитных негиротропных кристаллов низших сингоний. Однако сингулярные направления, определяемые условием (2.2.9), возможны только в гиротропных ( $\mathbf{G} \neq 0$ ) кристаллах. Существенным является также то обстоятельство, что такие сингулярные направления (эллиптические и линейные оси), возможны, в отличие от негиротропных- [14, 92, 156], не только в двуосных-, но и в одноосных ( $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2 = \mathbf{c}$  – вещественный вектор) кристаллах.

Условие (2.2.9) особых направлений является конусом четвертого порядка и может при определенных соотношениях между параметрами кристалла иметь решения. При этом двумерная матрица тензора  $\mathbf{n}^* \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \mathbf{n}^*$  имеет всего один собственный вектора и, естественно, не приводится к диагональному виду, что подчеркивалось в [157].

Следовательно, в поглощающих магнитоупорядоченных кристаллах при определенных условиях возможно существование целых конусов сингулярных направлений, соответствующих одной однородной волне с фиксированной по-

ляризацией. При этом в одноосных ( $c_1=c_2=c$  – линейный вектор) кристаллах могут быть изотропные и линейные оси, а в менее симметричных - изотропные, эллиптические, линейные и круговые оси.

Итак, в работах [152-154] найдены общие инвариантные выражения (2.1.12), (2.2.4)–(2.2.6) для поляризации собственных волн в поглощающих магнитоупорядоченных кристаллах. Сформулированы условия (2.2.7)-(2.2.9) сингулярных оптических направлений и предсказана возможность конусов новых типов (2.2.9) сингулярных оптических, эллиптических и линейных осей.

### 2.3 Поляризация световых волн и оптические оси в поглощающих кристаллах средней и высшей категорий

В предыдущем параграфе проводилось общее феноменологическое исследование поляризации собственных волн в поглощающих магнетиках. В данном разделе остановимся более подробно на поглощающих магнитных средах средней и высшей категорий, следуя работам [153, 158].

В кристаллах 19 классов магнитной симметрии:  $3; \bar{3}; \bar{3}m', 3m'; 32'; 4; \bar{4}; 4/m; 4m'm'; 4/m m'm'; \bar{4}2'm'; 42'2'; 6; \bar{6}; 6/m; 6m'm'; 6/m m'm'; 62'2'; 6m'2'$ , соответствующих тригональной, тетрагональной и гексагональной системам средней категории, а также в текстурах 5 магнитных классов:  $\infty, \infty/m, \infty/mm', \infty m', \infty 2'$  тензор  $\varepsilon^{-1}$  можно представить [158] в инвариантной [16] форме

$$\varepsilon^{-1} = \chi_0 + (\chi_e - \chi_0)\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} + iG\mathbf{c}^\times. \quad (2.3.1)$$

Здесь  $\mathbf{G} = G\mathbf{c}$  – вектор гирации,  $\mathbf{c}$  – единичный вектор оптической оси. Выражения (2.1.11), (2.1.12) для собственных волн  $\mathbf{H}_\pm$  принимают вид [158]:

$$\mathbf{H}_\pm = \mathbf{h}_\pm^\circ \pm i\gamma \mathbf{h}_\mp^\circ. \quad (2.3.2)$$

Параметр  $\gamma$  выражается через комплексный параметр  $p$ , равный отношению параметра гиротропии  $G$  и анизотропии  $(\chi_e - \chi_0)$  [158]:

$$z = \sqrt{1 - c^2} - c, \quad c = \frac{\sin^2 u}{2p \cos u}, \quad p = \frac{G}{\chi_e - \chi_0}. \quad (2.3.3)$$

Здесь  $\theta$  – угол между векторами  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{c}$ . Поскольку в поглощающих кристаллах средней категории  $\gamma_0 = 0$ , то эллиптичности обеих волн равны [153]:

$$\gamma_\pm = \pm(1 - \sqrt{1 - \xi^2})/\xi, \quad \xi = 2 \operatorname{Re} \gamma / (1 + |\gamma|^2). \quad (2.3.4)$$

Это означает, что в таких средах эллипсы обеих изонормальных волн подобны, направления их обхода противоположны, но волны неортогональны ( $\psi_\pm = \pm \alpha''/2$ ).

Пусть параметр  $p$  действителен. Тогда собственные волны поляризованы точно так же, как и в прозрачном кристалле, т.е. главные оси эллипсов поляризации обеих волн ортогональны, эллиптичности их равны, а направления вращения противоположны.

Второй предельный случай наблюдается, когда  $p$  - чисто мнимая величина. Тогда поляризационные характеристики собственных волн весьма необычны и зависят от величины  $(\rho'')^2$ .

а) При  $(\rho'')^2 < 1$  главные оси эллипсов параллельны ( $\psi_+ = \psi_- = \pm 45^\circ$ ), а эллиптичности равны [119]

$$\gamma_{\pm} = \pm \sqrt{(1 - |c''|)/(1 + |c''|)}. \quad (2.3.5)$$

б) Если же  $(\rho'')^2 > 1$ , то, наоборот, обе волны линейно поляризованы, а азимуты их  $\psi_{\pm}$  относительно главных направлений и различны и соответственно равны

$$2\psi_{\pm} = \pm \arctg(1/|\rho|). \quad (2.3.6)$$

Так как  $p$  зависит от угла  $\theta$ , то варианты а) и б) можно наблюдать в одном кристалле, у которого на некоторой длине волны  $\lambda_n$  параметр  $p$  мнимый. Действительно, тогда при  $\theta = 90^\circ$  имеем линейно поляризованные волны. При постепенном повороте угла  $\theta$  от  $90^\circ$  в сторону его уменьшения векторы поляризации обеих волн остаются линейными, а их оси поворачиваются навстречу друг другу относительно направлений и на углы, задаваемые формулой (2.3.6), пока не становятся параллельными друг другу при угле  $\theta = \theta_L$ , удовлетворяющему условию [158]

$$\cos u_n = \sqrt{|p|^2 + 1} - |p|. \quad (2.3.7)$$

При дальнейшем уменьшении угла  $\theta$  от  $\theta_L$  до  $0^\circ$  главные оси эллипсов поляризации волн остаются параллельными друг другу, зато у волн появляется эллиптичность (2.3.5), которая постепенно возрастает до  $(\pm 1)$  вдоль оптической оси  $c$ .

В общем случае параметр  $p$  является комплексным. Тогда при  $\theta = 90^\circ$  обе волны всегда будут эллиптическими, а их главные оси эллипсов поляризации - неортогональными и непараллельными. При постепенном уменьшении угла  $\theta$  от  $90^\circ$  к  $0^\circ$  происходит монотонное увеличение эллиптичностей  $\gamma_{\pm}$  обеих волн от нуля до единицы и уменьшение угла  $2\psi_{\pm}$  от  $90^\circ$  при  $\theta = 90^\circ$  до

$$2\psi_{\pm} = \arctg(p''/p') \quad (2.3.8)$$

при угле  $\theta$ , стремящемся к нулю.

Промежуточный момент между случаями а) и б), когда  $p = \pm i$  и две собственные волны вырождаются в одну линейной поляризации, соответствует условию сингулярных осей (2.2.9) и может наблюдаться при угле  $\theta = \theta_L$  (2.3.7), когда параметр кристалла  $p$  (2.3.3) становится чисто мнимым. Остановимся на нем подробнее.

Выделим действительные и мнимые части у величин  $G, \chi_o, \chi_e$ , тогда ограничение (2.2.9) принимает форму [158]

$$p = iG''/(c'_e - c'_o) = -iG'/(c''_e - c''_o). \quad (2.3.9)$$

Из соображений симметрии ясно, что будет не одна сингулярная ось, а целый конус (2.3.7) линейных оптических осей,

Для дальнейшего анализа перейдем от обратного к прямому тензору  $\varepsilon$

$$e = e^\circ + (\Delta e)c \cdot c, \quad \Delta e = e_e - e_o. \quad (2.3.10)$$

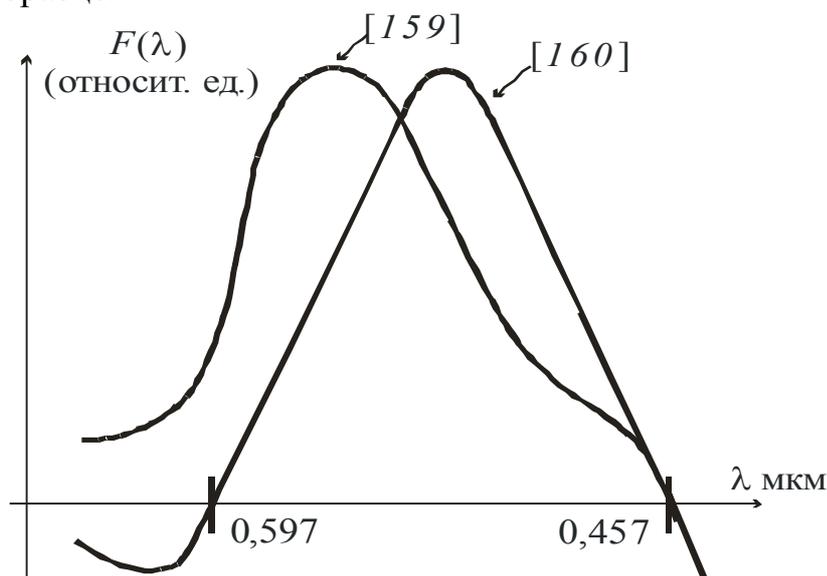
Тогда, выделяя действительные и мнимые части, находим, что при выполнении следующего ограничения [158]

$$F = g'De' + g''De'' = 0, \quad (2.3.11)$$

налагаемого на комплексные параметры анизотропии  $\Delta\varepsilon$  и гиротропии  $g$  кристалла, коэффициент  $p$  определяет действительный круговой конус сингулярных линейных осей (2.3.7) и равен [158]

$$\pm |p| = g'/De'' = -g''/De'. \quad (2.3.12)$$

Покажем путем анализа известных в литературе [159, 160] экспериментальных данных, что условие (2.3.11) действительно выполняется для некоторых магнитоупорядоченных кристаллов в определенных участках спектра. В работе [159] представлены экспериментально измеренные дисперсионные кривые  $(\lambda), g(\lambda)$  для кристалла марганцевого феррита  $MnFe_2O_4$ . Брался образец толщиной 5 мкм, намагничивался вдоль кристаллографической оси четвертого порядка, и измерения проводились в видимой области спектра. В последующей статье тех же авторов [160] по усовершенствованной методике были построены дисперсионные кривые магнитооптических параметров  $g'(\lambda), g''(\lambda), \Delta\varepsilon'(\lambda), \Delta\varepsilon''(\lambda)$  на прежнем образце.



**Рисунок 2** – Функция  $F(\lambda) = g'De'' + g''De'$  и сингулярные линейные оси в марганцевом феррите  $MnFe_2O_4$ .

Используя эти данные, по формуле (2.3.11) нами была рассчитана и построена (рисунок 2) графическая зависимость введенного параметра  $F$  от длины волны света, падающего на исследуемый кристалл

Измеренные величины  $g'(\lambda)$ ,  $g''(\lambda)$  в [159] и [160] несколько отличаются. Поэтому нами были построены по этим данным две кривые. При этом параметры  $\varepsilon'$ ,  $\varepsilon''$ ,  $\Delta\varepsilon'$ ,  $\Delta\varepsilon''$  брались в обоих случаях одинаковыми. Расчет показал, что для марганцевого феррита зависимость параметра  $F$  от длины световой волны носит сложный немонотонный характер и, как мы ожидали, на двух частотах  $F(\lambda)$  действительно обращается в нуль, что указывает на наличие конуса линейных сингулярных осей в кристалле на этих частотах. Наиболее установленным представляется существование линейных направлений на длине волны  $\lambda_{Л1}=0.457$  мкм, так как в этой точке обе кривые  $F(\lambda)$  проходят через нуль. Для этой длины волны [159, 160]  $\varepsilon''=3.19$ ;  $\varepsilon'=3.92$ ;  $\Delta\varepsilon'=-4 \cdot 10^{-5}$ ;  $\Delta\varepsilon''=-8 \cdot 10^{-5}$ . При этом  $g'=1.42 \cdot 10^{-2}$ ,  $g''=-1.36 \cdot 10^{-2}$ , а, согласно [160],  $g'=1.23 \cdot 10^{-2}$ ,  $g''=-0.9 \cdot 10^{-2}$ . Тем не менее рассчитанные углы  $\theta_{Л1}$  конуса сингулярных осей совпадают для обеих серий измерений и равны  $\theta_{Л1} \approx 89^\circ$  (рисунок 2). Менее вероятно наличие линейных осей в этом кристалле на длине волны  $\lambda_{Л2}=0.597$  мкм, поскольку, согласно данным [160], только кривая  $F(\lambda_{Л2})$  пересекает ось абсцисс. В этой точке  $\varepsilon'=5.5$ ;  $\varepsilon''=2.49$ ;  $g'=0.50 \cdot 10^{-2}$ ;  $\Delta\varepsilon'=-1.30 \cdot 10^{-3}$ ;  $g''=-0.65 \cdot 10^{-2}$ ;  $\Delta\varepsilon''=1.02 \cdot 10^{-3}$ ;  $\theta_{Л2} \approx 84^\circ$ . Таким образом, оба угла  $\theta_{Л}$  оказались близкими к  $90^\circ$ . Это означает, в частности, что для рассчитанных длин волн  $\lambda_{Л2}$ ,  $\lambda_{Л1}$  спектра по большинству направлений в данном феррите могут возбуждаться две собственные изонормальные моды с противоположными направлениями вращения и **параллельными** главными полуосями эллипсов поляризации.

В кристаллах остальных магнитных классов средней категории и в 11 магнитных классах текстур  $\infty/mm$ ;  $\infty/m1'$ ;  $\infty/mm1'$ ;  $\infty/m'm$ ;  $\infty/m'm'$ ;  $\infty m$ ;  $\infty/m'$ ;  $\infty m1'$ ;  $\infty 2$ ;  $\infty 1'$ ;  $\infty 21'$  наличие макроскопического спонтанного магнитного момента запрещено магнитной симметрией. Это означает, что магнитная гиротропия в таких средах отсутствует ( $\mathbf{G}=0$ ), а тензор диэлектрической проницаемости имеет такой же вид, как и в немагнитных поглощающих кристаллах средней категории. Тогда по любому направлению могут возбуждаться обыкновенная и необыкновенная ортогональные линейно поляризованные (по вектору  $\mathbf{H}$ ) волны. При этом вектор  $\mathbf{c}$  определяет обычную изотропную оптическую ось.

Наконец, у всех магнитных кристаллов кубической системы, являющихся скомпенсированными антиферромагнетиками, а также в 5 магнитных классах текстур  $\infty\infty m$ ;  $\infty\infty m'$ ;  $\infty\infty m1'$ ;  $\infty\infty$ ;  $\infty\infty 1'$  диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  является скаляром, и в отношении оптических свойств они ведут себя как изотропные среды.

Итак, на базе проведенного [153, 158] исследования поляризации собственных волн в поглощающих магнетиках средней и высшей категорий было предсказано, что при определенном соотношении (2.3.9) между параметрами анизотропии и гиротропии в кристаллах средних сингоний возможно [158] существование кругового конуса (2.3.7) линейных сингулярных осей. Анализ

экспериментальных данных [158] подтвердил, что в марганцевом феррите такой конус линейных осей на длине волны  $\lambda=475$  нм действительно существует.

## 2.4 Сингулярные направления в кристаллах ромбической системы

В разделе 2.3 проводилось феноменологическое изучение особенностей поляризации собственных световых волн в поглощающих магнитоупорядоченных средах высшей и средней категорий. Рассматривались и возможности существования сингулярных направлений в них.

В данном разделе, следуя работе [161], исследуем условия существования сингулярных направлений в поглощающих магнитоупорядоченных кристаллах ромбической сингонии в зависимости от соотношений между параметрами анизотропии и гиротропии тензора обратной диэлектрической проницаемости кристалла, полагая для рассматриваемого оптического диапазона частот, согласно [8],  $\mu=1$ .

Здесь и далее мы рассматриваем однородные кристаллы с магнитной структурой. Подробно граничные задачи и определение оптических и магнитооптических параметров магнитоупорядоченных кристаллов будем обсуждать в главе 6, следуя, в основном, работам [162-170].

Возвратимся снова к поглощающим магнитоупорядоченным кристаллам ромбической системы.

А. В кристаллах следующих магнитных классов  $m'm'2'$ ;  $mm'2'$ ;  $mm'm'$ ;  $22'2'$  тензор  $\varepsilon^{-1}$  можно записать в следующей форме:

$$\varepsilon^{-1} = \chi_1 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \chi_2 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \chi_3 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 + iG \mathbf{e}_3^{\times}. \quad (2.4.1)$$

причем всегда  $\chi_1 \neq \chi_2$ . Как отмечалось выше, для нахождения эллиптических, линейных и изотропных направлений достаточно найти решения уравнений (2.2.8). Удобно перейти к сферической системе координат. Тогда при подстановке (2.4.1) в (2.2.8) уравнение конуса 4-го порядка (2.2.8) после преобразований удастся разложить на множители

$$\sin^2 u (1 + u \cos 2\varphi) \pm 2v \cos u - 2 = 0, \quad (2.4.2)$$

где введены параметры кристалла

$$u = \frac{\chi_1 - \chi_2}{\chi_1 + \chi_2 - 2\chi_3}, \quad v = 2 \frac{[(\chi_1 - \chi_3)(\chi_2 - \chi_3) - G^2]^{1/2}}{\chi_1 + \chi_2 - 2\chi_3}, \quad (2.4.3)$$

в общем случае также являющиеся комплексными величинами ( $u = u_1 + iu_2$ ;  $v = v_1 + iv_2$ ). Выделяя действительные и мнимые части уравнения (2.4.2), получаем систему уравнений [161]

$$\begin{cases} \sin^2 u (1 + u_1 \cos 2\varphi) \pm 2v_1 \cos u - 2 = 0, \\ u_2 \cos 2\varphi \sin^2 u \pm 2v_2 \cos u = 0. \end{cases} \quad (2.4.4)$$

Будем искать решения этой системы при различных значениях действительных параметров  $u_1, u_2, v_1, v_2$ . Вид сингулярной оси, как отмечалось выше, определяется поляризацией собственной волны вдоль искомой оси.

Можно непосредственно произвести расчеты поляризации по формулам (2.1.11), но проще воспользоваться тем, что эллиптичность собственной волны вдоль сингулярного направления гиротропного кристалла такая же, как и эллиптичность собственных волн в соответствующем ему негиротропном ( $\mathbf{G}=0$ ) кристалле.

**Аа.** Оптические свойства существенно различаются при  $u_2 \neq 0$  и  $u_2 = 0$ . Пусть  $u_2 \neq 0$ , что реализуется в большинстве случаев. Расчеты показывают, что система (2.4.4) тогда имеет решения лишь при условиях

$$\Phi = k^2 - u_2^2 \geq v_2^2, \quad (2.4.5)$$

При  $u_2 \neq 0$ , согласно [16, 171], в негиротропных поглощающих кристаллах ромбической сингонии вдоль произвольного направления, не лежащего в плоскости симметрии кристалла, собственные волны поляризованы эллиптически, а в плоскостях симметрии – линейно. Следовательно, в гиротропных кристаллах с магнитной структурой система (2.4.4) при  $u_2 \neq 0$  может описывать только эллиптические или линейные оси.

При  $\Phi > v_2^2$  имеем четыре решения

$$\cos u = \pm(|k| - \sqrt{\Phi})/u_2, \quad \cos 2\varphi = \text{sign}(k)/\sqrt{\Phi}, \quad (2.4.6)$$

соответствующие четырем эллиптическим осям.

Если  $\Phi = v_2^2 > 0$ , то формулы (2.4.4) дают два решения

$$\cos u = \pm(|k| - \sqrt{\Phi})/u_2, \quad \cos 2\varphi = \text{sign}(kv_2), \quad (2.4.7)$$

описывающие две линейные оси, лежащие в плоскости  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  или  $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . Эти линейные оси могут вырождаться в одну, направленную вдоль намагнитченности, при

$$\Phi = v_2 = 0, \quad (2.4.8)$$

что соответствует ограничению  $(\chi_1 - \chi_2)^2 + 4G^2 = 0$ , накладываемому на комплексные компоненты  $\chi_1, \chi_2, G$  тензора  $\varepsilon^{-1}$ .

Наконец, при  $\Phi < v_2^2$  уравнения (2.4.4) не имеют решений. Как отмечалось выше, в разделе 2.2, в гиротропных поглощающих кристаллах, наряду с эллиптическими, линейными и изотропными оптическими осями, могут существовать

и круговые оси, определяемые условиями (2.2.7) при  $[nc_i] \neq 0$ . Это означает, что при  $u_2 \neq 0$  в рассматриваемых нами магнитоупорядоченных кристаллах всегда имеются также четыре круговые оси. Их направления можно рассчитать по формулам (2.4.6), полагая в них дополнительно  $G=0$ .

**Аб.** Пусть  $u_2=0$ , т.е. параметр  $u$  - вещественен. Согласно [16], при условии  $u_2=0$  собственные волны в немагнитном ромбическом поглощающем кристалле могут быть только линейно либо произвольно поляризованными. Следовательно, тогда система (2.4.4) в изучаемых кристаллах с магнитной структурой может определять только конус линейных и/или изотропных сингулярных направлений. Эллиптические оси при  $u_2=0$  всегда отсутствуют.

Изотропные оси могут находиться только в плоскости  $(e_1, e_2)$  и удовлетворяют соотношениям

$$\cos 2\varphi = 1/u_1, \theta = 90^\circ. \quad (2.4.9)$$

Отсюда при  $u_2^2 > 1$  в кристалле имеем две изотропные оси, при  $u_2^2 = 1$  – одну; а при  $u_2^2 < 1$  – оси отсутствуют.

Перейдем к линейным направлениям. Пусть  $u_2=v_2=0$ , т.е. вещественен и положителен параметр  $p = (\chi_2 - \chi_3)/(\chi_1 - \chi_3) - G^2/(\chi_1 - \chi_3)^2$ . Анализ показывает, что система (2.4.4) в этом случае может иметь физически приемлемые решения лишь для сред, в которых  $u_1^2 + v_1^2 \geq 1$ . При  $u_1^2 + v_1^2 > 1$  условия (2.4.4) задают конус линейных осей

$$\cos 2\varphi = (1 + \cos^2 u \pm 2v_1 \cos u)/(u_1 \sin^2 u), \quad (2.4.10)$$

причем, как отмечалось, при  $u_1^2 > 1$  конус линейных осей включает две-, а при  $u_1^2 = 1$  – одну изотропную ось.

Если  $v_2=u_2=0$ ,  $u_1^2 + v_1^2 = 1$ , то конус осей вырождается в две линейные оси

$$\cos^2 u = (1 - |u_1|)/(1 + |u_1|), \cos 2\varphi = \text{sign}(u_1), \quad (2.4.11)$$

а при ограничениях  $u_2=0$ ,  $u_1^2 + v_1^2 < 1$  – нет сингулярных направлений вообще.

**Б.** В кристаллах магнитных классов  $mmm$ ;  $m'm'm'$ ;  $mm2$ ;  $222$  вектор магнитной гирации  $\mathbf{G}=0$ , поэтому можно воспользоваться результатами теории сингулярных направлений в немагнитных средах [16]. Таким образом, тогда при  $u_2 \neq 0$  существуют четыре круговые, а в остальных случаях - две изотропные оси.

Мы нашли, что наличие четырех круговых осей в кристаллах при  $u_2 \neq 0$  возможно как при  $G \neq 0$ ,  $\Phi < v_2^2$ , так и в случае  $G=0$  (см. таблицу 1). Однако среды в этих обоих вариантах все же отличаются по характеру поляризации собственных волн по остальным направлениям. Так, при  $G=0$  поляризации обеих волн ортогональны, а при  $G \neq 0$  – неортогональны (см. раздел 2.2). Аналогично, в соответствии с [153], в негиротропных магнитных кристаллах с двумя изо-

тропными осями все иные направления характеризуются линейно поляризованными собственными волнами. В гиротропных же магнитоупорядоченных кристаллах с двумя изотропными осями большинству направлений соответствуют эллиптические волны. Следовательно, кристаллы №№ 5 и 14 в таблице 1 также значительно различаются по своим оптическим свойствам. Наконец, кристаллы, не имеющие никаких сингулярных направлений (№№ 7 и 12), как показывает анализ, можно объединить в одну группу.

**Таблица 1 – Оптические сингулярные направления в поглощающих магнитоупорядоченных кристаллах ромбической сингонии**

№	Число и характер оптических осей	Соотношения между параметрами кристалла
1	4 круговые + 4 эллиптические	$\left. \begin{array}{l} \Phi = v^2 \\ \Phi = v^2 > 0 \\ \Phi = v^2 = 0 \\ \Phi < v^2 \end{array} \right\} G \neq 0$
2	4 круговые + 2 линейные	
3	4 круговые + 1 линейная	
4	4 круговые	
5	2 изотропные	$\left. \begin{array}{l} u_1^2 > 1 \\ u_1^2 = 1 \\ u_1^2 < 1 \end{array} \right\} G \neq 0, u_2 = 0, u_2 \neq 0$
6	1 изотропная	
7	нет	
8	конус линейных осей + 2 изотропные	$\left. \begin{array}{l} u_1^2 > 1 \\ u_1^2 = 1 \\ u_1^2 < 1 \end{array} \right\} G \neq 0, u_2 = v_2 = 0, u_1^2 + v_1^2 > 1$
9	конус линейных осей + 1 изотропная	
10	конус линейных осей	
11	2 линейные	$\left. \begin{array}{l} u_1^2 + v_1^2 = 1 \\ u_1^2 + v_1^2 < 1 \end{array} \right\} G \neq 0, u_2 = v_2 = 0$
12	нет	
13	4 круговые	$\left. \begin{array}{l} u_2 \neq 0 \\ u_2 = 0 \end{array} \right\} G = 0$
14	2 изотропные	

Сейчас можно провести оптическую классификацию изучаемых кристаллов, положив в ее основу число и характер оптических сингулярных направлений в них с учетом поляризации собственных волн по остальным направлениям.

Согласно таблице 1, в соответствии с высказанными соображениями, поглощающие магнитоупорядоченные кристаллы ромбической сингонии по оптическим свойствам можно разделить на 13 различных типов. Отметим, что по-

глощающие немагнитные кристаллы ромбической сингонии по оптическим характеристикам бывают всего двух видов [90].

Сформулируем кратко полученные результаты [161]. При описании оптических свойств поглощающих магнитоупорядоченных кристаллов ромбической сингонии удобно ввести вспомогательные комплексные параметры  $u = u_1 + iu_2$ ;  $v = v_1 + iv_2$  (2.4.3), выражающиеся через комплексный неэрмитов тензор обратной диэлектрической проницаемости кристалла (2.4.1). В таких средах, когда  $u_2 \neq 0$ , всегда имеются четыре круговые оси. Кроме них, при выполнении условия (2.4.5), могут быть еще, определяемые соотношениями (2.4.6) – (2.4.8), четыре, две, или одна линейная ось. При ограничениях же  $u_2 = v_2 = 0$ ,  $u_1^2 + v_1^2 \geq 1$ , связывающих параметры кристалла, существует целый конус линейных сингулярных осей (2.4.10), включающий линейные и/или изотропные оси, причем последние всегда перпендикулярны вектору гирации  $\mathbf{G}$ . В кристаллах нескольких магнитных классов, где  $\mathbf{G} = 0$ , при  $u_2 \neq 0$ , существуют четыре круговые, а в остальных случаях - две изотропные оси.

Итак, предложена [161] классификация поглощающих ромбических магнетиков по их оптическим свойствам. Показано [161], что такие кристаллы по числу и характеру сингулярных оптических осей с учетом особенностей поляризации собственных волн по остальным направлениям делятся на 13 типов.

## 2.5 Сингулярные оси в магнитных кристаллах низших сингоний

Обсудим теперь условия существования оптических осей в поглощающих магнитоупорядоченных кристаллах моноклинной и триклинной систем, характеризующихся тензором

$$\varepsilon^{-1} = \chi + i\mathbf{G}^{\times} = a + b(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{c}_1) + i\mathbf{G}^{\times}. \quad (2.5.1)$$

С этой целью обратимся к условию (2.2.9)

$$\mathbf{n} \mathbf{G} = \pm ib([\mathbf{n} \mathbf{c}_1]^2 [\mathbf{n} \mathbf{c}_2]^2)^{1/2} \neq 0, \quad (2.5.2)$$

существования в кристаллическом образце линейных и эллиптических оптических направлений, которое преобразуем к виду [172]

$$(\mathbf{n}[\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2])^2 + (\mathbf{n} \mathbf{c}_2^{\times} \mathbf{c}_1^{\times} \mathbf{n})^2 = (\mathbf{n} \mathbf{g})^2; \text{ где } \mathbf{g} = \mathbf{G}/b. \quad (2.5.3)$$

Последнее уравнение представляет собой конус 4 порядка и при некоторых условиях может иметь вещественные решения относительно вектора нормали  $\mathbf{n}$  ( $\mathbf{n}^2 = 1$ ).

**А.** В магнитных кристаллах моноклинных классов  $2$ ,  $2/m$ ,  $m$  вектор  $\mathbf{G}$ , а следовательно, и вектор  $\mathbf{g}$  являются линейными. Согласно Федорову [16], тогда всегда можно выбрать такое представление тензора  $\chi$  (2.5.1), чтобы

$$[c_1 c_2] = r e_3, \quad \mathbf{g} = g e_3, \quad (e_3^2 = 1). \quad (2.5.4)$$

При этом выражение (2.5.3) удается разложить на множители

$$\mathbf{n} \alpha \mathbf{n} = \pm f \mathbf{n} e_3, \quad \alpha = c_2^\times c_1^\times, \quad f = \sqrt{r^2 - g^2}. \quad (2.5.5)$$

Уравнения же (2.5.5), определяющие два возможных конуса сингулярных направлений, решаются аналитически.

Пусть скалярный комплексный параметр  $f=0$ ; тогда конус сингулярных эллиптических осей в кристалле удовлетворяет системе двух вещественных уравнений ( $\alpha = \alpha' + i \alpha''$ )

$$n \alpha' n = 0, \quad n \alpha'' n = 0. \quad (2.5.6)$$

В большинстве случаев  $f \neq 0$ , тогда необходимые условия существования эллиптических и линейных осей (2.5.5) принимают вид

$$n \beta' n = n e_3, \quad n \beta'' n = 0, \quad (2.5.7)$$

где введен, для удобства, комплексный тензор

$$\beta = \beta' + i \beta'' = \alpha / f. \quad (2.5.8)$$

Анализ возможных ограничений (2.5.6), (2.5.7) на компоненты тензора  $\varepsilon^{-1}$  и поиск направлений  $\mathbf{n}$ , соответствующих сингулярным осям, провести далее несложно.

**В.** В кристаллах моноклинных классов  $2'/m$ ,  $2/m'$  и триклинного класса  $\bar{1}'$  вектор гирации  $\mathbf{G}=0$ . При этом соотношение (2.5.3) сводится к условиям

$$[n c_1]^2 = 0; \quad [n c_2]^2 = 0, \quad (2.5.9)$$

детально проанализированным Федоровым [16].

**С.** Последний вариант, когда конус (2.5.3) раскладывается на множители

$$\mathbf{n} \mathbf{G} = \pm i [n \mathbf{c}]^2, \quad (2.5.10)$$

может реализовываться в кристаллах моноклинной или триклинной систем любой симметрии при условии, что  $c_1 = c_2 = c$ , причем  $c$  – нелинейный вектор.

Таким образом, в поглощающих магнитоупорядоченных кристаллах моноклинной и триклинной систем в зависимости от соотношений между параметрами тензора  $\varepsilon^{-1}$  могут быть [172] эллиптические, круговые, линейные и изотропные оптические оси. Круговые и изотропные оси в таких средах определяются условиями (2.5.9), проанализированными Федоровым [16]. В за-

висимости от вида и ориентации комплексных векторов  $c_1, c_2$  круговых осей в кристалле может быть от одной до четырех, а изотропных - только одна [16].

Условия же существования линейных и эллиптических осей описываются более сложным конусом 4 порядка (2.5.2), который лишь в случаях **A** и **B** раскладывается на множители, а получающиеся при этом уравнения (2.5.5) и (2.5.10) анализируются и решаются без особых сложностей.

Здесь только подчеркнем, что, в отличие от круговых и изотропных, линейные и эллиптические оси должны встречаться, как правило, не в виде отдельных направлений, а в виде конусов направлений. Тип же направления (линейное или эллиптическое), определяется типом поляризации собственных волн в соответствующем негиротропном кристалле [153, 173]. Поэтому чаще всего будут встречаться эллиптические сингулярные оси.

В [171] исследованы условия линейной поляризации собственных волн в поглощающих негиротропных кристаллах моноклинной и триклинной систем. Из результатов [171] следует, что в поглощающих магнитоупорядоченных кристаллах моноклинной системы, где имеется не более двух круговых осей, линейные оси могут быть лишь в главной плоскости кристалла<sup>\*)</sup>. В остальных случаях моноклинных сред, наряду с главной плоскостью кристалла, линейные сингулярные оси могут располагаться дополнительно только на конусе второго порядка

$$|[nc_2]| \pm k |[nc_1]| = 0, \quad (2.5.11)$$

где  $k$  определяется из уравнения  $[c_2 c_2^*] = \pm k [c_1 c_1^*]$ .

В триклинных магнитных кристаллах оси будут, как правило, эллиптическими. Они вырождаются в линейные оси, если попадают на конус третьего порядка [171]

$$n [c_1 c_1^*] |[nc_2]|^2 + n [c_2 c_2^*] |[nc_1]|^2 = 0, \quad (2.5.12)$$

определяющий в немагнитных средах конус линейной поляризации. Если же тензор  $\chi$  имеет изотропную ось  $c_2$ , то этот конус распадается на прямую, ориентированную вдоль  $c_2$  и плоскость второго комплексного вектора  $c_1$ :  $n [c_1 c_1^*] = 0$ .

Обратим внимание также на еще одно обстоятельство. Для конусов эллиптических направлений эллиптичность собственных волн должна плавно изменяться при изменении направления  $n$ . Отсюда ясно, что линейные оси могут входить, как отдельные направления, в конусы эллиптических направлений.

В данном разделе показано, что в поглощающих магнитных кристаллах низших сингоний возможны оптические оси всех типов. Сформулированы [172] также условия существования изотропных круговых и линейных осей для всех магнитных кристаллов классов моноклинной и триклинной систем.

---

<sup>\*)</sup> Главная плоскость кристалла - это плоскость симметрии, либо плоскость, перпендикулярная кристаллографической оси второго порядка.

## 2.6 Распространение света вдоль сингулярных эллиптических направлений

В [16] инвариантным методом [92, 16] обсуждались закономерности распространения света вдоль круговых осей негиротропных поглощающих кристаллов. Следуя методу [16], рассмотрим вопрос о распространении волн вдоль эллиптических [153, 173] осей в поглощающих магнетиках, следуя работе [173].

Уравнения Максвелла для неоднородных плоских волн вида

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{o})e^{i\omega t}, \quad (2.6.1)$$

где  $\xi = \omega \mathbf{n}\mathbf{r}/c$ , приводят к линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\partial^2 \mathbf{H}(\xi) / \partial \xi^2 = y \mathbf{H}(\xi), \quad \text{где } y = \mathbf{n}^\times \mathbf{n}^\times \tilde{\varepsilon}^{-1} / \mathbf{n} \bar{\varepsilon}^{-1} \mathbf{n}. \quad (2.6.2)$$

Из уравнений нормалей (2.1.5), (2.1.8) и (2.1.12) следует [173], что вдоль сингулярных эллиптических осей

$$2i \mathbf{n}\mathbf{G} = \pm (n_-^{\circ -2} - n_+^{\circ -2}) \neq 0, \quad n^2 = 1 / \mathbf{n} \bar{\varepsilon}^{-1} \mathbf{n}. \quad (2.6.3)$$

При этом обе собственные волны вырождаются в одну (2.2.10), эллиптически или линейно поляризованную

$$\mathbf{H} = (\mathbf{H}_+^\circ \mp \mathbf{H}_-^\circ) / \sqrt{2} \equiv \mathbf{d}_j. \quad (2.6.4)$$

где  $\mathbf{H}_\pm^\circ$  – ортонормированные комплексные векторы магнитного поля соответствующего волнового уравнения без учета гиротропии

$$(\mathbf{n}^\times \chi \mathbf{n}^\times + n_\pm^{\circ -2}) \mathbf{H}_\pm^\circ = 0, \quad (2.6.5)$$

явный вид которых хорошо известен [16]. Вычисляя компоненты тензора  $\sigma$  в (2.6.2) с учетом (2.6.2) – (2.6.5), получаем

$$\sigma = -n^2 (1 - 2i \mathbf{n}\mathbf{G} \cdot n^2 \rho), \quad \rho = \mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2, \quad \mathbf{d}_2 = [\mathbf{d}_2 \mathbf{n}], \quad (2.6.6)$$

независимо от выбора знаков в (2.6.3), (2.6.4), причем  $\rho^2 = \rho_c = 0$ . Поскольку  $\mathbf{V} = \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{n}\mathbf{H} = 0$ , то решение уравнения (2.6.2) будем искать в виде

$$\mathbf{H}(\mathbf{o}) = D \mathbf{H}(0), \quad D = e^{-\sqrt{\sigma} \xi}. \quad (2.6.7)$$

Вычисляя матричную функцию  $D$ , находим выражение

$$D = e^{-ikr} (1 + a zc), \quad z = \mathbf{n}\mathbf{r}, \quad a = -i \mathbf{n}\mathbf{G} n^3 \omega / c \quad (2.6.8)$$

для оператора преобразования общего вектора магнитного поля одной из волн, движущейся в положительном направлении нормали  $\mathbf{n}$ . Возьмем  $\mathbf{H}(0)$  в виде

$$\mathbf{H}(0) = f_1 \mathbf{d}_1 + f_2 \mathbf{d}_2^*, \quad (2.6.9)$$

тогда для суммарного вектора  $\mathbf{H}$  окончательно получаем [173]

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = e^{i\varphi} [f_1 \mathbf{d}_1 + f_2 (\mathbf{d}_2^* + a z \mathbf{d}_1)], \quad (2.6.10)$$

где  $\varphi = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ . Поляризацию остальных векторов поля находим из уравнений Максвелла для волн вида (2.6.1)

$$\mathbf{D} = -i[\mathbf{n}, \partial \mathbf{H} / \partial t], \quad \mathbf{E} = \varepsilon^{-1} \mathbf{D}. \quad (2.6.11)$$

Таким образом, согласно (2.6.10), наряду с обычной собственной эллиптической волной  $f_1 \mathbf{d}_1$ , вдоль эллиптических сингулярных направлений может возбуждаться и волна типа Фойгта [2], амплитуда которой равна  $f_2 (\mathbf{d}_2^* + a z \mathbf{d}_1)$  и линейно изменяется с расстоянием. Конечно, кроме этого, за счет обычного поглощения амплитуды обеих волн (однородной и Фойгта) экспоненциально затухают с расстоянием, что учитывается множителем  $e^{i\varphi}$ .

Формулы (2.6.10), (2.6.11) аналогичны соответствующим выражениям [16] для круговых осей в негиротропных средах. Однако рассматриваемые нами эллиптические и линейные оси могут существовать только при наличии гиротропии.

Направление вращения эллипса поляризации собственной волны определяется знаком параметра  $\gamma_0$  в (2.6.5). Правые сингулярные оси переходят в левые и наоборот - при изменении направления излучения на противоположное или при перемагничивании кристалла.

Вследствие специфической структуры оператора  $D$  в (2.6.8) его можно выразить непосредственно через  $\sigma$ , не вычисляя предварительно диаду  $\rho$

$$D = e^{i\varphi} [I + i \mathbf{k} \mathbf{r} (I + \mathbf{n}^\times \varepsilon^{-1} \mathbf{n}^\times \cdot n^2 / 2)]. \quad (2.6.12)$$

Выражение (2.6.12) является более общим, чем (2.6.8) и может применяться для произвольных сингулярных направлений.

Итак, для поглощающих магнетиков с неэрмитовым тензором диэлектрической проницаемости  $\varepsilon^{-1}$  получены [173] операторы (2.6.8), (2.6.12) преобразования поляризации и векторы (2.6.10), (2.6.11) магнитного поля волн вдоль сингулярных оптических осей.

## 2.7 Преобразование поляризации излучения вдоль оптических осей

В предыдущем разделе мы получили выражение (2.6.10) для вектора магнитного поля  $\mathbf{H}$  световой суммарной волны, распространяющейся вдоль сингулярной оптической оси (эллиптической или линейной) поглощающего магнитоупорядоченного кристалла. Продолжим изучение этого вопроса. Найдем явные выражения для эллиптичности  $\gamma_{рез}$  и азимутов  $\psi_{рез}$  эллипса поляризации

суммарной (результатирующей) волны в зависимости от параметров кристалла и поляризации падающей волны. Заметим, что такие характеристики рассматривались в [174] с помощью сферы А. Пуанкаре только для круговых осей.

Возьмем вектор  $d_I$  собственной волны в (2.6.10) в виде

$$d_I = (b - i\gamma_c a) / \sqrt{1 + \gamma_c^2}, \quad \text{где } \gamma_c = \operatorname{tg} \alpha_c, \quad (2.7.1)$$

и введем комплексный угол  $\alpha = \alpha' + i\alpha''$  соотношением

$$f_1/f_2 + a z = \operatorname{th} \bar{\alpha} \equiv q. \quad (2.7.2)$$

Теперь азимут  $\psi_{\text{рез}}$  главной оси эллипса поляризации результирующей (собственной и Фойгта) волны относительно базисного вектора  $b$  и ее эллиптичность  $\gamma_{\text{рез}}$  соответственно равны

$$\psi_{\text{рез}} = \alpha', \quad \gamma_{\text{рез}} = \operatorname{tg}(\alpha'' + \alpha_c). \quad (2.7.3)$$

Для вычисления поляризации волны Фойгта достаточно положить  $f_I = 0$ . Величина  $|a|z$  является безразмерным, характерным параметром длины, поэтому обозначим

$$a = |a| e^{2i\epsilon}, \quad d = |a| z, \quad 0 \leq \beta \leq \pi. \quad (2.7.4)$$

Расчеты азимута  $\psi_\phi$  и эллиптичности  $\gamma_\phi$  волны Фойгта удобно вести по формулам

$$2\psi_\phi = \operatorname{arctg} \left[ \frac{2d \cos \epsilon}{1 - d^2} \right], \quad (2.7.5)$$

$$\gamma_\phi = \operatorname{tg} \left\{ \alpha + (1/2) \operatorname{arcsin} \left[ \frac{2d \sin \epsilon}{1 + d^2} \right] \right\}. \quad (2.7.6)$$

Проанализируем формулы (2.7.5). Азимут главной оси эллипса поляризации волны Фойгта с увеличением расстояния  $d$  монотонно увеличивается от  $0^\circ$  при  $d=0$  до  $90^\circ$  при  $d \rightarrow \infty$ . Сначала поворот происходит быстро, достигая  $\psi_\phi = 45^\circ$  при  $d=1$ , затем все медленнее. Направление вращения эллипса определяется знаком параметра  $\cos \beta$ .

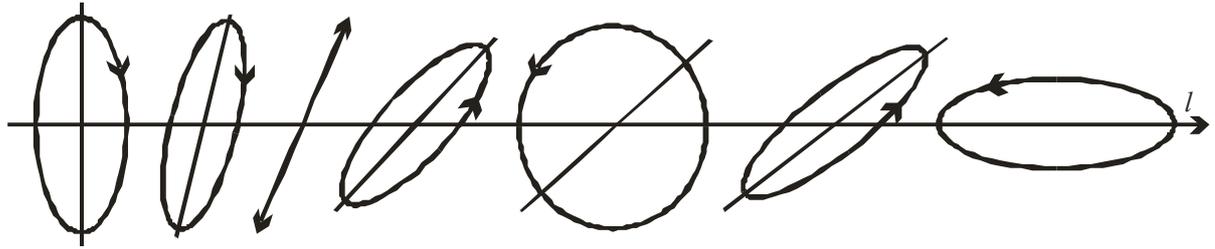
Эллиптичность  $\gamma_\phi$  волны Фойгта более сложным образом зависит от расстояния  $l$ . Функция  $|\alpha''|$  в (2.7.6) монотонно и быстро возрастает от нуля при  $d=0$  до  $\beta$  при  $d=1$ , а затем все медленнее до  $90^\circ$  при  $d \rightarrow \infty$ .

При  $\gamma_c < 0$  при постепенном увеличении  $d$  эллиптичность волны Фойгта быстро возрастает до нуля, меняет знак, продолжает возрастать до 1, а затем медленно уменьшается до  $(-\gamma_c) > 0$  при  $d \rightarrow \infty$ . При этом азимут главных осей эллипса поляризации непрерывно поворачивается так, что  $\psi_\phi \rightarrow 90^\circ$  при  $d \rightarrow \infty$  (Рисунок 3а).

Аналогично, при  $\gamma_c > 0$  происходит обратный процесс. С увеличением  $d$  эллиптичность  $\gamma_\phi$  быстро возрастает от  $\gamma_c$  до 1, затем уменьшается до нуля, меняет знак и продолжает постепенно уменьшаться до  $(-\gamma_c) < 0$  при  $d \rightarrow \infty$  (Рисунок 3б).

Произведем численные оценки величин. Пусть  $\lambda \approx 10000 \text{ \AA}$ ,  $|n| \sim 2$ ,  $|nG| \sim 10^5$ . Тогда  $a \sim 500 \text{ см}^{-1}$ . Так как  $|a|z = d$ , то  $d = l$  при характерном  $z_d = 20 \text{ мкм}$ .

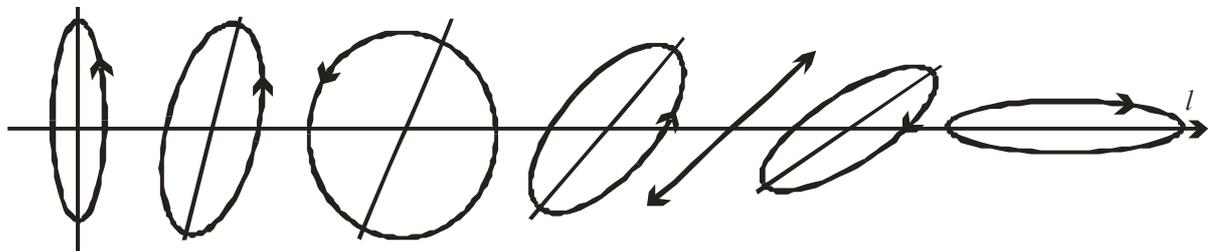
Аналогично, можно рассчитать по формулам (2.7.3) поляризационные характеристики суммарной волны  $\mathbf{H}(z)$  и в общем случае.



а)  $\gamma_\phi = \gamma_c < 0$

$\gamma_\phi = 1$

$\gamma_\phi = -\gamma_c > 0$ ;  $h = \infty$ .



б)  $\gamma_\phi = \gamma_c < 0$

$\gamma_\phi = 1$

$\gamma_\phi = 0$

$\gamma_\phi = -\gamma_c > 0$ ;  $h = \infty$ .

**Рисунок 3** – Преобразование поляризации волны Фойгта при распространении света вдоль эллиптической сингулярной оптической оси: а)  $\gamma_c < 0$ ; б)  $\gamma_c > 0$ .

Таким образом, предложены явные выражения для поляризационных характеристик  $\gamma_{рез}$ ,  $\psi_{рез}$  суммарной волны вдоль сингулярных эллиптических осей [173]. Проведен [116] также численный анализ преобразования поляризации волны Фойгта в зависимости от  $z$ .

## 2.8 Соотношения биортогональности для электромагнитных собственных волн в бианизотропных средах

Известно [8, 16], что в негиротропных немагнитных поглощающих кристаллах, а также в гиротропных прозрачных магнитоупорядоченных кристаллах векторы поляризации двух собственных изонормальных волн удовлетво-

ряют соответствующим соотношениям биортогональности. Аналогичные соотношения должны существовать и в более сложных ситуациях.

Будем исходить из материальных уравнений связи

$$\mathbf{D} = \varepsilon^{-1} \mathbf{E} \quad (2.8.1)$$

в форме [16], где  $\varepsilon^{-1}$  и  $\mu$  – комплексные несимметричные тензоры ранга 2, принимая во внимание возможности присутствия анизотропии, магнитной гиротропии и поглощения.

Для плоских монохроматических волн уравнения Максвелла принимают форму [92]

$$\mathbf{D} = -n[\mathbf{n}, \mathbf{H}], \quad \mathbf{B} = n[\mathbf{n}, \mathbf{E}], \quad (2.8.2)$$

где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали собственных волн,  $n$  – показатель преломления. Исключая векторные амплитуды  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$ , мы получаем волновое уравнение

$$- \mathbf{n}^\times \varepsilon^{-1} \mathbf{n}^\times \mu^{-1} \mathbf{B}_\pm = \mathbf{B}_\pm / n_\pm^2 \quad (2.8.3)$$

относительно векторов магнитной индукции  $\mathbf{B}_\pm$  двух изонормальных собственных мод. Здесь  $\mathbf{n}^\times$  – антисимметричный тензор ранга 2, дуальный к вектору  $\mathbf{n}$ , а нижние индексы ( $\pm$ ) характеризуют две изонормальные собственные моды. Аналогично можно получить уравнение относительно векторов магнитного поля  $\mathbf{H}_\pm$ :

$$- \mu^{-1} \mathbf{n}^\times \varepsilon^{-1} \mathbf{n}^\times \mathbf{H}_\mp = \mathbf{H}_\mp / n_\mp^2. \quad (2.8.4)$$

Принцип симметрии кинетических коэффициентов (или соотношения взаимности Онзагера) для магнитоупорядоченных сред [8, 120] накладывает ограничения (1.2.18) на тензоры  $\varepsilon$  и  $\mu$ :

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon}, \quad \mu = \tilde{\mu}. \quad (2.8.5)$$

Здесь и далее тильда сверху означает транспонирование матрицы, а подчеркивание снизу представляет соответствующие амплитуды в средах с обращенным знаком магнитной структуры кристалла. Для кристаллического домена с обращенной намагниченностью уравнение (2.8.4) принимает форму

$$- \underline{\mu}^{-1} \mathbf{n}^\times \underline{\varepsilon}^{-1} \mathbf{n}^\times \underline{\mathbf{H}}_\mp = \underline{\mathbf{B}}_\mp / \underline{n}_\mp^2. \quad (2.8.6)$$

Обобщая подход [16] умножим уравнение (2.8.6) на  $\mathbf{B}_\pm$ . После простого преобразования и учета (2.8.5) получаем

$$- \underline{\mathbf{H}}_\pm \mathbf{n}^\times \varepsilon^{-1} \mathbf{n}^\times \mu^{-1} \mathbf{B}_\pm = \underline{\mathbf{H}}_\mp \mathbf{B}_\pm / n_\mp^2 \quad (2.8.7)$$

Умножая (2.8.3) скалярно на  $\underline{\mathbf{H}}_\mp$  и вычитая из (2.8.7) мы приходим к скалярному уравнению

$$(n_{\pm}^{-2} - n_{\mp}^{-2})\mathbf{B}_{\pm}\mathbf{H}_{\mp} = 0 \quad (2.8.8)$$

Отсюда, полагая, что  $n_{\pm} - n_{\mp} \neq 0$ , находим одну пару соотношений биортогональности для изонормальных собственных волн,

$$\mathbf{B}_{\pm}\mathbf{H}_{\mp} = 0. \quad (2.8.9)$$

Из (2.8.2) и (2.8.9) следует, что векторы различных изонормальных волн, соответствующих противоположно намагниченным доменам, параллельны друг другу:

$$\mathbf{B}_{\pm} \parallel \mathbf{D}_{\mp}, \quad \mathbf{H}_{\tau\pm} \parallel \mathbf{E}_{\tau\mp}. \quad (2.8.10)$$

Здесь индекс  $\tau$  означает тангенциальные (поперечные) компоненты векторов поля. Учитывая (2.8.1) и (2.8.2) из (2.8.9) и (2.8.10) можно вывести дополнительные соотношения биортогональности [175]:

$$\mathbf{D}_{\pm}\mathbf{E}_{\mp} = 0; \quad \mathbf{D}_{\mp}\varepsilon^{-1}\mathbf{D}_{\pm} = 0; \quad \mathbf{H}_{\pm}\mu\mathbf{H}_{\mp} = 0; \quad \mathbf{B}_{\mp}\mu^{-1}\mathbf{B}_{\pm} = 0; \quad \mathbf{H}_{\pm}\mu\mathbf{H}_{\mp} = 0. \quad (2.8.11)$$

Таким образом, мы получили шесть скалярных соотношений биортогональности, связывающих векторы поляризации различных типов собственных волн, которые могут существовать вдоль произвольного направления распространения  $\mathbf{n}$ . Они эквивалентны векторным соотношениям (2.8.10).

Найденные соотношения биортогональности имеют простой физический смысл и связывают векторы поляризации различных собственных волн в двух противоположно намагниченных кристаллических доменах. Выражения (2.8.9)-(2.8.11) обобщают соотношения биортогональности (2.2.2)

$$\mathbf{D}_{\pm}\mathbf{E}_{\mp} = 0; \quad \mathbf{D}_{\pm}\mathbf{D}_{\mp} = 0; \quad \mathbf{H}_{\pm}\mathbf{z}_{\mp} = 0, \quad (2.8.12)$$

полученные прежде [153] для сред с  $\mu = l$ .

В прозрачных средах  $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}^*$ ,  $\mu = \tilde{\mu}^*$ , тогда все величины в соотношениях биортогональности (2.8.9)-(2.8.11), относящиеся к противоположно намагниченным доменам, переходят в комплексно сопряженные:

$$\mathbf{B}_{\pm}\mathbf{H}_{\mp}^* = \mathbf{D}_{\pm}\mathbf{E}_{\mp}^* = 0; \quad \mathbf{B}_{\pm} \parallel \mathbf{D}_{\mp}^*; \quad \mathbf{H}_{\pm} \parallel \mathbf{E}_{\tau\mp}^*; \quad (2.8.13)$$

и, когда  $\mu = l$ , редуцируются к уже известным [8]:

$$\mathbf{D}_{\pm}\mathbf{D}_{\mp}^* = \mathbf{H}_{\pm}\mathbf{H}_{\mp}^* = 0. \quad (2.8.14)$$

Отметим также, что соотношения биортогональности, полученные для собственных волн в бианизотропных средах, являются следствием принципа Онзагера. Они упрощают вычисления и могут быть полезны при решении граничных задач, например в многодоменных слоистых структурах. Действительно, тангенциальные компоненты векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  собственных волн на границе двух магнитных областей связаны простыми соотношениями (2.8.10).

Таким образом, обсуждена симметрия и установлены [175] соотношения биортогональности для векторов электромагнитных собственных волн в бианизотропных поглощающих магнитных и немагнитных средах.

## 2.9 Новые формы уравнения нормалей для бианизотропных сред

При решении задач наклонного падения и отражения света на границе раздела двух сред обычно приходится из уравнений нормалей определять нормальные составляющие  $x_i$  векторов рефракции [92]

$$\mathbf{m}_i = \mathbf{b} + x_i \mathbf{q}, \quad (i=1,2,3,4). \quad (2.9.1)$$

В ряде случаев (для изотропных сред, одно- и двуосных кристаллов, при совпадении плоскости падения света с плоскостью симметрии кристалла) уравнение нормалей разлагается на два множителя, что позволяет легко его решить. Однако при переходе к низкосимметричным двуосным, а также гиротропным кристаллам уравнение нормалей становится, вообще говоря, полным уравнением четвертой степени относительно компонент, что создает известные математические затруднения для аналитического решения. Поэтому Федоровым [92] для немагнитных сред была предложена итерационная методика расчета векторов рефракции отраженных и преломленных волн, использующая малость анизотропии.

Затем в работе [176] получена новая ковариантная форма уравнения нормалей для анизотропных сред, характеризуемых симметричным тензором  $\varepsilon$ , и на ее основе предложен другой, более эффективный метод расчета коэффициентов.

Плодотворная идея работы [176] целесообразности выделения в уравнении нормалей двух множителей, дающих приближенные значения корней, может быть реализована различными путями.

Эту идею мы модифицируем и применим к бианизотропным средам, которые характеризуются уравнениями связи  $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$  (1.2.24), описываемыми, например, оптические явления многих магнетиков в ИК-области. Тензор  $\tau$ , входящий в уравнение нормалей [16]

$$|I + \tau| = 0, \quad \tau = \mu^{-1} \mathbf{m}^* \varepsilon^{-1} \mathbf{m}^*, \quad (2.9.2)$$

представим в ортонормированном базисе  $\{\mathbf{a}_i = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|; [\mathbf{n}\mathbf{a}_i]; \mathbf{n}\}$ , связанном с плоскостью падения света на кристалл и физически выделенном. Здесь  $\mathbf{a} = [\mathbf{m}\mathbf{q}]$  [92]. После преобразований получаем уравнение нормалей (2.9.2) в форме [177]

$$\begin{aligned} ([\mathbf{m}\mathbf{a}_i] \mu^{-1} \mathbf{m}^* \varepsilon^{-1} \mathbf{a}_i - I)(\mathbf{a}_i \mu^{-1} \mathbf{m}^* \varepsilon^{-1} \mathbf{a}_i^* \mathbf{m}) = \\ = (\mathbf{a}_i \mu^{-1} \mathbf{m}^* \varepsilon^{-1} \mathbf{a}_i)(\mathbf{m}\mathbf{a}_i^* \mu^{-1} \mathbf{m}^* \varepsilon^{-1} \mathbf{a}_i^* \mathbf{m}), \end{aligned} \quad (2.9.3)$$

которое при  $\mu=1$  несколько упрощается и для  $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$  совпадает с (13) из [176]. Если плоскость падения света является плоскостью симметрии кристалла, т.е.  $\mathbf{a}_1$  – собственный вектор тензоров  $\varepsilon$  и  $\mu$ , тогда правая часть (2.9.3) обращается в нуль и (2.9.3) разлагается на множители точно.

Применяя иные преобразования, уравнение (2.9.2) можно представить также в виде [177]

$$(\mathbf{a}_k \mathbf{m} \tilde{\mu}^{-1} \mathbf{m} + I)(\mathbf{m} \tilde{\varepsilon}^{-1} \mathbf{m} - a_k) = \mathbf{m} \overline{(\gamma - a_k)} \tilde{\mu}^{-1} \mathbf{m}, \quad (2.9.4)$$

где  $a_k$  – некоторое собственное значение тензора, т.е.

$$(\gamma - a_k) \mathbf{u}_k = 0. \quad (2.9.5)$$

Если тензор  $\gamma = \tilde{\mu} \varepsilon^{-1}$  имеет двукратное собственное значение  $a_k$ , тогда, как известно [16],  $\overline{(\gamma - a_k)} = 0$ , и поэтому для одноосных кристаллов уравнение (2.8.4) представляет собой произведение двух квадратных трехчленов (для каждой из собственных волн).

Если же плоскость падения света является плоскостью симметрии кристалла, то удобнее всего в (2.9.4) взять  $a_k$ , соответствующее собственному вектору  $\mathbf{u}_k = \mathbf{a}_1$ . Тогда  $\mathbf{m} \overline{(\gamma - a_k)} = 0$  и снова (2.9.4) раскладывается на множители точно.

Найденные формы уравнения нормалей (2.9.3), (2.9.4) имеют аналогичную структуру. Их правые части  $g(x)$  являются величинами второго порядка малости по анизотропии и гиротропии. Левые же их части представляют собой произведение двух сомножителей – двух квадратных относительно  $x$  уравнений, определяющих нулевые приближения для искомых корней  $x^\circ$  ( $i=1,2,3,4$ ). Эти приближения эквивалентны приближениям плоскости симметрии и одноосного кристалла соответственно. Поэтому (2.9.3), (2.9.4) можно представить в форме [176]

$$f(x) = (x - x_1^\circ)(x - x_2^\circ)(x + x_3^\circ)(x + x_4^\circ) - g(x) = 0, \quad (2.9.6)$$

где  $x^\circ$  – корни нулевых приближений, причем  $x_i^\circ \geq 0$ . Сейчас два корня легко вычисляются по следующей итерационной формуле

$$x_{1,2} = \varphi(x) = \frac{x_1^\circ + x_2^\circ}{2} \pm \left[ \left( \frac{x_1^\circ - x_2^\circ}{2} \right)^2 + \frac{g(x)}{(x + x_3^\circ) + (x + x_4^\circ)} \right]^{1/2}, \quad (2.9.7)$$

аналогичной формуле, предложенной нами ранее в [177, 178]. Оставшиеся два корня  $x_3, x_4$  вычисляем аналогично.

Согласно [180], для итерационной формулы  $x = \varphi(x)$  соотношением

$$C = \lim_{x^{(n)} \rightarrow x} |x^{(n+1)} - x| / |x^{(n)} - x|^p \quad (2.9.8)$$

вводятся порядок сходимости  $p$  и компонента асимптотики погрешности  $C$ .

Итерационная формула касательных Ньютона для однократных корней обладает [180] квадратичной сходимостью ( $p=2$ ). Однако уравнение нормалей имеет, как известно, или кратные корни, или близкие к ним, поэтому хорошо эта известная схема касательных Ньютона [180] для кратных корней обладает линейной ( $p=1$ ), очень медленной ( $C=0.5$ ) сходимостью. Иначе дело обстоит в отношении итерационной формулы (2.9.7). Пусть параметр  $\alpha$  характеризует анизотропию кристалла. Тогда  $g(x) \sim \alpha^2$ ,  $\varphi(x) \sim \alpha^2$  и константа асимптотики погрешности итерационной схемы (2.9.7), независимо от кратности корня, по порядку величины равна

$$C = \partial\varphi / \partial x = \varphi'(x) \sim \alpha. \quad (2.9.9)$$

Поскольку  $|\alpha| \ll 1$ , то итерационная формула (2.9.7) обладает линейной ( $p=1$ ), но быстрой ( $C \ll 1$ ) сходимостью. Если  $\alpha \sim 10^{-3}$ , тогда каждая итерация по (2.9.7) дает 3 новых десятичных знака корня. Применяя (2.9.7) вместо формулы касательных при вычислении кратного корня, мы резко ускоряем сходимость в  $k = -\ln \alpha / \ln 2$  раз. Так, при  $\alpha \sim 10^{-2} \div 10^{-3}$  получаем  $k \approx 7 \div 10$ .

Существенно также то, что сходимость подхода (2.9.7) остается прежней вблизи угла полного внутреннего отражения, когда некоторые из корней  $x_i \rightarrow 0$ . Наконец, если имеются нулевые корни, то  $g(x) = 0$  и все корни определяются сразу.

Отметим также, что данный подход сохраняет силу при наличии поглощения и далее будет обобщен на кристаллы других типов с учетом возможных явлений оптической активности и магнитоэлектрического эффекта.

Таким образом, были предложены [177] новые (2.9.3), (2.9.4) формы уравнения нормалей для бианизотропных сред, позволяющие применить простую методику (2.9.7) их решения, обладающую быстрой линейной сходимостью и в случаях кратных корней.

## 2.10 Волны в нецентросимметричных магнетиках

В предыдущих разделах мы рассматривали электромагнитные волны в кристаллах, в которых магнитная гиротропия, определяемая антисимметричными частями тензоров  $\mu$  и  $\varepsilon$ , вызывалась магнитной структурой или внешним магнитным полем. Большинство экспериментально исследованных кристаллов, обладающих упорядоченной магнитной структурой, являются центросимметричными и в силу этого обстоятельства естественная гиротропия в них запрещена симметрией. Поэтому использование материальных уравнений (1.2.25) или (1.2.26), не учитывающих возможностей существования оптической активности, в большинстве случаев вполне приемлемо. Вместе с тем известен целый ряд магнетиков [10, 11, 181, 12, 13, 182], которые в парамагнитном состоянии являются нецентросимметричными и тем самым потенциально оптически активными. Кроме того, центр инверсии может теряться при магнитных фазовых переходах. При одновременном наличии магнитной структуры и отсутствии центра

инверсии вращение плоскости поляризации света по мере прохождения света через кристалл может вызываться обоими факторами одновременно. Это приводит, как будет показано далее, к ряду качественно новых интересных особенностей в закономерностях распространения излучения в таких средах.

Нецентросимметричные среды с магнитной структурой [10, 11], в частности магнитные "кубические" борациты, где вся анизотропия и гиротропия индуцируется электрическим и магнитным упорядочением, могут обладать разнообразными оптическими свойствами. Первые систематические кристаллооптические исследования магнитных "кубических" и других борацитов были начаты швейцарским исследователем Г. Шмидом [183], который затем внес большой вклад в изучение их магнитооптических свойств [40, 81].

Естественная оптическая активность в кристаллах, которые ниже температур соответствующих фазовых переходов становятся магнитоупорядоченными, экспериментально исследовалась в бораците  $Cu-Cl$  [184], в  $BaMnF_4$  [185], в гексагональном кристалле  $CsCuCl_3$  [186, 18] и других. Многие магнетики являются достаточно прозрачными и могут поэтому представлять интерес и как потенциальные гиротропные среды. К ним относятся  $Ni-Cl$  борацит ( $Ni_3B_7O_{13}Cl$ ) при температуре ниже 9К, бледно-зеленый прозрачный борацит  $Ni-I$  при  $T < 64K$ , прозрачный (розовый) кристалл  $BaMnF_4$  при  $T < 25K$  и другие [10, 11].

К сожалению, специального экспериментального разделения вращения плоскости поляризации на вращение, вызванное эффектом Фарадея, и вращение, обусловливаемое естественной оптической активностью, в магнетиках, по видимому, пока еще не проводилось. Нет сомнения, однако, в том, что в некоторых кристаллах оба эти эффекта сравнимы по величине; следовательно, необходима и соответствующая теория.

Большинство нецентросимметричных магнетиков обладают одновременно упорядоченными магнитной и электрической структурами [10, 11, 12, 13] и называются поэтому сегнетомагнетиками. Однако широкие экспериментальные исследования сегнетомагнетиков во многом сдерживаются сложностью и разнообразием их физических свойств и, вследствие этого, слабой разработанностью теоретического описания их магнитных и оптических свойств.

В связи с этим исследуем некоторые особенности уравнения нормалей и поляризации собственных волн в кристаллах, обладающих эффектом Фарадея и естественной оптической активностью. Но предварительно обсудим симметрию материальных уравнений и проведем классификацию кристаллооптических явлений в таких неограниченных средах.

Будем базироваться на материальных уравнениях общего вида [16] (1.2.20)

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \mathbf{D} + \boldsymbol{\alpha} \mathbf{H} , \quad \mathbf{B} = \boldsymbol{\mu} \mathbf{H} + \boldsymbol{\beta} \mathbf{D} , \quad (2.10.1)$$

где вследствие частотной и пространственной дисперсии все тензоры могут зависеть от частоты  $\omega$  и волнового вектора  $\mathbf{k}$ .

Исключая из (2.10.1) и уравнений Максвелла (2.1.3) векторы  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$  получаем волновое уравнение

$$\theta \mathbf{H} = 0, \quad \theta = \mu + \mathbf{m}^\times \varepsilon^{-1} \mathbf{m}^\times - (\mathbf{m}^\times \alpha + \beta \mathbf{m}^\times), \quad (2.10.2)$$

характеризующие плоские монохроматические волны типа (1.2.13) в линейных средах.

Разложим комплексные параметры  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  на  $i$ - и  $c$ -тензоры. По определению, компоненты  $c$ -тензора под действием операции обращения магнитной структуры  $\underline{I}$  изменяют свои знаки на противоположные, а компоненты  $i$ -тензора остаются неизменными. Из обобщенного принципа Онзагера следует (1.2.23), что [120]  $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$ ,  $\mu = \tilde{\mu}$ ,  $\alpha = \tilde{\beta}$ . В областях прозрачности  $\varepsilon = \varepsilon^+$ ,  $\mu = \mu^+$ ,  $\alpha = -\beta^+$ .

Поэтому можно записать, что

$$\varepsilon^{-1} = \chi + i\mathbf{G}^\times, \quad \mu = \eta - i\mathbf{g}^\times, \quad \alpha = \alpha_{m\varepsilon} + i\alpha_{oa}, \quad \beta = -\tilde{\alpha}_{m\varepsilon} + i\tilde{\alpha}_{oa}, \quad (2.10.3)$$

где  $\chi = \tilde{\chi}$ ,  $\eta = \tilde{\eta}$ ,  $\alpha_{oa}$  –  $i$ -тензоры, а  $\alpha_{m\varepsilon}$ ,  $\mathbf{G}^\times$ ,  $\mathbf{g}^\times$  –  $c$ -тензоры 2 ранга, вообще говоря, комплексные. Мнимая единица  $i = \sqrt{-1}$  в (2.10.3) выделена для удобства так, чтобы в отсутствие диссипации энергии все материальные тензоры становились вещественными.

С учетом (2.10.3) оператор  $\theta$  в (2.10.2) приобретает вид

$$\theta = \theta^s - i\mathbf{Q}^\times \quad \theta^s = \eta + \mathbf{m}^\times \chi \mathbf{m}^\times - (\mathbf{m}^\times \alpha_{m\varepsilon} - \tilde{\alpha}_{m\varepsilon} \mathbf{m}^\times), \quad (2.10.4)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{nG} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{g} + \mathbf{g}_{oa} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{g}_{oa} = [(\alpha_{oa})_c - \tilde{\alpha}_{oa}] \mathbf{n}. \quad (2.10.5)$$

Здесь  $\theta^s = \tilde{\theta}^s$  – тензор, в который дают вклады симметричные части  $\chi$ ,  $\eta$  тензоров  $\varepsilon^{-1}$ ,  $\mu$  и тензор  $\alpha_{m\varepsilon}$ , описывающий магнитоэлектрический эффект. Выделен также общий вектор гирации  $\mathbf{Q}$ , в который вносят вклады антисимметричные части тензоров  $\varepsilon^{-1}$ ,  $\mu$  и тензор естественной оптической активности  $\alpha_{oa}$ .

Анализируя симметричные свойства оператора  $\theta$ , можем провести классификацию основных кристаллооптических явлений в линейных неограниченных средах.

Тензоры  $\chi$  и  $\eta$  – симметричные полярные  $i$ -тензоры 2 ранга. Изотропные составляющие их вносят вклад в средние показатели преломления и поглощения собственных волн, а анизотропные составляющие – в анизотропию комплексных показателей преломления, т.е. в линейное двупреломление и линейный дихроизм. Векторы гирации  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{g}$ , дуальные антисимметричным частям тензоров  $\varepsilon^{-1}$  и  $\mu$  соответственно, являются аксиальными  $c$ -векторами и приводят к магнитному невзаимному вращению плоскости поляризации – к эффекту Фарадея, а при наличии поглощения – и к магнитному циркулярному дихроизму. Части параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , инвариантные относительно операции  $\underline{I}$ , характеризуются несимметричным аксиальным  $i$ -тензором 2 ранга  $\alpha_{oa}$ , который описывает естественную оптическую активность и ей соответствующий циркулярный дихроизм. Совершенно новые явления, отсутствующие в классической кристаллооптике, характеризует несимметричный аксиальный  $c$ -тензор 2 ранга  $\alpha_{m\varepsilon}$ .

Его вещественная часть  $\alpha'_{мэ}$  дает вклад в показатели преломления и может приводить к невзаимному магнитному линейному двупреломлению или магнитоэлектрическому эффекту на оптических частотах, а  $\alpha''_{мэ}$  – к соответствующему невзаимному магнитному линейному дихроизму.

Результаты анализа сведем в таблицу 2. Она представляет собой обобщение классификации [136] на случаи линейных поглощающих сред. Как видим, каждый материальный тензор в линейных уравнениях связи (2.10.1) ответственен за тот или иной оптический или магнитооптический эффект. Линейное двупреломление и линейный дихроизм наблюдаются во всех неизотропных средах. В нецентросимметричных кристаллах возможны также явления оптической активности и циркулярного дихроизма, в магнетиках – наличие эффекта Фарадея и магнитного циркулярного дихроизма. Наконец, в нецентросимметричных магнетиках, кроме всех этих явлений, возможны еще принципиально новые: магнитоэлектрический эффект и магнитный линейный дихроизм.

**Таблица 2 – Основные кристаллооптические явления в неограниченных линейных средах**

№ п/п	Тензор	Симметрия по перестановке индексов	Симметрия относительно $\underline{l}$	Симметрия относительно $\bar{l}$	Кристаллооптические явления
1	$\chi', \eta'$	есть	есть	есть	линейное двупреломление
2	$\chi'', \eta''$	есть	есть	есть	линейный дихроизм
3	$G'^{\times}, g'$	нет	нет	есть	магнитный циркулярный дихроизм
4	$G''^{\times}, g''$	нет	нет	есть	эффект Фарадея
5	$\alpha'_{oa}$	нет	есть	нет	оптическая активность
6	$\alpha''_{oa}$	нет	есть	нет	циркулярный дихроизм
7	$\alpha'_{мэ}$	нет	нет	нет	оптический магнитоэлектрический эффект
8	$\alpha''_{мэ}$	нет	нет	нет	магнитный линейный дихроизм

В прозрачных средах мнимые ( $\chi'', \eta'', G'', g'', \alpha''_{мэ}, \alpha''_{oa}$ ) части материальных тензоров обращаются в нуль и исчезают соответствующие им явления поглощения и дихроизма.

Магнитоэлектрический эффект обычно проявляется как возникновение магнитной поляризации в средах (магнитоэлектриках) при приложении внешнего постоянного или низкочастотного электрического поля и экспериментально исследовался неоднократно [10, 11, 181]. Наряду с прямым возможен также и обратный магнитоэлектрический эффект. Следует ожидать проявления спонтанного магнитоэлектрического эффекта и в оптическом диапазоне частот [118, 10], хотя экспериментальные данные по магнитоэлектрическому эффекту на оптических частотах еще недостаточны. Так, известна работа [230], авторы которой трактуют результаты своего эксперимента в антиферромагнитной фазе кристалла  $RbNiCl_3$  в пользу наблюдения спонтанного магнитоэлектрического эффекта в оптическом диапазоне частот, однако такая интерпретация сомнительна. С другой стороны, индуцируемый внешним магнитным полем магнитоэлектрический эффект, приводящий к невзаимному линейному двупреломлению света, наблюдался в кристаллах  $\alpha-LiIO_3$  и  $KDP$  [188-190]. Своеобразное проявление магнитоэлектрического эффекта было обнаружено также в [191, 192], где в кристаллах  $Cr_2O_3$  регистрировалось фарадеевское вращение плоскости поляризации света, индуцируемое внешним электрическим полем (т.н. электрический эффект Фарадея). Недавно сообщалось [88, 89], что в полярном ферримагнетике  $GdFeO_3$  при приложении магнитного поля наблюдалось изменение оптического поглощения и изменение двупреломления при обращении направления распространения света в нем. Авторы называют эти явления проявлением оптического магнитоэлектрического эффекта.

Аксиальный  $c$ -тензор 2 ранга  $\alpha_{ik}$ , описывающий магнитоэлектрический эффект, инвариантен относительно  $\bar{I}'$ . Кристаллы, в состав точечных групп симметрии которых входит комбинированная операция  $\bar{I}'$ , называются центроантисимметричными. Поэтому в таких кристаллах разрешен магнитоэлектрический эффект. Действительно, классический магнитоэлектрический эффект наблюдался [24] в кристаллах трирутила  $Fe_2TeO_6$  ( $T_N=219K$ , магнитная симметрия –  $4_2/m'm'm'$ ), в  $Cr_2TeO_6$  ( $T_N=105K$ , симметрия –  $m'mm$ ). К центроантисимметричным антиферромагнетикам также относятся ортофосфаты лития  $LiMPO_4$  ( $M=Mn, Ni, Co$ ), которые обладают [24] магнитной симметрией соответственно  $m'm'm'$ ,  $mm'm$ ,  $mmm'$ . Отметим еще кристаллы  $V_2WO_6$  и  $Cr_2WO_6$  (симметрия –  $m'mm$ ). Магнитоэлектрический эффект возможен [24] также в фосфатах ( $DyPO_4$  и др.) и ванадатах ( $GdVO_4$  и др.) редких земель. При низких температурах ( $T_N \sim 3K$ ) в ортоалюминатах  $GdAlO_3$ ,  $DyAlO_3$ ,  $TbAlO_3$  (симметрия –  $m'mm$ ) также был зарегистрирован магнитоэлектрический эффект.

Понятно, что во всех средах, где регистрировался обычный магнитоэлектрический эффект, возможно проявление также и магнитоэлектрического эффекта на оптических частотах.

Вместо (2.10.1), (2.10.3) для описания оптических явлений в магнитоупорядоченных кристаллах можно было бы пользоваться также материальными уравнениями вида (1.2.1).

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + i(\gamma \mathbf{k}) \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} . \quad (2.10.6)$$

При этом, как следует из принципа симметрии кинетических коэффициентов, материальные тензоры не обладают симметрией по индексам  $i$  и  $j$ :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^s + i\varepsilon_{ij}^a, \quad \gamma_{ijk} = \gamma_{ijk}^a + i\gamma_{ijk}^s, \quad (2.10.7)$$

где надстрочный индекс  $(a)s$  означает (анти)симметрию тензоров по перестановке индексов  $i$  и  $j$ . Здесь также выделена явно мнимая единица  $i$ , чтобы в недиссипативных средах  $i$ -тензоры  $\varepsilon^s$  и  $\gamma^a$  и  $s$ -тензоры  $\varepsilon^a$  и  $\gamma^s$  были вещественными. В поглощающих же средах симметричные и антисимметричные части тензоров  $\varepsilon$  и  $\gamma$  становятся, вообще говоря, комплексными. Их вещественные и мнимые части будем помечать, как и ранее, одним и двумя штрихами соответственно. Теперь можно записать классификацию основных оптических явлений в поглощающих магнитоупорядоченных кристаллах, выражающихся через тензоры  $\varepsilon$  и  $\gamma$  в (2.10.6).

Обычные  $i$ -тензоры  $\varepsilon^{s'}$  и  $\gamma^{a'}$  характеризуют соответственно обратимые линейное двупреломление и оптическую активность, а  $\varepsilon^{s''}$  и  $\gamma^{a''}$  – соответственно обратимые линейный дихроизм и циркулярный дихроизм. В то же время  $s$ -тензоры  $\varepsilon^{a'}$  и  $\gamma^{s'}$  описывают соответственно невзаимные циркулярное двупреломление (эффект Фарадея) и линейное двупреломление.  $\varepsilon^{a''}$  и  $\gamma^{s''}$  характеризуют соответственно невзаимные магнитный циркулярный дихроизм и магнитный линейный дихроизм. Перечень основных оптических явлений для прозрачных сред приведен в [117], на поглощающие среды эти результаты были обобщены в обзоре [54].

Невзаимное линейное двупреломление, представляемое тензором 3 ранга  $\gamma^{s'}$ , введенное впервые в [117], было названо гиротропным двупреломлением. Затем в [118] было показано, что гиротропное двупреломление определяется пространственной дисперсией электрических, магнитных и перекрестных, т.е. магнитоэлектрических свойств среды. Тензор  $\gamma^{s'}$ , симметричный по перестановке двух индексов, в общем случае содержит 18 независимых из 27 компонент. 8 компонент из них описывают оптический магнитоэлектрический эффект, а 10 – квадрупольный вклад в электрическую поляризацию среды.

Взаимосвязи между подходами (2.10.1) и (1.2.1) затем обсуждалась в литературе [121, 95, 16]. Не останавливаясь подробнее на этом вопросе, мы отметим только, что, наряду с достоинствами (простотой), материальные уравнения (1.2.1) обладают и определенными недостатками. Основной из них – при использовании (1.2.1) для сред с пространственной дисперсией нужно менять стандартные граничные условия для векторов поля, о чем впервые сказано в работах [118, 95]. Кроме того, в частности, уравнения (1.2.1) не могут описывать магнитоэлектрический эффект в статических полях. Наконец, уравнения (2.10.1) имеют одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчета, что позволяет их записать в ковариантном 4-виде (1.3.18). Этого нельзя сказать об уравнениях (1.2.1). Поэтому далее мы будем пользоваться линейными материальными уравнениями связи (2.10.1).

Отметим, что в настоящее время детально разработана теория распространения света в оптически активных немагнитных средах [21, 16, 18, 19], кри-

сталлооптические свойства бианизотропных магнетиков без оптической активности и магнитоэлектрического эффекта рассматривались в [16, 157, 193]. Ряд вопросов распространения излучения в различных линейных средах обсуждались также в работах [10, 191, 192, 194, 195].

Возвратимся теперь снова к волновому уравнению (2.10.2) и обсудим вопросы вычисления показателей преломления и поляризации собственных волн в линейных средах на его основе.

Вычисляя инвариантным методом  $\det\theta \equiv |\theta|$ , после преобразований находим уравнение нормалей

$$|u| = a_4 n^4 + a_3 n^3 + a_2 n^2 + a_1 n + a_0 = 0. \quad (2.10.6)$$

Здесь выделен явно показатель преломления  $n$  в векторах рефракции  $\mathbf{m} = n\mathbf{n}$ ; коэффициенты  $a_i$  равны [179]:

$$\begin{aligned} a_0 &= |\mu|, \quad a_1 = -(\gamma\bar{\mu})_c, \\ a_2 &= (\mathbf{n}^\times \varepsilon^{-1} \mathbf{n}^\times \bar{\mu})_c + \mathbf{n} \mu \bar{\alpha} \mathbf{n} + \mathbf{n} \bar{\beta} \mu \mathbf{n} + \{\mathbf{n}^\times \alpha \bar{\mu} [(\beta \mathbf{n}^\times \mu^{-1})_c - \beta \mathbf{n}^\times \mu^{-1}]\}_c, \\ a_3 &= [\mathbf{n}^\times \varepsilon^{-1} \mathbf{n}^\times \bar{\mu} (\gamma \mu^{-1} - (\gamma \mu^{-1})_c)]_c - \mathbf{n} \beta \mathbf{n}^\times \bar{\alpha} \mathbf{n} - \mathbf{n} \bar{\beta} \mathbf{n}^\times \bar{\alpha} \mathbf{n}, \\ a_4 &= \mathbf{n} \bar{\varepsilon}^{-1} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \mu \mathbf{n} + [\mathbf{n}, \alpha \mathbf{n}] \varepsilon^{-1} [\mathbf{n} \beta, \mathbf{n}] \quad \gamma = \mathbf{n}^\times \alpha + \beta \mathbf{n}^\times. \end{aligned} \quad (2.10.7)$$

Как видим, получили полное уравнение четвертой степени относительно показателей преломления собственных волн  $n$ . Два корня соответствуют световым волнам, движущимся в одном направлении, два остальные – в противоположном. Присутствие коэффициентов  $a_1$  и  $a_3$  означает невзаимность распространения света. Эта невзаимность исчезает, а уравнение нормалей (2.10.6) сводится к биквадратному в следующих основных случаях: а)  $\alpha = \beta = 0$ , т.е. в средах без магнитоэлектрического эффекта и оптической активности; б) при отсутствии магнитной структуры, т.е. когда  $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$ ,  $\mu = \tilde{\mu}$ ,  $\alpha = \tilde{\beta}$ .

Уравнение же нормалей относительно нормальных  $x_i$  компонент векторов рефракции  $\mathbf{m}_i = \mathbf{b} + x_i \mathbf{q}$  проще всего получить из (2.10.6), (2.10.7) следующей [179] перенормировкой параметров:

$$\alpha \rightarrow \alpha_n = \alpha - \varepsilon^{-1} \mathbf{b}^\times, \quad \beta \rightarrow \beta_n = \beta - \mathbf{b}^\times \varepsilon^{-1}, \quad \mu \rightarrow \mu_n = -\mathbf{b}^\times \alpha - \beta \mathbf{b}^\times + \mu. \quad (2.10.8)$$

При этом наклонное распространение света относительно границ раздела сред формально сводится к нормальному падению.

Как и для бианизотропных сред, физически выделенным является базис  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \{\mathbf{a}_1, [\mathbf{q}\mathbf{e}_1], \mathbf{q}\}$ , где  $\mathbf{q}$  – нормаль к границе раздела. Оценки показывают, что в этой системе координат диагональные компоненты  $\theta_{ii}$  оператора  $\theta$  – порядка единицы, тогда как недиагональные  $\theta_{ij}$  ( $i \neq j$ ) – порядка анизотропии и/или гиротропии. Учитывая это, представим уравнение нормалей  $|\theta| = 0$  в форме [179]

$$\theta_{11} \theta_{22} = \theta_{11} \theta_{22} - |\theta| / \theta_{33} \equiv g, \quad (2.10.9)$$

удобной для решения методом итераций, так как  $g$  – порядка квадрата анизотропии, а компоненты  $\theta_{11}$ ,  $\theta_{22}$  являются квадратными трехчленами относительно  $x_i$ .

Другие итерационные методы решения уравнений нормалей типа (2.10.6) обсудим в следующем параграфе, а сейчас перейдем к поляризации собственных волн. Так как в (2.10.2)  $|\theta| = 0$ , то

$$\mathbf{H} \parallel \bar{\theta} \mathbf{f}, \quad (2.10.10)$$

где  $\mathbf{f}$  – некоторый произвольный вектор ( $\mathbf{f} \mathbf{n} = 0$ ). Явного выражения для  $\mathbf{H}$  не приводим из-за его громоздкости.

Теперь рассмотрим прозрачные магнитные кристаллы без магнитоэлектрического эффекта и с  $\mu = 1$ , т.е. среды, обладающие одновременно естественной (оптическая активность) и магнитной (эффект Фарадея) гиротропией. Уравнение нормалей (2.10.6) при этом упрощается:

$$(n^{-2} - n_+^{\circ -2})(n^{-2} - n_-^{\circ -2}) = (\mathbf{n} \mathbf{Q}_{\pm})^2 + [\mathbf{n} \mathbf{g}_{oa}](n^{-2} - \chi)[\mathbf{n} \mathbf{g}_{oa}]. \quad (2.10.11)$$

Возьмем в качестве  $\mathbf{f}$  в (2.10.10) векторы  $\mathbf{h}_{\pm}^{\circ}$  соответствующего волнового уравнения (2.6.5) без учета гиротропии. Тогда поперечные составляющие  $\mathbf{H}_{\pm}^{\perp}$  векторов  $\mathbf{H}_{\pm}$  собственных волн равны [196, 197]

$$\mathbf{H}_{\pm}^{\perp} = (n_{\pm}^{-2} - n_{\pm}^{\circ -2}) \mathbf{h}_{\pm}^{\circ} \pm i \mathbf{n} \mathbf{Q}_{\pm} \cdot \mathbf{h}_{\pm}^{\circ} + \mathbf{n}^{\times} \mathbf{n}^{\times} \mathbf{Q}_{\pm} \cdot \mathbf{Q}_{\pm} \mathbf{h}_{\pm}^{\circ} \cdot n_{\pm}^2. \quad (2.10.12)$$

Отметим следующие [178, 179] существенные отличия в поляризации собственных волн по сравнению с магнетиками без оптической активности.

**А.** Угол между главными осями эллипсов поляризации двух собственных волн не равен  $\pi/2$ , а отличается на малую величину  $\Delta\varphi \sim Q^2 / (n_+^{\circ} - n_-^{\circ})$ , где  $Q$  и  $n_+^{\circ}$ ,  $n_-^{\circ}$  – параметры гиротропии и анизотропии соответственно.

**Б.** В (2.10.12) последнее слагаемое справа значительно меньше остальных. Поэтому обычно с достаточной точностью можно считать, что [196]

$$\mathbf{H}_{\pm}^{\perp} = \mathbf{h}_{\pm}^{\circ} + i \gamma_{\pm} \mathbf{h}_{\pm}^{\circ}, \quad \gamma_{\pm} = \pm \mathbf{n} \mathbf{Q}_{\pm} / (n_{\pm}^{-2} - n_{\pm}^{\circ -2}). \quad (2.10.13)$$

Это означает, что эллиптичности  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$  собственных волн различны по величине и для большинства направлений в кристалле  $\gamma_{\pm} \sim \mathbf{n} \mathbf{Q} / (n_+^{\circ} + n_-^{\circ})$  [178]. Для немагнитных сред с оптической активностью аналогичный вывод был ранее сделан в [19, 16].

**В.** Вдоль линейных осей  $c_i$  (2.1.6) в кристаллах низших сингоний поляризация векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{D}$  не строго круговая, как иногда считают, а отличается от круговой на величину порядка  $Q$ , даже если не учитывать эффект Фарадея [178]. Аналогичный последнему результат был получен ранее для немагнитных кристаллов в [198]. Поскольку в (2.10.11) последний справа член значительно меньше  $(\mathbf{n} \mathbf{Q})^2$ , то, пренебрегая им, получаем уравнение нормалей (2.9.11) в простейшем виде [197]

$$(n_{\pm}^{-2} - n_{+}^{\circ-2})(n_{\pm}^{-2} - n_{-}^{\circ-2}) = (n\mathbf{Q}_{\pm})^2. \quad (2.10.14)$$

Отличие выражений (2.10.13), (2.10.14) от аналогичных, полученных ранее [150] для магнетиков без оптической активности, состоит в том, что теперь векторы  $\mathbf{Q}_{\pm}$  описывают одновременно естественную и магнитную гиротропию и зависят от  $n_{\pm}$ .

Как уже говорилось, гиротропия, вследствие ее слабости по сравнению с анизотропией, отчетливо проявляется обычно лишь вдоль и вблизи оптических осей  $c_i$ . Известны, однако, одноосные естественно активные кристаллы, в которых на некоторой частоте  $\omega_i$  тензор  $\chi$  становится изотропным, и гиротропия может проявляться в "чистом виде". В работе [199] проводилось теоретическое изучение явлений оптического вращения в таких  $\varepsilon$ -изотропных кристаллах, обладающих естественной оптической гиротропией и фарадеевским вращением плоскости поляризации (за счет внешнего магнитного поля  $\mathbf{h}$ ). В [199] нами также была отмечена возможность взаимной компенсации оптической активности и эффекта Фарадея, при которой кристалл должен вести себя как изотропная среда. Такая компенсация затем действительно наблюдалась в [200, 201].

В [199] предложен также метод измерения всех компонент тензора эффекта Фарадея  $\eta$  ( $\mathbf{G} = \eta \mathbf{h}$ ) в  $\varepsilon$ -изотропных кристаллах. Предсказано [199], что в кристаллах классов  $3, \bar{3}, 4, \bar{4}, 6, \bar{6}$  при взаимно перпендикулярных  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{h}$  и  $\mathbf{c}$  должен наблюдаться чисто поперечный эффект Фарадея, обусловленный только одним параметром  $\eta_3$ , характеризующим антисимметричную часть тензора  $\eta$ . Поперечный эффект Фарадея также обсуждался в [200] и затем экспериментально наблюдался [201] в кристалле  $CdGa_2S_4$  (класс  $\bar{4}$ ).

Итак, в данном разделе представлена симметричная классификация основных кристаллооптических явлений в неограниченных линейных средах. Предложено [179] уравнение нормалей (2.10.6), (2.10.7) в инвариантной форме. Для прозрачных магнетиков без магнитоэлектрического эффекта и с  $\mu = I$  найдены [196, 197] упрощенные выражения (2.9.13) и (2.9.14) для показателей преломления и поляризации волн.

В  $\varepsilon$ -изотропных кристаллах нами была отмечена [199] возможность взаимной компенсации естественной и магнитной гиротропии. Предсказан также [199] поперечный эффект Фарадея, обусловленный антисимметричной частью  $\eta$ .

Эти предсказанные явления получили затем экспериментальное подтверждение [200, 201].

## 2.11 Итерационные методы решения уравнения нормалей в линейных анизотропных и гиротропных средах

В кристаллооптике анизотропных и гиротропных сред важную роль играет уравнение нормалей для векторов рефракции собственных волн. Относительно нормальных  $x_i$  компонент векторов рефракции  $\mathbf{m}_i$  (2.9.1) уравнение

нормалей является, вообще говоря, полным уравнением четвертой степени вида [16, 92]

$$f(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0. \quad (2.11.1)$$

В простейшем случае изотропных сред коэффициенты  $a_1 = a_3 = 0$ , а корни уравнения (2.11.1)  $x_1 = x_2 = -x_3 = -x_4 = -x_0$ . При наличии же анизотропии и гиротропии, как правило, все  $a_i \neq 0$ . Решение полного уравнения 4 степени (2.11.1) может быть найдено в радикалах, однако ввиду громоздкости такого аналитического решения актуальной задачей остается поиск эффективных итерационных методов вычисления корней уравнения нормалей (2.11.1).

Прежде всего оценим порядки величин, входящих в (2.11.1). Коэффициенты  $a_1, a_3$  – порядка  $\alpha$ , что далее будем обозначать как  $x_i \sim 1$ ,  $a_1 \sim a_3 \sim \alpha$ . Обычно  $\alpha \sim 10^{-2} \div 10^{-5}$ , поэтому это обстоятельство естественно использовать. В предыдущем разделе мы реализовали идею о целесообразности выделения в уравнении нормалей двух множителей, дающих приближенные значения корней, для бианизотропных сред. Обобщим такой подход и распространим его на линейные анизотропные и гиротропные среды общего вида (2.11.1)

Путем тождественных преобразований, следуя [202], можно представить уравнение нормалей (2.11.1) в следующих формах:

$$(x^2 - \sqrt{a_0})(x^2 + a_3x - \sqrt{a_0}) = -(a_2 + 2\sqrt{a_0})x^2 - (a_1 + a_3\sqrt{a_0})x, \quad (2.11.2)$$

$$(x^2 + a_2/2)(x^2 + a_3x + a_2/2) = (a_3a_2/2 - a_1)x + a_2^2/4 - a_0, \quad (2.11.3)$$

$$(x^2 + a_3x/2 - \sqrt{a_0})^2 = (a_3^2/4 - 2\sqrt{a_0} - a_2)x^2 - (a_1 + a_3\sqrt{a_0})x, \quad (2.11.4)$$

$$(x^2 + (a_3x + a_2)/2)^2 = (a_3a_2/2 - a_1)x + (a_3^2x^2 + a_2^2)/4 - a_0. \quad (2.11.5)$$

Все четыре (2.11.2)-(2.11.5) найденные нами формы уравнения нормалей имеют одинаковую структуру, а именно:  $h(x) = g(x)$ . Левые части  $h(x)$  представляют собой произведение двух квадратных трехчленов. Можно непосредственно по теореме Виета убедиться, что правая часть  $g(x)$  каждого из уравнений (2.11.2)–(2.11.5) весьма мала, т.е.  $g \sim \alpha^2$ . Пусть корни функции  $h(x)$  равны ( $i=1, 2, 3, 4$ ), причем, тогда уравнение  $h(x) = g(x)$  можно представить в виде (2.9.6) и находить корни по итерационной формуле (2.9.7). Поскольку  $g(x) \sim \alpha^2$ ,  $g'(x) \sim \alpha^2$ , то  $\varphi'(x) \sim \alpha^2$ , т.е. итерационная формула (2.9.7) снова обладает обязательной быстрой сходимостью  $\sim \alpha$ , даже для кратных корней. В качестве начальных значений корней можно взять, например,  $\pm(a_0)^{1/4}$  или  $\pm(-a_2/2)^{1/2}$ .

Все корни общего уравнения нормалей (2.11.1) можно вычислить также по следующей итерационной формуле

$$x = \varphi(x) = x_0 - a_3/4 \pm [(x - x_0 + a_3/4)^2 - f(x)/(2a_2)]^{1/2}, \quad (2.11.6)$$

где  $x_0^2 = -a_2/2$ . Так как здесь  $\varphi'(x) \sim \alpha$ , то снова имеем быструю сходимость порядка  $\alpha$ .

Весьма эффективным является следующий подход. Согласно Феррари [203], решение уравнения 4 степени можно свести к решению кубического и двух квадратных уравнений. Анализ показывает, что корень кубической резольвенты уравнения (2.11.1) легко вычисляется по следующей [116] итерационной формуле

$$y_0^2 = [a_0 + c/b]^{1/2}, \quad (2.11.7)$$

обладающей быстрой линейной сходимостью  $\sim \alpha^2$ . Здесь, для краткости, введены обозначения

$$c = a_3 y_0^2 - a_1, \quad b = \pm [8y_0^2 + a_3^2 - 4a_2]^{1/2}. \quad (2.11.8)$$

Найдя параметр  $y_0^2$  по расчетной схеме (2.11.7), сразу можем определить все корни:

$$x = (b - a_3/4) \pm [(b - a_3/4)^2 + c/b - y_0^2]^{1/2}. \quad (2.11.9)$$

Нами осуществлялось численное моделирование решения уравнений нормалей 4 степени (2.11.1) с вещественными корнями по итерационной формуле (2.11.6), а также уравнения (2.11.5) по итерационной формуле (2.9.7). Даже при большой анизотропии кристалла уже пятая итерация всегда дает результат, независимо от кратности корней, с восьмью верными значащими цифрами.

Известно, что для кратных корней итерационной формуле касательных Ньютона и метод обратной квадратичной интерполяции [180] обладают очень медленной ( $C \sim 1/2$ ) сходимостью.

Численные расчеты показали, что даже итерационная формула  $x = x - f f' / [(f')^2 - f f'']$  [180], теоретически всегда обладающая квадратичной сходимостью, практически в случае кратных корней дает результат, в котором из 8-ми значащих цифр – только 4 верные.

Наилучшим показал себя метод (2.11.7) – (2.11.9), который дает практически точные значения всех четырех корней.

Таким образом, для линейных сред предложены [202] 4 новые формы уравнения нормалей (2.11.2)-(2.11.5), позволяющие использовать итерационной формуле (2.9.7) с быстрой сходимостью  $\sim \alpha$ . Найдены [116] также итерационной формуле (2.11.6) и (2.11.7), обладающие устойчивой сходимостью  $\sim \alpha$ ; и  $\sim \alpha^2$  соответственно, что подтвердили численные расчеты.

## 3 РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА В МАГНИТОУПОРЯДОЧЕННЫХ КРИСТАЛЛАХ

### 3.1 Тензоры показателей преломления и импедансов в линейных средах. Нормальное падение

Совместное проявление анизотропии, гиротропии (естественной и вынужденной), поглощения на особенности распространения собственных плоских монохроматических электромагнитных волн в немагнитных средах изучено в настоящее время с помощью эффективных прямых тензорных методов в теоретическом плане достаточно широко и изложено в фундаментальной монографии [16].

Как известно [8, 54, 50], оптические свойства магнитоупорядоченных кристаллов обычно достаточно хорошо приближенно описывают одним эффективным тензором диэлектрической проницаемости, полагая  $\mu=1$ . В радио- и СВЧ-диапазонах частот эти же кристаллы можно характеризовать тензорной магнитной проницаемостью  $\mu$  и скалярной  $\varepsilon$ . В промежуточных областях спектра, когда электро- и магнитодипольные переходы сравнимы по интенсивности,  $\varepsilon$  и  $\mu$  одновременно становятся тензорами, т.е. тогда такие среды являются, вообще говоря, бианизотропными. Например, бигиротропные оптические свойства проявляют многие ферриты-гранаты в ближней инфракрасной области спектра [54, 11, 55, 9, 128].

В нецентросимметричных магнетиках возможны также явления оптической активности и магнитоэлектрического эффекта. Отметим, что теоретическое изучение влияния магнитоэлектрического эффекта на оптические свойства кристаллов проводилось ранее в [136, 137, 195, 10], однако при этом не учитывались одновременно более ярко выраженные возможные явления фарадеевского вращения и естественной оптической активности. Поэтому необходимо дальнейшее изучение распространения света в линейных средах, обладающих всеми видами анизотропии, гиротропии и поглощения. Частично этот вопрос обсуждался нами в разделах 2.9 и 2.10, где инвариантным методом рассматривались собственные плоские гармонические волны. (Под собственной волной мы понимаем такую волну, поляризация которой не изменяется по мере распространения ее в безграничном однородном кристалле).

Понятие собственных волн является весьма полезным и играет большую роль в теоретической кристаллооптике. Вместе с тем часто целесообразно также использовать формализм, в котором сумма двух собственных монохроматических плоских волн в кристалле рассматривается как одна несобственная волна, поляризация которой уже зависит от  $z$  и непрерывно трансформируется с расстоянием.

В связи с этим в настоящем разделе с помощью операторных методов [16, 193, 135, 97, 98] изложим феноменологический подход к изучению несобственных плоских монохроматических световых волн в поглощающих нецентро-

симметричных магнитоупорядоченных кристаллах, обладающих также эффектом Фарадея, оптической активностью и магнитоэлектрическим эффектом.

Как и ранее, будем исходить из линейных материальных уравнений связи вида [179] (2.10.1). Исследуем сначала плосковолновые решения уравнений Максвелла, удовлетворяющие уравнениям связи (2.10.1) при нормальном распространении света к границам линейных однородных сред.

Будем полагать, что заданы тензорные характеристики  $\mu$ ,  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  сегнетомагнитной линейной среды и направление  $\mathbf{q}$  распространения света в ней, а необходимо рассчитать преобразование поляризации и амплитуды по мере прохождения световой волны через кристалл, т.е. решить прямую задачу кристаллооптики. Для электромагнитных несобственных изонормальных волн вида

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{F}(z) e^{-i\omega t}, \quad z = \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} \quad (3.1.1)$$

уравнения Максвелла принимают форму

$$\mathbf{q}^\times d\mathbf{H}/dz = -ik_0 \mathbf{D}, \quad \mathbf{q}^\times d\mathbf{E}/dz = -ik_0 \mathbf{B}, \quad k_0 = \omega / c. \quad (3.1.2)$$

В (3.1.1)  $\mathbf{F} = (\mathbf{H}, \mathbf{B}, \mathbf{E}, \mathbf{D})$ ,  $\mathbf{q}$  – единичный вектор нормали вдоль оси  $z$  по направлению распространения волны (3.1.1).

Исключая неизвестные  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  из (3.1.2) с помощью (2.10.1) имеем

$$ik_0 \mathbf{E}(z) = (e^{-1} \mathbf{q}^\times (d/dz) + ik_0 \delta) \mathbf{H}(z), \quad (3.1.3)$$

$$\mathbf{q}^\times (d\mathbf{E}(z) / dz) = [ik_0 \mu \beta \mathbf{q}^\times (d / dz)] \mathbf{H}(z). \quad (3.1.4)$$

Для тангенциальных составляющих векторов  $\mathbf{E}(z)$  и  $\mathbf{H}(z)$  системы уравнений (3.1.3), (3.1.4), лежащих в фазовой плоскости волны и необходимых при решении граничных задач, будем искать решения в виде [157, 193, 97]:

$$\mathbf{H}_\tau(z) = e^{ik_0 N z} \mathbf{H}_\tau(0), \quad (3.1.5)$$

$$[\mathbf{q} \mathbf{E}(z)] = \varepsilon \mathbf{H}_\tau(z), \quad (3.1.6)$$

где  $N$  – планарный ( $\det N \equiv |N| = 0$ ) тензор показателей преломления, а  $\gamma$  – тензор импеданса;  $\mathbf{H}_\tau = I \mathbf{H}$ ,  $I = -\mathbf{q}^\times \mathbf{q}^\times$ .

Прямые тензорные (или операторные) методы [92, 16, 204, 205] показали высокую эффективность при решении многих задач кристаллооптики. Получаемые с их помощью инвариантные соотношения не зависят от выбора системы координат и компактно и наглядно представляют различные функциональные зависимости от тензорных величин, как единых объектов. Традиционные же координатные методы, удобные в простых ситуациях, приводят к особенно громоздким и запутанным выражениям в общем случае анизотропных и гиротропных сред. С помощью операторного формализма, использующего тензоры  $\gamma$ ,  $N$ , рассматривались вопросы распространения электромагнитных волн в плоскостойких различных анизотропных и гиротропных средах в [157, 206, 135, 193, 204, 97, 98].

В данном разделе этот операторный формализм (3.1.5), (3.1.6) применим для описания распространения света в линейных средах при нормальном и наклонном падении света на поверхности их раздела, следуя нашим работам [207, 208] (см. также [135, 193]).

Теперь задача феноменологического описания распространения несобственных плоских монохроматических электромагнитных волн вида (3.1.1) сводится к решению системы двух тензорных нелинейных алгебраических уравнений

$$(A + Bz)N = I, \quad (C + Dz)N = \gamma \quad (3.1.7)$$

относительно введенных неизвестных планарных тензоров  $N$  и  $\gamma$ .

Разделяя переменные находим искомое тензорное квадратное уравнение для вычисления тензора импеданса  $\gamma$ :

$$f(\gamma) = \gamma B \gamma + \gamma A - D \gamma - C = 0, \quad (3.1.8)$$

где для краткости введены обозначения [207]

$$A = I \mu^{-1} \beta \mathbf{q}^\times, \quad C = \mathbf{q}^\times (\alpha \mu^{-1} \beta - \varepsilon^{-1}) \mathbf{q}^\times, \quad B = I \mu^{-1} I, \quad D = \mathbf{q}^\times \alpha \mu^{-1} I. \quad (3.1.9)$$

Аналогично, для  $N^{-1}$  получаем квадратное уравнение

$$N^{-2} - RN^{-1} - S = 0, \quad (3.1.10)$$

где  $N^{-1}$  – тензор, псевдообратный [193, 97] тензору  $N$ ;  $N^{-2} \equiv (N^{-1})^2$ , а тензорные коэффициенты  $R$  и  $S$  равны [207]:

$$\begin{aligned} S &= I \mu^{-1} \mathbf{q}^\times (\alpha \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} \beta / \mu_q - \varepsilon^{-1}) \mathbf{q}^\times, \\ R &= -I \mu^{-1} \mathbf{q}^\times \alpha (\mathbf{q} \mu)^\times \mathbf{q}^\times / \mu_q + A, \quad \mu_q = \mathbf{q} \mu \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Выберем некоторую определенную систему координат  $(x, y, z)$  так, чтобы ось  $z$  была ориентирована вдоль направления распространения волны  $\mathbf{H}(z, t)$  (3.1.1), (3.1.5), тогда относительно этой системы величины  $\mathbf{H}_\tau(0)$  и  $\mathbf{H}_\tau(z)$  являются двумерными векторами Джонса световой волны в точках  $z=0$  и  $z=z$  среды, а выражение  $\exp(ik_0 z N)$  представляет собой  $(2 \times 2)$ -матрицу Джонса [209, 210], причем  $N$  – дифференциальная [209, 210]  $N$ -матрица Джонса. Аппарат векторов и матриц Джонса удобен тем, что две изонормальные собственные волны, распространяющиеся в кристалле, объединяются в одну несобственную плоскую монохроматическую, причем преобразование поляризации последней по мере ее распространения описывается одной матрицей Джонса. Формула же (3.1.5) представляет [206, 97] некоторое обобщение идей Джонса и содержит все величины в инвариантной (бескоординатной) форме. Знание тензоров  $N$  и  $\gamma$  дает достаточную информацию для характеристики движения светового луча как внутри линейной среды, так и на границах раздела ее с другими средами.

Собственные векторы  $\mathbf{H}_{\tau\pm}$  и собственные значения  $n_\pm$  тензора  $N$ , согласно уравнению

$$(N - n_{\pm})\mathbf{H}_{\tau_{\pm}} = 0, \quad (3.1.12)$$

имеют непосредственный физический смысл. А именно:  $\mathbf{H}_{\tau_{\pm}}$  и  $n_{\pm}$  – тангенциальные составляющие векторов поляризации и показатели преломления собственных волн в кристалле соответственно. Следовательно, умножая (3.1.10) справа на  $\mathbf{H}_{\tau_{\pm}}$ , получаем сразу волновое уравнение, определяющее характеристики собственных волн

$$\tau_{\pm}\mathbf{H}_{\tau_{\pm}} = 0, \quad \tau_{\pm} = I/n_{\pm}^2 - R/n_{\pm} - S. \quad (3.1.13)$$

Показатели преломления  $n$  собственных волн удовлетворяют уравнению нормалей  $(\bar{\tau})_c = 0$ , которое имеет форму [208]

$$n^{-4} - R_c n^{-3} + (\bar{R}_c - S_c)n^{-2} + [S_c R_c - (SR)_c]n^{-1} + \bar{S}_c = 0. \quad (3.1.14)$$

Явный вид коэффициентов уравнения нормалей (3.1.14) нами уже был получен (формулы (2.10.6)-(2.10.7)) другим путем.

Как вычислить тензор показателей преломления  $N$ ? Итерационные методы решения тензорных квадратных уравнений (3.1.14) и (3.1.10) мы рассмотрим позже. Сейчас же заметим, что, найдя показатели преломления  $n_+$ ,  $n_-$  собственных волн из уравнения нормалей (3.1.14), нетрудно по формуле [207]

$$N = [I(n_+ n_-)^{-1} + S]^{-1} [I(n_+^{-1} + n_-^{-1}) - R], \quad (3.1.15)$$

вытекающей из теоремы Гамильтона-Кэли для планарных тензоров [16], рассчитать  $N$ .

При  $n_+ \neq n_-$  оператор  $N$  можно разложить по поляризационным проекторам

$$N = n_+ c_+ + n_- c_-. \quad (3.1.16)$$

Проекторы  $\rho_{\pm}$ , характеризующие поляризационные параметры векторов  $\mathbf{H}_{\tau_{\pm}}$  собственных волн и обладающие свойствами [193, 135]

$$\rho_m \rho_n = \delta_{mn} \rho_n, \quad \mathbf{q} \rho_n = \rho_n \mathbf{q} = 0, \quad \rho_+ + \rho_- = I, \quad m, n = \pm, \quad (3.1.17)$$

можно тогда представить через  $\tau_{\pm}$  (3.1.13) следующим образом [207]:

$$\rho_{\pm} = (\tau_{\mp} - \tau_{\pm})^{-1} \tau_{\mp}. \quad (3.1.18)$$

Для сред без магнитной структуры соотношения (3.1.18) эквивалентны соответствующим выражениям в [206].

Вычислив  $N^{-1}$  из тензорного квадратного уравнения (3.1.10) или из (3.1.15), предварительно решив уравнение нормалей (3.1.14), можно из (3.1.7) сразу выразить тензор импеданса

$$\gamma = B^{-1} (N^{-1} - A), \quad (3.1.19)$$

необходимый при решении граничных задач, и, согласно (3.1.5), рассчитать  $\mathbf{H}_\tau(z)$  в любой точке. Вектор полного поля  $\mathbf{H}(z)$  затем выражается через редуцированный вектор  $\mathbf{H}_\tau(z)$

$$\mathbf{H}(z) = [I + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} (\beta \mathbf{q}^\times N - \mu) / \mu_q] \mathbf{H}_\tau(z). \quad (3.1.20)$$

Далее, при необходимости, легко находятся и остальные векторы поля

$$\mathbf{E} = (-\varepsilon^{-1} \mathbf{q}^\times N + \alpha) \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = -\mathbf{q}^\times N \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \gamma N \mathbf{H}_\tau. \quad (3.1.21)$$

Обсудим теперь некоторые следствия, вытекающие из симметричных свойств оптических тензоров  $\mu$ ,  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ , входящих в материальные уравнения (1.2.20), относительно операций пространственной инверсии  $\bar{I}$ , обращения во времени магнитной структуры  $\underline{I}$  и изменения направления распространения излучения на противоположное,  $\mathbf{q} \rightarrow (-\mathbf{q})$ .

Из определений (3.1.9), (3.1.11) следует, что принцип симметрии кинетических коэффициентов (1.2.23) накладывает на матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $S$ ,  $R$  следующие ограничения [207]:

$$B = \underline{\tilde{B}}, \quad C = \underline{\tilde{C}}, \quad A = -\underline{\tilde{D}}, \quad \underline{\tilde{R}} = -B^{-1} R B, \quad \underline{\tilde{S}} = B^{-1} S B. \quad (3.1.22)$$

В прозрачных средах эти ограничения несколько упрощаются:

$$B = B^+, \quad C = C^+, \quad A = D^+, \quad R = B^{-1} R B, \quad S^+ = B^{-1} S B \quad (3.1.23)$$

Подчеркнем, что в отсутствие диссипации энергии  $\gamma \neq \gamma^+$ ,  $N \neq N^+$ . Тензор импеданса  $\gamma$  становится эрмитовым только при выполнении дополнительного условия  $A^+ \gamma A = \gamma$ .

Отметим также, что в поглощающих кристаллах, обладающих оптической активностью, с  $\mu = I$  и без магнитоэлектрического эффекта также  $N \neq N^+$ . Это означает, что в таких средах собственные волны неортогональны, что соответствует положениям работ [16, 19]. Только в прозрачных centrosymmetric средах, у которых  $\alpha = \beta = 0$ ,

$$z = z^+, \quad N^+ = B^{-1} N B. \quad (3.1.24)$$

Рассмотрим взаимосвязь тензорных параметров изонормальных волн с противоположными скоростями движения. Уравнение нормалей  $(\bar{\tau})_c = 0$  (3.1.14) имеет четыре различных корня. Два из них  $1/n_\pm$  являются собственными значениями тензора  $N^{-1}$  и характеризуют скорости собственных волн  $\mathbf{H}_{\tau\pm}$ , движущихся в направлении  $\mathbf{q}$ , а остальные два  $1/n'_\pm$  соответствуют тензору  $(N^{-1})^r$ . Индексом  $r$  помечены величины для волн, распространяющихся в обратном направлении  $(-\mathbf{q})$ . Операторы  $\rho'_\pm$ ,  $N^r$ ,  $\gamma^r$  получаются из  $\rho_\pm$ ,  $N$ ,  $\gamma$  преобразованиями  $n_\pm \rightarrow n'_\pm$ .

Так как замены  $n_\pm \rightarrow n'_\pm$  формально равнозначны заменам  $\alpha \rightarrow -\alpha$  либо  $\beta \rightarrow -\beta$ , либо  $\mathbf{q} \rightarrow -\mathbf{q}$ , то [207]

$$n'_\pm = -n_\pm(-\mathbf{q}), \quad N^r = -N(-\mathbf{q}), \quad \rho'_\pm = \rho_\pm(-\mathbf{q}), \quad \gamma^r = -\gamma(-\mathbf{q}). \quad (3.1.25)$$

В кристаллах без оптической активност и магнитоэлектрического эффекта величины  $\alpha = \beta = 0$  и тогда зависимость операторов в (3.1.25) от  $\mathbf{q}$  исчезает. В линейных прозрачных средах в общем случае [207]

$$n_{\pm}^r = -\underline{n}_{\pm}, \quad c_{\pm}^r = \underline{c}_{\pm}^*, \quad N^r = \underline{N}^*, \quad z^r = -\underline{z}^*. \quad (3.1.26)$$

В частности, для прозрачных оптически активных сред без магнитной структуры из (3.1.26) следуют результаты [206].

Обсудим вкратце вопрос о невзаимности оптических явлений. Известно, что если эффект не меняет знака при изменении направления распространения света, то он называется взаимным или обратимым, а в противном случае – невзаимным [18]. Невзаимные оптические явления – эффект Фарадея и магнитоэлектрический эффект – возможны только в средах с магнитной структурой. Иначе говоря, невзаимные эффекты характеризуются  $c$ -тензорами, меняющими знак при инверсии магнитной структуры  $\underline{I}$ , а взаимные – линейное двупреломление и оптическая активность –  $i$ -тензорами.

Подчеркнем, что свойство невзаимности нельзя связывать со свойством явлений накапливаться при прохождении света в прямом и обратном направлениях, что иногда встречается в литературе. Действительно, нетрудно видеть, что оптические эффекты, описываемые тензорами  $\mu$  и  $\varepsilon$  (линейное двупреломление и эффект Фарадея), удваиваются при двойном (туда и обратно) проходе света через кристалл, а эффекты, характеризующиеся тензорами  $\alpha$  и  $\beta$  (оптическая активность и магнитоэлектрический эффект) – компенсируются. Этот вывод соответствует также положениям работы [211].

Накапливающиеся эффекты определяются, следовательно, тензорами, четными относительно пространственной инверсии  $\bar{I}$ , компенсирующиеся – нечетными.

Конечно, необходимо иметь в виду, что в явления эллиптического двупреломления и дихроизма могут вносить вклад как четные–, так и нечетные относительно операций симметрии  $\bar{I}$  и  $\underline{I}I'$  тензоры, поэтому в общем случае оптические эффекты эллиптического двупреломления и дихроизма будут частично невзаимными и частично компенсируемыми при прохождении света туда и обратно.

Для операторов показателей преломления  $N$  и импедансов  $\gamma$ , характеризующих распространение несобственных плоских монохроматических волн (3.1.11) в линейных гироанизотропных средах вида (2.10.1) получены [207, 208] выражения, предложена схема расчета и установлены их симметричные свойства.

### 3.2 Тензоры нормальной рефракции и поверхностных импедансов в линейных средах. Наклонное падение

В предыдущем разделе для кристаллов (сегнетомагнетиков), характеризующихся линейными материальными уравнениями света общего вида

$$\mathbf{E} = \varepsilon^{-1} \mathbf{D} + \alpha \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \beta \mathbf{D}, \quad (3.2.1)$$

были введены тензоры показателей преломления  $N$  и импедансов  $\gamma$ , описывающие распространение несобственных изонормальных монохроматических электромагнитных волн в таких неограниченных средах. Теперь используемый подход [207] распространим на более сложные случаи наклонного (косого) падения света на границы раздела линейных плоскостойких сред. Будем следовать работе [208] (см. также [135, 97, 193]).

Пусть на границу раздела двух линейных однородных кристаллов (сегнетомагнетиков), характеризуемую нормалью  $\mathbf{q}$  ( $\mathbf{q}^2=1$ ), падает наклонно плоская монохроматическая световая волна. Тогда вследствие отражения и преломления в обеих средах возникают несобственные электромагнитные волны вида [193]

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \exp[i(k_0 \mathbf{b} \mathbf{r} - \omega t)]. \quad (3.2.2)$$

Выражение (3.2.2) объединяет обе собственные плоские монохроматические световые волны с различными показателями преломления  $n_{\pm}$  и одинаковыми тангенциальными составляющими  $\mathbf{b} = I \cdot \mathbf{m}_i$  их векторов рефракции  $\mathbf{m}_i$ . Здесь векторы поля  $\mathbf{F} = (\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{D}, \mathbf{B})$ ,  $I = -\mathbf{q}^{\times} \mathbf{q}^{\times}$ ,  $k_0 = \omega / c$ ,  $\omega$  – частота.

Будем рассматривать световые волны типа (3.2.2), зависящие от одной координаты  $z = \mathbf{q} \mathbf{r}$ , возникающие также и в более общих ситуациях плоскостойких линейных сред. При этом уравнения Максвелла принимают форму

$$\nabla^{\times} \mathbf{H} = ik_0 \mathbf{D}, \quad \nabla^{\times} \mathbf{E} = ik_0 \mathbf{B}, \quad (3.2.3)$$

где оператор  $\nabla^{\times}$  сводится к выражению [193]  $\nabla^{\times} = \mathbf{q}^{\times} (d/dz) + ik_0 \mathbf{b}^{\times}$ .

С помощью (3.2.3), (3.2.3а) исключим из уравнений связи (3.2.1) переменные  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$ . После некоторых выкладок получаем в матричной форме систему уравнений

$$ik_0 \begin{bmatrix} \mu_n & 0 \\ \alpha_n & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}(z) \\ \mathbf{B}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_n \mathbf{q}^{\times} & I \\ \varepsilon^{-1} \mathbf{q}^{\times} & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dz} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_i(z) \\ \mathbf{q}^{\times} \mathbf{E}(z) \end{bmatrix} \quad (3.2.4)$$

относительно неизвестных амплитуд  $\mathbf{H}(z)$  и  $\mathbf{E}(z)$  векторов поля, где введены обозначения [208]:

$$\alpha_n = \alpha - \varepsilon^{-1} \mathbf{b}^{\times}, \quad \beta_n = \beta - \mathbf{b}^{\times} \varepsilon^{-1}, \quad \mu_n = \mu - \beta \mathbf{b}^{\times} - \mathbf{b}^{\times} \alpha_n. \quad (3.2.5)$$

Известно, что вопросы косого распространения света относительно границ раздела анизотропных сред разработаны значительно слабее, чем нормального. Это объясняется возрастающей громоздкостью расчетов, особенно существенной при использовании координатного метода. Осуществленная в (3.2.5) перенормировка параметров устанавливает взаимно однозначное соответствие  $\mu \leftrightarrow \mu_n$ ,  $\varepsilon \leftrightarrow \varepsilon$ ,  $\alpha \leftrightarrow \alpha_n$ ,  $\beta \leftrightarrow \beta_n$  между вышеприведенными уравнениями (3.2.4) для наклонного падения излучения и (3.1.3), (3.1.4) из раздела 3.1,

характеризующими нормальное падение. Этот изоморфизм между структурами двух систем уравнений позволяет для косоуго падения непосредственно использовать подход и многие результаты из раздела 3.1. При этом переход к случаю нормального падения осуществляется "автоматически".

Для тангенциальных составляющих векторов  $\mathbf{E}(z)$  и  $\mathbf{H}(z)$  системы (3.2.4), параллельных плоскостям раздела сред, будем искать решения в виде [193, 97]

$$\mathbf{H}_\tau(z) = \exp(ik_0 z N) \mathbf{H}_\phi(0), \quad \mathbf{H}_\phi = I \mathbf{H}; \quad \mathbf{q}^\times \mathbf{E}(z) = \gamma \mathbf{H}_\phi(z), \quad (3.2.6)$$

где  $N$  – нормальный тензор показателей преломления для наклонного падения или, иначе, тензор нормальной рефракции [193] а  $\gamma$  – тензор поверхностных импедансов.

Теперь (3.2.4) после некоторых выкладок приводится к следующей форме [208]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}(z) \\ \mathbf{E}(z) \end{bmatrix} = \hat{Y} \begin{bmatrix} I \\ \gamma \end{bmatrix} N \mathbf{H}_\tau(z), \quad (3.2.7)$$

где  $\hat{Y}$  – блочная  $(2 \times 2)$ -матрица

$$\hat{Y} = \begin{bmatrix} \mu_n^{-1} \beta_n \mathbf{q}^\times & \mu_n^{-1} I \\ (\alpha_n \mu_n^{-1} \beta_n - \varepsilon^{-1}) \mathbf{q}^\times & \alpha_n \mu_n^{-1} I \end{bmatrix}. \quad (3.2.8)$$

Умножая (3.2.7) слева на  $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathbf{q}^\times \end{bmatrix}$ , находим систему линейных уравнений

$$(A + B\gamma)N = I; \quad (C + D\gamma)N = \gamma \quad (3.2.9)$$

относительно введенных неизвестных  $\gamma$  и  $N$ , в которой планарные тензоры  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  являются компонентами блочной матрицы, входящей в уравнение

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathbf{q}^\times \end{bmatrix} = \hat{Y} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}. \quad (3.2.10)$$

Отсюда, разделяя переменные в (3.2.9), получаем квадратные уравнения относительно неизвестных тензоров поверхностных импедансов  $\gamma$  и нормальной рефракции  $N$

$$f(\gamma) = \gamma B\gamma + \gamma A - D\gamma - C = 0, \quad (3.2.11)$$

$$f_l(N^{-1}) = N^{-2} - RN^{-1} - S = 0, \quad (3.2.12)$$

где, для краткости, введены обозначения  $R = A + BDB^{-1}$ ,  $S = B(C - DB^{-1}A)$ .

Видим, что уравнения (3.2.11), (3.2.12) для введенных операторов поверхностного импеданса  $\gamma$  и тензора нормальной рефракции  $N$  совпадают по форме с выражениями (3.1.8) и (3.1.10) соответственно, причем тензорные коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $R$ ,  $S$  выражаются через величины  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$ ,  $\mu_n$ ,  $\varepsilon$  (3.2.5) точно

так же, как в (3.1.9) с учетом перенормировок (3.2.5). Поэтому большинство соотношений (3.1.3)-(3.1.21) после перенормировки оптических параметров (3.2.5) справедливы и для наклонного падения света, может несколько меняться только физический смысл тех или иных величин. Например, собственные значения  $n^{-I} = v_n/c$  тензора  $N^{-I}$  пропорциональны нормальным составляющим  $v_n$  собственных волн при косом падении света на кристалл.

В классической схеме кристаллооптики из уравнения нормалей сначала находят показатели преломления, а затем поляризации собственных волн, а потом решают соответствующие граничные задачи. Преимущество используемого здесь операторного формализма состоит, в частности, и в том, что для нахождения тензоров  $N$  и  $\gamma$  необязательно предварительно искать скорости и поляризации собственных волн. Эти промежуточные расчеты можно исключить, сразу из (3.2.11), (3.2.12) вычисляя матрицы  $N$  и  $\gamma$ . Следует отметить, что операторный формализм детально разработан Л. М. Барковским и изложен в монографиях [97, 98].

Перейдем теперь к рассмотрению итерационных методик расчета тензоров  $N^{-I}$  и  $\gamma$  из уравнений (3.2.11) и (3.2.12). Попутно заметим, что в общем случае уравнение нормалей – полное уравнение четвертой степени – также приходится решать приближенными методами.

В [193, 204] для решения тензорных квадратичных уравнений типа (3.2.11), (3.2.12) была предложена итерационная формула

$$N_{n+1}^{-I} = \sqrt{S + RN_n^{-I}}, \quad (3.2.13)$$

использующая малость  $R$  ( $R$  – величина порядка анизотропии  $\alpha$ ) и обладающая устойчивой линейной сходимостью. Однако при расчетах по (3.2.13) при извлечении квадратных корней из планарных матриц существуют определенные трудности, обусловленные тем, что такой корень имеет, как правило, четыре различных значения. Поэтому на каждой итерации приходится привлекать дополнительные физические соображения для их выбора.

Чтобы устранить необходимость извлечения квадратных корней из матриц в (3.2.13), можно применить следующую итерационную формулу [207]

$$N_{n+1}^{-I} = (SN_n + R + N_n^{-I})/2, \quad (3.2.14)$$

представляющую собой тензорный аналог алгоритма Герона для извлечения корня.

Итерационные схемы (3.2.13) и (3.2.14) обладают одинаковой линейной сходимостью порядка  $\alpha$ . Однако расчеты по формуле (3.2.14) несколько проще, поскольку требуют лишь вычисления псевдообратных матриц, выполняемых однозначно.

Можно исключить и операцию псевдообращения матриц, если воспользоваться выражением [207]

$$N_{n+1}^{-I} = N_n^{-I} - S^{1/2} f_1(N_n^{-I})/2, \quad (3.2.15)$$

представляющим собой тензорный аналог итерационной формулы Ньютона с фиксированной касательной, взятой в точке  $N_0^{-1} = S^{1/2} + R/2$ , которая является более точным приближением к корню, чем  $S^{1/2}$  (погрешность значения  $N_0^{-1}$  – порядка  $\alpha^2$ ).

Из (3.2.15) можно найти приближенное значение

$$N^{-1} = \sqrt{S} + R/2 - \sqrt{S}(\sqrt{S}R - R\sqrt{S} - R^2/2)/2, \quad (3.2.16)$$

имеющее погрешность порядка  $\alpha^3$  и поэтому практически достаточное в большинстве случаев.

Вычислив  $N^{-1}$ , мы, согласно (3.2.6), знаем  $\mathbf{H}_\tau(\mathbf{z})$ . Тензор импеданса  $\gamma$  проще всего выразить из (3.2.9). Полные же векторы поля  $\mathbf{H}(\mathbf{z})$  и  $\mathbf{E}(\mathbf{z})$  можно найти по формулам (3.2.7).

Нами осуществлялось численное моделирование решения тензорных квадратных уравнений типа (3.2.12). Практика показала, что вычислительные процессы, проводимые по формулам (3.2.14)–(3.2.15), являются устойчивыми и обладают примерно одинаковой обязательной линейной сходимостью. При этом значения диагональных компонент тензора  $N^{-1}$  имеют сходимость, близкую к квадратичной. Вычислительные процессы по отношению к недиагональным компонентам матрицы  $N^{-1}$  менее устойчивы и обладают более медленной линейной сходимостью. Численные расчеты показали, что даже при большой анизотропии и гиротропии кристалла порядка  $10^{-1}$  для получения результата с восьмью точными значащими цифрами достаточно менее восьми итераций.

Таким образом, операторный формализм тензоров  $N$  и  $\gamma$ , введенный в предыдущем параграфе, путем соответствующей перенормировки (3.2.5) оптических тензоров обобщен [208] на случаи косоуго падения света относительно границы раздела двух линейных сред.

Для вычисления тензора  $N^{-1}$  предложены и проверены [208] также две упрощенные итерационные формулы, обладающие гарантированной быстрой сходимостью  $\sim \alpha$  и исключающие неоднозначные операции извлечения корней из матриц.

### 3.3 Матрица показателей преломления $N$ и оптические свойства кристаллов

Кристаллооптические свойства среды для заданного направления волновой нормали  $\mathbf{q}$  можно, как мы видели, полностью характеризовать планарным ( $\mathbf{q}N = N\mathbf{q} = \theta$ ) тензором показателей преломления  $N$ . Рассмотрим его свойства детальнее.

В системе координат, где  $\mathbf{z} \parallel \mathbf{q}$ , комплексная  $(2 \times 2)$ -матрица  $N$  содержит только 4 независимых параметра и поэтому может быть представлена в виде

$$N = \begin{bmatrix} N_0 + N_1 & N_2 - iN_3 \\ N_2 + iN_3 & N_0 - N_1 \end{bmatrix}. \quad (3.3.1)$$

Здесь комплексные параметры  $N_0, N_1, N_2, N_3$  являются коэффициентами разложения  $N$  по единичной матрице  $\pi_0$  и спиновым матрицам В. Паули  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  соответственно. Разложение типа (3.3.1) для двумерных матриц частично применялось в поляризационной оптике и показало свою эффективность [141, 212-216].

Полезно 4 параметра  $N_i$  объединить в один четырехмерный вектор-параметр [141]

$$N = [N_0, \mathbf{N}], \quad (3.3.2)$$

где  $N=(N_1, N_2, N_3)$  – некоторый трехмерный комплексный вектор,  $N_0$  – комплексный скаляр.

Точно так же всякой  $(2 \times 2)$ -матрице  $a$  можно всегда поставить [141, 216] во взаимно однозначное соответствие вектор-параметр  $[a_0, \mathbf{a}]$ . Удобство такого формализма, применяемого нами далее, заключается в том, что умножению произвольных  $(2 \times 2)$ -матриц  $a$  и  $b$  соответствует простой закон композиции их параметров [216, 141]

$$ab = [a_0, \mathbf{a}][b_0, \mathbf{b}] = [a_0 b_0 + \mathbf{a} \mathbf{b}, a_0 \mathbf{b} + b_0 \mathbf{a} + i[\mathbf{a} \mathbf{b}]]. \quad (3.3.3)$$

Отметим, что имеется тесная связь между 4-вектор-параметрами, действующими в пространстве Пуанкаре, и соответствующими им кватернионами. Именно, базисные элементы  $c_j$  ( $j=0, 1, \dots, 4$ ) кватернионного исчисления выражаются через спиновые матрицы Паули:  $\pi_0 = c_0$ ,  $\pi_k = -i c_k$ , ( $k=1, 2, 3$ ). С другой стороны, компоненты  $a_0, a_1, a_2, a_3$  вектора  $a=[a_0, \mathbf{a}]$  в абстрактном пространстве вектор-параметров можно также рассматривать как компоненты соответствующего 4-спинора.

Далее будем пользоваться при обращении с  $(2 \times 2)$ -матрицами, наряду с обычной (3.3.1), также формой записи типа (3.3.2).

Физический смысл матрицы  $N$  выяснен нами ранее в (3.1.12). Добавим, что собственные значения ее, являющиеся показателями преломления собственных волн  $\mathbf{h}_\pm$  в кристалле, в рамках 4-формализма (3.3.2) равны [141]

$$n_\pm = N_0 \pm \sqrt{N^2}. \quad (3.3.4)$$

Здесь величина

$$\Delta n = n_+ - n_- = 2\sqrt{N^2} = \Delta n' + i \Delta n'' \quad (3.3.5)$$

характеризует двупреломление и дихроизм, вообще говоря, эллиптические [16], причем из физических соображений понятно, что  $\Delta n'$  отвечает за двупреломление, а  $\Delta n''$  – за дихроизм. Как уже говорилось (3.1.16), матрицу  $N$  (при  $n_+ \neq n_-$ ) можно разложить по проекторам  $\rho_\pm$ .

Сравнивая (3.1.16), (3.3.2) и (3.3.4), видим, что в 4-формализме поляризационные проекторы  $\rho_{\pm}$  собственных волн выражаются (при  $N^2 \neq 0$ ) через  $N$  следующим образом:

$$\rho_{\pm} = [I, \pm \mathbf{p}] / 2, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}' + i\mathbf{p}'' = N / \sqrt{N^2}. \quad (3.3.6)$$

Распространение суммарной световой волны (состоящей из двух собственных  $\mathbf{H}_+$  и  $\mathbf{H}_-$ ) в кристалле можно описывать, согласно (3.1.5), тензором показателей преломления  $N$ . Отсюда видно, что выражение

$$D_d = ik_0 N = ik_0 [N_0, N], \quad (3.3.7)$$

записанное в выбранной системе координат, можно интерпретировать как дифференциальную или  $N$ -матрицу распространения Джонса [217, 210, 218, 219, 209]. Дифференциальная матрица Джонса  $D_d$  характеризует гиротропию и анизотропию оптических свойств среды в плоскости, перпендикулярной направлению распространения светового пучка и пересекающей его в точке  $z$  [218].

Следовательно, матрица показателей преломления  $N$  (3.3.1), (3.3.2) с точностью до несущественного скалярного множителя  $ik_0$  совпадает с дифференциальной матрицей Джонса и содержит полную информацию об оптических свойствах среды в направлении оси  $z$ . Величина  $k_0 N_0'$  является средним набегом фазы суммарной несобственной волны  $\mathbf{H}_r(z)$  на расстоянии  $z=l$ , а мнимая составляющая  $k_0 N_0''$  описывает изотропное поглощение света выражением  $\exp(-k_0 N_0'' z)$ . Анизотропная же составляющая  $ik_0 N$  дифференциальной  $N$ -матрицы Джонса (3.3.7) характеризует поляризацию собственных волн, дву-преломление и дихроизм.

Джонс [209, 217] произвел параметризацию различных кристаллооптических явлений и каждому из 8 вещественных параметров дифференциальной  $N$ -матрицы поставил в соответствие 6 основных типов оптических свойств. Именно,  $N_1', N_2', N_3'$  согласно Джонсу [209], описывают линейное дву-преломление вдоль координатных осей, линейное дву-преломление вдоль биссектрисы угла между осями  $x$  и  $y$ , циркулярное дву-преломление соответственно. Аналогично, параметры  $N_1'', N_2'', N_3''$  [209] характеризуют линейный дихроизм вдоль координатных осей, вдоль биссектрисы угла между  $x$  и  $y$ , циркулярный дихроизм соответственно. Фактически Джонс полагает [209], что в прозрачных средах  $N'' = 0$ .

Такая точка зрения стала классической [209, 212, 213, 215] и в той или иной мере существует также и в последующих работах [217, 220, 210, 218, 221]. Например, в [141] вводится комплексный вектор

$$\mathbf{g} = \mathbf{b} + i\mathbf{d} = 2k_0 N, \quad (3.3.8)$$

причем, вслед за автором [209], также априори считается, что компоненты вектора  $\mathbf{b}$  вносят вклад в дву-преломление света, а составляющие вектора  $\mathbf{d}$  – в дихроизм.

В частных случаях, например, когда  $\mathbf{b}=0$ , или  $\mathbf{d}=0$ , классическая интерпретация компонент дифференциальной матрицы Джонса  $D_d$ , предложенная самим Джонсом [209], оказывается применимой. Однако в общем случае это неверно.

Действительно, пусть, например,  $\mathbf{b} \perp \mathbf{d}$ , т.е.  $N' \perp N''$ . Тогда величина  $g^2$  вещественна. При  $g^2 > 0$  имеем  $\Delta n'' = 0$ , т.е. "чистое" двупреломление, а при  $g^2 < 0$  будет  $\Delta n' = 0$ , т.е. "чистый" дихроизм. Согласно же Джонсу, в обоих случаях, поскольку  $\mathbf{b} \neq 0$ ,  $\mathbf{d} \neq 0$ , сосуществуют одновременно двупреломление и дихроизм. Последний вывод, сделанный по Джонсу, является, конечно, неверным.

Из общих соображений ясно, что такие понятия как двупреломление, дихроизм и др. должны быть инвариантными характеристиками оптических свойств сред вдоль заданного направления. В то же время при повороте системы координат вокруг оси  $z$  на угол  $\psi$  вектор  $N$  испытывает вращение по конусу на угол  $2\psi$  вокруг той же оси  $z$ . При этом, хотя  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{d}$  преобразуются и независимо, они оба изменяют свои компоненты. Остаются неизменными только  $N_0$ ,  $N_3$ . Отсюда понятно, что различные компоненты дифференциальной матрицы Джонса  $D_d = ik_0 N$  в общем случае нельзя однозначно связать с наблюдаемыми оптическими явлениями, как это часто делается [209, 212, 213, 215, 217, 220, 218, 221]. Величины  $N^2$  и  $N_0$ , инвариантны относительно поворотов системы координат на произвольный угол  $\psi$  вокруг оси  $z$ . Поэтому, как уже отмечалось выше (3.3.5), инвариантными характеристиками двупреломления и дихроизма могут служить величины  $Re \sqrt{N^2}$  и  $Im \sqrt{N^2}$  соответственно.

Аналогично, по Джонсу [209], компоненты  $N_1$ ,  $N_2$  вектора  $N$  отвечают за линейное двупреломление и линейный дихроизм, т.е. за анизотропию; компонента же  $N_3$  – за циркулярное двупреломление и циркулярное дихроизм или, по современной терминологии, – за гиротропию. Иначе говоря, согласно [209], симметричная часть матрицы  $N$  описывает анизотропные свойства среды, а антисимметричная – гиротропные.

Надо отметить, что такая трактовка, ставшая классической [212, 218, 220, 221], также применима далеко не всегда. Дело в том, что Джонс делал свои выводы в [219] на основе анализа немагнитных сред с естественной оптической активностью, описывая их уравнениями вида (1.2.1) и полагая также  $\mu=1$ , поэтому его некоторые выводы неприменимы для линейных сред общего вида. Например, возьмем прозрачный кристалл, свойства которого характеризуются симметричными тензорами  $\varepsilon$  и  $\mu$  [92]. Тогда  $N$  – несимметричная матрица, ее собственные линейные векторы неортогональны. Однако никакой гиротропии, вопреки [219], здесь нет.

Более приемлемой поэтому нам представляется классификация оптических явлений, проведенная в разделе 2.9, хотя и она не носит абсолютного характера, так как сами понятия анизотропии и гиротропии в общем случае поглощающих гиросимметричных сред нельзя определить однозначно.

Применим рассматриваемый формализм для описания поляризации собственных волн. В выбранной системе координат векторы  $\mathbf{H}_{\tau\pm}$  являются двумерными векторами Джонса и из (3.3.6) следует, что

$$\mathbf{H}_{\tau\pm} = \mathbf{h}_{\pm} = (p_1 \pm l, p_2 + ip_3), \quad (3.3.9)$$

где  $(p_1, p_2, p_3)$  - комплексные компоненты вектора  $\mathbf{p}$  (в пространстве 4-вектор-параметра  $N$ ). Отсюда следует, в частности, что если  $N$  – линейный вектор, то собственные волны ортогональны в смысле  $\mathbf{h}_+ \mathbf{h}_-^* = 0$ .

Известно [222, 215], что для эрмитовой  $(2 \times 2)$ -матрицы когерентности  $\Phi = \langle \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* \rangle$  [15,16] квазимонохроматического излучения компоненты  $(S_0, S_1, S_2, S_3)$  вектор-параметра

$$\mathbf{S} = [S_0, \mathbf{S}] = 2\mathbf{C} \quad (3.3.10)$$

имеют прямой физический смысл: они являются параметрами Дж. Стокса. Поэтому в общем случае матрицу когерентности частично поляризованного света можно записать в виде

$$\Phi = I[l, p\mathbf{s}]/2, \quad (3.3.11)$$

где  $I$  – интенсивность света,  $p$  – его степень поляризации ( $0 \leq p \leq I$ ).

Компоненты нормированного вектора Стокса [15,16]

$$\mathbf{s} = (\cos 2\epsilon \cos 2\psi, \cos 2\epsilon \sin 2\psi, \sin 2\epsilon) \quad (3.3.12)$$

поляризованной составляющей светового пучка непосредственно выражаются через измеряемые физические характеристики волны:  $\epsilon = \text{tg} \eta$  – эллиптичность волны;  $\psi$  – азимут главной оси эллипса поляризации относительно оси  $x$ .

Перейдем к нахождению поляризационных характеристик собственных волн. Зная поляризационные проекторы  $\rho_{\pm}$  (3.3.6), можно вычислить нормированные параметры Стокса  $s_{\pm}$  собственных мод  $\mathbf{h}_{\pm}$ :

$$s_{\pm} = ([\mathbf{p}' \mathbf{p}'' ] \pm \mathbf{p}') / \mathbf{p}'^2. \quad (3.3.13)$$

Если же  $N^2 = 0$ , то вместо (3.3.13) следует использовать соотношение

$$s_{\pm} = i[\mathbf{N} \mathbf{N}^*] / |\mathbf{N}^2|. \quad (3.3.14)$$

Итак, на основе произведенной параметризации дифференциальной матрицы Джонса  $D_d$  с помощью 4-вектора  $N = [N_0, \mathbf{N}]$ , где  $\mathbf{N} = (N_1, N_2, N_3) = \mathbf{N}' + i\mathbf{N}''$ , нами показана [116] ошибочность следующих классических представлений Джонса, разделяемых рядом авторов: 1) Вектор  $\mathbf{N}'$  отвечает за дву-преломление, а  $\mathbf{N}''$  – за дихроизм; 2) Компоненты  $N_1, N_2$  характеризуют анизотропию, а  $N_3$  – гиротропию.

Установлено [116], что дву-преломление и дихроизм описываются вещественной и мнимой частями выражения  $2\sqrt{N^2}$ , а сами понятия гиротропии и анизотропии в общем случае поглощающих линейных сред нельзя определить

однозначно. Затем поляризационные характеристики собственных волн выражены через векторы  $N$  и  $p = N/\sqrt{N^2}$ .

### 3.4 Интегральная матрица распространения света (матрица Джонса) и ее параметризация

Матрица показателей преломления  $N$  и дифференциальная матрица Джонса  $D_d$  характеризуют локальные оптические свойства среды в заданном направлении. Преобразование же комплексной амплитуды поля излучения на конечном расстоянии  $z$  можно описывать, согласно (3.1.5), с помощью интегрального оператора распространения света  $D$  [157, 97]

$$D = \exp(D_d z) = \exp(ik_0 N z). \quad (3.4.1)$$

При  $\Delta n \neq 0$ , используя спектральное разложение  $N$  (3.1.16), получаем

$$D = e^{i\varphi} [I \cos(\delta/2) + 2i(N - N_0 I) \sin(\delta/2) / \Delta n], \quad (3.4.2)$$

где  $\delta = \varphi_+ - \varphi_- = k_0 \Delta n z$  – сдвиг фаз между собственными волнами. Интегральный эволюционный оператор  $D$  распространения света был впервые записан в бескоординатном виде (3.4.2) в [140] для оптически активных сред без магнитной структуры, а затем распространен и на другие линейные среды [116, 97].

Наиболее компактную форму интегральная матрица  $D$  (матрица Джонса) (3.4.2) приобретает в формализме 4-векторов-параметров [223]

$$D = [D_0, \mathbf{D}] = e^{i\varphi} [\cos(\delta/2), i\mathbf{p} \sin(\delta/2)]. \quad (3.4.3)$$

Отметим, что компоненты двумерной интегральной матрицы  $D$  через компоненты своей дифференциальной матрицы  $D_d$  выражал впервые еще Джонс [209] (см. также [224, 225]). Поэтому в литературе [210, 215-217] двумерные матрицы, описывающие преобразование света оптическими устройствами, обычно называются "интегральными матрицами Джонса" или просто "матрицами Джонса". Конечно, надо иметь в виду, что Джонс вводил свои матрицы  $D$  и  $D_d$  для частных случаев линейных сред без магнитной структуры. Он не учитывал, например, также влияния многократных отражений света на границах раздела сред и др. Строго говоря, поэтому  $(2 \times 2)$ -матрицы операторов, описывающие эволюцию амплитуд светового излучения, не являются матрицами Джонса, а представляют их дальнейшее развитие. Тем не менее, мы, чтобы не нарушать терминологию, исторически сложившуюся в литературе по поляризационной оптике, поляризационные  $(2 \times 2)$ -матрицы будем также называть матрицами Джонса.

Таким образом, мы параметризовали интегральную матрицу Джонса  $D$  (3.4.3) с помощью 4-вектора  $N = [N_0, \mathbf{N}]$ . Естественно также производить ее параметризацию непосредственно на базе поляризационных параметров волн. Пусть тангенциальные составляющие векторов  $\mathbf{H}_{\pm}$  собственных мод задаются выражениями (2.2.5), где  $\alpha$  и  $\beta$  являются комплексными параметрами. Тогда эллиптичности  $\gamma_{\pm}$  и азимуты  $\psi_{\pm}$  собственных волн равны

$$\gamma_{\pm} = th(\beta' \pm \alpha')/2, \quad \psi_{\pm} = (\beta'' \pm \alpha'')/2, \quad (3.4.4)$$

что обобщает результаты (2.2.6). При этом вектор  $\mathbf{p}$  равен:

$$\mathbf{p} = (ch\beta, i sh\beta, sh\alpha)/(ch\alpha). \quad (3.4.5)$$

В поглощающих кристаллах без оптической активности, магнитоэлектрического эффекта и при  $\mu = 1$  величина  $\beta'' = 0$ . Именно такие магнитные кристаллы рассматривались в статье [154], где получена матрица  $D$  при параметризации (3.4.5). Как видим, выражения (2.2.5), (3.4.4), (3.4.5) при комплексном  $\beta$  применимы для различных линейных сред.

Обсудим теперь вопрос о феноменологических условиях прозрачности сред. Будем исходить из выражений (3.3.4), (3.3.5). Как уже отмечалось в разделе 3.3, вслед за Джонсом [209] некоторые исследователи ошибочно полагают, что в прозрачных средах  $N_0'' = 0$  и  $N'' = 0$ , т.е.  $\mathbf{N}$  – вещественный вектор. Из этих предпосылок логически вытекает вывод о том, что для прозрачных линейных неограниченных сред матрицы Джонса принадлежат группе  $SU(2)$ , т.е. матрицы  $D$  являются унитарными ( $DD^+ = I$ ), а их собственные векторы – векторы поляризации собственных волн  $\mathbf{h}_{\pm}$  ортогональны в смысле  $\mathbf{h}_{+}\mathbf{h}_{-}^* = 0$ . Именно такой вывод неявно фигурирует во многих работах в литературе. Явно его формулируют, в частности, Р. Шмидер [215] и Х. Такенака [212, 213].

На самом деле этот вывод является ошибочным. Нетрудно видеть, что прозрачные среды удовлетворяют менее жестким условиям

$$N_0'' = 0, \quad N^2 \geq 0. \quad (3.4.6)$$

При этом вовсе не обязательно, чтобы матрица  $D$  была унитарной. Например, прозрачные анизотропные кристаллы с естественной оптической активностью ( $\varepsilon$  – тензор,  $\alpha \neq 0$ ), либо бианизотропные ( $\varepsilon$  и  $\mu$  – тензоры) среды характеризуются неортогональными [92, 19] собственными волнами  $\mathbf{h}_{+}$  и  $\mathbf{h}_{-}$ . Это означает, что даже для однородных неограниченных таких сред матрицы Джонса  $D$  не будут унитарны.

Таким образом, условие унитарности  $DD^+ = I$  матриц Джонса является частным случаем менее жестких условий (3.4.6) прозрачности. Что же касается условий ортогональности  $\mathbf{h}_{+}\mathbf{h}_{-}^* = 0$  собственных волн, то они никак не связаны с прозрачностью среды. С одной стороны, как мы показали, могут быть прозрачные среды, в которых  $\mathbf{h}_{+}\mathbf{h}_{-}^* \neq 0$ . С другой стороны, в некоторых поглощающих образцах, например в немагнитных негиротропных поглощающих кристаллах средних сингоний, собственные волны линейны и ортогональны ( $\mathbf{h}_{+}\mathbf{h}_{-}^* = 0$ ) [15, 16].

С помощью формализма 4-векторов  $N = [N_0, \mathbf{N}]$  естественно формулируются также условия существования сингулярных оптических направлений в линейных средах.

Условие  $N^2 = 0$  описывает сингулярные оптические оси. При этом при  $N = 0$  простой структуре матрицы  $N$  соответствует изотропная оптическая ось.

Если же

$$N^2 = 0, \quad N \neq 0, \quad (3.4.7)$$

то, в зависимости от характера поляризации собственной волны, имеем анизотропную (линейную, круговую или эллиптическую) сингулярную ось. При этом  $(2 \times 2)$ -матрица  $N$  вырождена и не имеет простой структуры, т.е. не приводится к диагональному виду.

Интегральную матрицу Джонса  $D$  вдоль сингулярной оптической оси проще всего получить путем предельного перехода в (3.4.3). Тогда находим [223]

$$D = e^{i\varphi} [I, ik_0 z N]. \quad (3.4.8)$$

Эквивалентная выражению (3.4.8) формула в 3-формализме была получена в работе [157] для поглощающих бианизотропных кристаллов, а затем [97] обобщена на другие линейные среды.

Остановимся на поляризационных характеристиках распространения света вдоль сингулярных анизотропных осей. Можно видеть, что тогда матрица  $(N - N_0 I)$  является диадой:

$$N - N_0 I = \mathbf{h} \cdot [\mathbf{h} \mathbf{n}], \quad \mathbf{h}^2 = 2iN_3, \quad (3.4.9)$$

где собственная волна  $\mathbf{h}$  равна

$$\mathbf{h} = (h_1, h_2), \quad h_1 = N_1/h_2, \quad h_2 = \sqrt{N_2 + iN_3}. \quad (3.4.10)$$

Формула (3.4.10) пригодна почти всегда, за исключением случая  $N_2 + iN_3 = 0$ . Но тогда имеем

$$N_1 = 0, \quad \mathbf{h} \cdot [\mathbf{h} \mathbf{n}] = \begin{bmatrix} 0 & 2N_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.4.11)$$

Собственная волна  $\mathbf{h}$  проходит по кристаллу без изменения поляризации, причем вектор Стокса последней вдоль сингулярных анизотропных направлений равен

$$\mathbf{s}_{cob} = 2[N' N''] / |N|^2 \quad (3.4.12)$$

Запишем также двумерный вектор поляризации волны Фойгта

$$\mathbf{h}_\phi = [\mathbf{h}^* \mathbf{n}] + ik_0 z \mathbf{h} \sqrt{2} |N|, \quad (3.4.13)$$

и ее вектор Стокса

$$\mathbf{s}_\phi = ((2k_0^2 z^2 |N|^2 - I) \mathbf{s}_{cob} - 4k_0 z N'') / (I + 2k_0^2 z^2 |N|^2). \quad (3.4.14)$$

Отсюда видно, что вектор Стокса  $\mathbf{s}_\phi$  волны Фойгта очень быстро изменяется от  $-\mathbf{s}_{cob}$  до  $-N''/|N''|$  при  $2k_0 z |N| = I$ , а затем все медленнее, и в пределе при  $z \rightarrow \infty$  вектор  $\mathbf{s}_\phi \rightarrow \mathbf{s}_{cob}$ . В итоге главные оси эллипсов поляризации поворачиваются на  $90^\circ$ , а направление вращения меняется на противоположное.

Таким образом, интегральная матрица Джонса  $D$  параметризована с помощью вектора  $\mathbf{p}$  и представлена [223] в простейшей 4-форме (3.4.3). Предло-

жен [154] также другой (3.4.5) способ ее параметризации с помощью поляризационных параметров собственных волн.

В рамках этого формализма записаны векторы поляризации Джонса (3.4.13) и Стокса (3.4.14) для волны Фойгта, а также сама матрица (3.4.8) [223] вдоль сингулярных оптических осей.

Показана [116] ошибочность мнения Джонса и ряда последующих авторов о том, что для линейных прозрачных кристаллов матрица  $D$  является обязательно унитарной, а ее собственные векторы всегда ортогональны. Сформулированы правильные условия (3.4.6) прозрачности.

### 3.5 Симметрия оптических тензоров и оптических свойств направлений

Понятия кристаллографического направления и его характеристик (полярное, аксиальное, особенное, единичное и т.д.) исторически сложились в геометрической кристаллографии при изучении формы кристаллов, процессов их роста, явлений возникновения векторов спонтанной поляризации  $\mathbf{P}$  и спонтанной намагниченности  $\mathbf{M}$  при фазовых переходах. Эти интуитивные понятия были явно сформулированы на теоретико-групповом языке Желудевым [226, 32], а затем распространены Сиротиным и Шаскольской [28] на магнитные среды.

Группа симметрии направления  $\mathbf{n}$  в кристалле в соответствии с принципом Кюри определяется, согласно [226, 28], следующим образом:

$$G_n = G_{кр} \cap G_{ц}. \quad (3.5.1)$$

Здесь  $G_{кр}$  и  $G_{ц}$  – группы симметрии кристалла и цилиндра соответственно, причем последний ориентирован вдоль  $\mathbf{n}$ ,  $\bar{1}, I'$  – операции пространственной и временной инверсий.

Вследствие анизотропии кристалла его физические, в том числе и оптические, свойства зависят не только от  $G_{кр}$ , но и от направления в нем. Поэтому в [28] введены важные понятия, как оптические свойства направления в кристалле и группа симметрии оптических свойств направления, обозначаемая нами далее  $G_{осн}$ . Под  $G_{осн}$  понимается группа симметрии поляризационных характеристик и двупреломления световых волн вдоль заданного направления  $\mathbf{n}$  в кристалле. Авторы работы [28] постулируют, что оптические свойства направлений в кристаллах могут характеризоваться следующими 10 группами магнитной симметрии:

$$G_{осн} = \{ \infty 2 \bar{1} I', \infty 2 I', \infty 2' \bar{1}, \infty m \bar{1}', \infty 2', \\ 222 \bar{1} I', 22' 2' \bar{1}, 22' 2' \bar{1}', 222 I', 22' 2' \}, \quad (3.5.2)$$

причем

$$G_{ос} \cap G_{ц} = G_{осн} \supseteq G_n. \quad (3.5.3)$$

Для нахождения групп  $G_{OCH}$  в [28] предлагается следующий рецепт: предварительно по формуле (3.5.1) находится группа направления  $G_n$ , а затем из списка (3.5.2) выбирается минимальная надгруппа, удовлетворяющая условию (3.5.3).

Понятие  $G_{OCH}$  является, по нашему мнению, весьма полезным, так как позволяет, не решая соответствующего волнового уравнения, сразу по принципу Неймана [31] выяснить, запрещен ли симметрией тот или другой оптический эффект. Действительно, пусть максимальная группа симметрии, допускающая некоторое  $k$ -ое оптическое свойство, равна  $G_{oc}^{(k)}$ . Тогда, если

$$G_{очн} \subseteq G_{oc}^{(k)} \cap G_{ц}, \quad (3.5.4)$$

то, согласно принципам симметрии [29, 31], интересующее нас оптическое явление в заданном направлении может существовать. Если же (3.5.4) не выполняется, то данное  $k$ -ое оптическое свойство направления запрещено симметрией и поэтому отсутствует. В последнем случае отпадает необходимость решения соответствующего волнового уравнения.

Вместе с тем рецепт нахождения групп симметрии  $G_{OCH}$  в [28] предлагается без необходимого обоснования, а сами группы  $G_{OCH}$  просто постулируются. Поэтому вопрос о симметрии оптических свойств направлений требует дополнительного изучения.

Прежде всего отметим, что определение  $G_{OCH}$  зависит от выбора материальных уравнений, учета или неучета тех или иных возможных оптических явлений, частотной дисперсии и т.д.

Для описания линейных оптических свойств кристалла будем исходить из линейных материальных уравнений (2.10.1), (2.10.3) общего вида и волнового уравнения (3.1.13). Для простоты пренебрежем поглощением и будем полагать  $\mu=1$ . Выделяя в тензорах  $R$  и  $S$  симметричные и антисимметричные части, получаем, что вдоль заданного направления  $\mathbf{n}$  возможны следующие оптические эффекты – линейное двупреломление, эффект Фарадея, оптическая активность, и оптический магнитоэлектрический эффект – характеризующиеся соответственно тензорами

$$\begin{aligned} T_{лдп} &= -\mathbf{n}^* \chi \mathbf{n}^*, & T_{эф} &= i \mathbf{n}^* \cdot \mathbf{n}^* \mathbf{G}, & T_{оа} &= i \mathbf{n}^* \cdot \mathbf{n} \mathbf{g}, \\ \mathbf{g} &= [(\tilde{\sigma}_{оа})_c - \tilde{\alpha}_{оа}] \mathbf{n}, & T_{мээ} &= \mathbf{n}^* \alpha I - I \tilde{\alpha}_{мээ} \mathbf{n}^*. \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

Слагаемое  $\alpha \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \alpha^+$  в тензоре  $S$  (3.1.11) содержит лишь члены второго порядка по параметрам  $\alpha$ , а его симметрия такая же, как и  $\varepsilon^{-1}$ , поэтому достаточно ограничиться обсуждением симметрии тензора  $\varepsilon^{-1}$ .

В тензор  $T_{лдп}$  вносит вклад симметричный полярный  $i$ -тензор 2 ранга  $\chi$ , существующий во всех средах. Изотропная (скалярная) часть от  $T_{лдп}$  дает вклад в показатели преломления, а его девиатор – в  $T_{лдп}$ . Для существования линейного двупреломления необходимо, чтобы  $G_{лдп} \subseteq 222\bar{1}1'$ . Фарадеевское вращение описывает аксиальный  $c$ -вектор  $\mathbf{G}$ , симметрия которого  $G_G = \infty 2' \bar{1}$ ,

поэтому эффект Фарадея возможен только вдоль магнитных аксиальных направлений. Естественная оптическая активность характеризуется аксиальным  $i$ -тензором второго ранга  $\alpha_{OA}$ , причем  $G_{OA} \subseteq \infty\infty I'$ . Вектор естественной гирации  $\mathbf{g}$  возможен только в нецентросимметричных кристаллах вдоль винтовых направлений. Вклад в показатели преломления вносит только симметричная часть  $\alpha_{OA}^s$  матрицы  $\alpha_{OA}$ . Антисимметричная же часть  $\alpha_{OA}^a$  может давать вклад в поляризацию полных векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  поля [92, 16], что должно проявляться при наклонном падении, отражении и преломлении света на границе раздела сред. Невзаимное линейное двупреломление света или, по-другому, оптический магнитоэлектрический эффект описывает аксиальный несимметричный  $s$ -тензор 2 ранга  $\alpha_{MЭ}$ . Интересно, что симметричная  $\alpha_{MЭ}^s$  и антисимметричная  $\alpha_{MЭ}^a$  (по перестановке индексов) составляющие тензора  $\alpha_{MЭ}$  обладают различной симметрией:

$$G(\alpha_{MЭ}^s) \subseteq \infty 2\bar{I}'; \quad G(\alpha_{MЭ}^a) \subseteq \infty m\bar{I}'. \quad (3.5.6)$$

Важно также отметить, что изотропная (скалярная) часть матрицы  $\alpha_{MЭ}$  непосредственно не дает вклада в линейные оптические свойства сред.

Тензоры  $T_{ЛДП}$  и  $T_{MЭЭ}$  описывают линейное двупреломление света, а  $T_{OA}$  и  $T_{ЭФ}$  – соответственно естественное и магнитное циркулярное двупреломление. При изменении направления распространения света  $\mathbf{n}$  на  $(-\mathbf{n})$   $T_{OA}$  и  $T_{MЭЭ}$  изменяют свои знаки, поэтому при прохождении света туда – обратно эти эффекты в кристаллах, где могут проявляться в "чистом" виде, должны компенсироваться.

Мы видим, что даже без учета тензора  $\mu$  и поглощения группы симметрии  $G_{OCH}$  будут более разнообразными, чем предполагалось ранее в [28]. Согласно принципам Кюри и Неймана,

$$G_{OCH} \supseteq G_{ЛДП} \cap G_{ЭФ} \cap G_{OA} \cap G_{MЭ}. \quad (3.5.7)$$

Из (3.4.1) ясно, что в общем случае оптические свойства направления полностью описываются матрицами  $D$  и  $N$ , причем  $D$  характеризует интегральные свойства, а  $N$  – локальные оптические свойства направления в данной точке. Следовательно, группа симметрии  $G_N$  тензора  $N$  совпадает с  $G_{OCH}$  [227]:

$$G_{OCH} = G_N \supseteq G_R \cap G_S. \quad (3.5.8)$$

Здесь  $G_R$  и  $G_S$  – группы симметрии матриц  $R$  и  $S$  соответственно. Так как  $G_{OCH}$  – двумерные группы в фазовой плоскости, то [227]

$$2 \subseteq G_{OCH} \subseteq G_I, \quad (3.5.9)$$

где  $G_I$  – группа симметрии оператора проектирования  $I = -\mathbf{n}^\times \mathbf{n}^\times$ , которая совпадает с группой симметрии цилиндра  $G_C$ .

Нетрудно проверить, что полный список групп  $G_{OCH}$ , удовлетворяющих ограничениям (3.5.9), содержит 16 предельных и 16 кристаллографических то-

чечных шубниковских групп и, кроме 10 групп (3.5.2). Он включает следующие классы:

$$\infty 2\bar{1}, \infty \bar{1}1', \infty m1', \infty 2\bar{1}', \infty 2, \infty \bar{1}, \infty \bar{1}', \infty , \infty m, \infty m', \infty 1', \\ 222\bar{1}, mm2\bar{1}', mm21', 2\bar{1}1', 2\bar{1}, 21', 2\bar{1}', 2, mm2, m'm'2, 222.$$

Следовательно, список (3.5.2) групп  $G_{OCH}$ , предложенный в [32], является неполным и содержит только третью часть от всех возможных. Это произошло потому, что авторы [28] не учли ряд новых линейных оптических эффектов и не рассматривают явно уравнения связи.

Симметрия заданного направления в кристалле, согласно (3.5.1), характеризует общую симметрию всех его макроскопических свойств и определяется тензорами различных рангов. Симметрия же линейных оптических свойств направления, определяемая соотношениями (3.5.7)–(3.5.9), является обычно более высокой, поскольку характеризуется только тензорами 2 ранга. Поэтому алгоритм, предложенный в [28] для нахождения  $G_{OCH}$ , часто дает более низкую симметрию, чем в действительности. Это приводит к ошибочным выводам о возможности существования того или иного оптического эффекта. Так, например, согласно [28], в кубическом кристалле симметрии  $G_{кр} = \bar{4}3m1'$  вдоль произвольного направления, не связанного с элементами симметрии, линейное двупреломление света и оптическая активность могут существовать. По нашим же рецептам (3.5.7) и (3.5.8) они отсутствуют, как и должно быть согласно принципу Неймана [29, 31]. Аналогично, в кристалле гематита, находящегося в антиферромагнитном состоянии с группой симметрии  $\bar{3}m$ , нет спонтанной намагниченности, а, следовательно, и магнитной гиротропии. Однако, по [28], эффект Фарадея симметрично разрешен.

Практически часто необходимо знать, какие из оптических явлений возможны вдоль заданного направления волновой нормали  $n$  в кристалле. Решению этой проблемы была посвящена работа [228]. В [228] для всех 122 шубниковских классов магнитной симметрии было выяснено, какие из тензоров оптических свойств (двупреломления, оптической активности, эффекта Фарадея, магнитоэлектрического эффекта) отличны от нуля для различных направлений распространения света  $n$ . Результаты сведены в 10 таблиц для всех классов магнитоупорядоченных кристаллов.

Используя полученные таблицы [228], можно легко определить направления в каждом из них, вдоль которых наиболее удобно исследовать тот или иной оптический эффект, в зависимости от присутствия некоторых других явлений. Такая процедура часто позволяет выделить любой из эффектов (двупреломление, оптическая активность, эффект Фарадея, магнитоэлектрический эффект) в его "чистом" виде.

Таким образом, нами установлено, что симметрия оптических свойств направления в кристалле определяется симметрией оптических тензоров (3.5.5), (3.5.7), совпадает с симметрией тензора  $N$  (3.5.8) и поэтому [227] зачастую значительно выше симметрии самого направления.

Показано, что все группы  $G_{OCH}$  удовлетворяют условию (3.5.9), а их общее число значительно больше, чем ранее предполагалось. Установлены [228] оптические свойства направлений для всех 122 шубниковских классов магнитной симметрии.

### 3.6 Матрицы Мюллера

Преобразование полностью поляризованного излучения анизотропными средами описывается с помощью интегрального оператора распространения  $D$  (3.4.1), который можно представить в инвариантной форме (3.4.2) и в формализме 4-векторов (3.4.3).

В более общих случаях квазимонохроматическое световое частично поляризованное излучение можно характеризовать тензором когерентности  $\Phi$  [15, 217]. Линейными недеполяризующими<sup>\*)</sup> оптическими устройствами тензор  $\Phi$  преобразуется следующим образом [16]:

$$\Psi(z) = D\Psi(0)D^+. \quad (3.6.1)$$

Такой инвариантный формализм является компактным и удобным математическим аппаратом. Он успешно развивался, главным образом, в работах Федорова и Барковского (см., например, [16, 229, 97]).

Вместе с тем любые тензорные расчеты в конечном итоге производятся в некоторой определенной системе координат и, как отмечалось выше, целесообразно выбрать ортонормированный базис  $[\mathbf{h}_+^\circ, \mathbf{h}_-^\circ, \mathbf{q} \parallel \mathbf{z}]$ , в котором оператор  $D$  принимает форму  $(2 \times 2)$ -матрицы Джонса. Формализм  $(2 \times 2)$ -матриц Джонса обычно используют для описания преобразования когерентного и полностью поляризованного света.

Если же свет некогерентен и/или частично поляризован, то традиционно его характеристики описывают, наряду с матрицей  $\Phi$ , также с помощью четырех параметров Стокса, а линейные преобразования последних - с помощью вещественных  $(4 \times 4)$ -матриц  $\Gamma$ . Мюллера [217, 15, 230, 218]

$$S_i(z) = M_{ik} S_k(0); \quad i, k = 1, 2, 3, 4. \quad (3.6.2)$$

Пусть мы имеем недеполяризующий оптический элемент, оптические свойства которого в заданном направлении можно характеризовать планарным оператором  $D$ . Формализмы (3.6.1) и (3.6.2) для недеполяризующих систем эквивалентны. Оператор  $D$ , его матрица Джонса  $D$  имеют 7 независимых параметров, следовательно, и матрица Мюллера  $M$  рассматриваемых устройств также из 16 компонент содержит всего 7 независимых [230, 231].

---

<sup>\*)</sup> Недеполяризующей системой называется оптическое устройство, которое произвольное полностью поляризованное излучение преобразует также в полностью поляризованное.

Несмотря на то, что  $(4 \times 4)$ -матрицы Мюллера более громоздки, чем  $(2 \times 2)$ -матрицы Джонса, применять их часто удобнее. Ведь параметры Стокса  $S_k$  непосредственно дают поляризационные характеристики [15], в то время как в формализме комплексных  $(2 \times 2)$ -матриц или инвариантном формализме (3.6.1) необходимы еще дополнительные расчеты, чтобы извлечь содержащуюся там информацию. Следовательно, громоздкость матриц  $M$  - своеобразная плата за уменьшение объема расчетов. Самое главное, что для деполяризующих систем формализм (3.6.1) непригоден, и остается лишь формализм (3.6.2). Правда, для некоторых процессов рассеяния света Федоровым был предложен инвариантный подход с использованием тензора пучка [92, 16]. К сожалению, такое инвариантное описание для деполяризующих сред развито еще недостаточно. Поэтому будем применять аппарат классических матриц Мюллера и векторов Стокса.

Рассмотрим сначала структуру и свойства матриц Мюллера для недеполяризующих оптических систем (в частности, кристаллических линейных сред). Из (3.3.10) ясно, что существует связь между матрицами Джонса  $D$  и Мюллера  $M$ . Связь эта выражалась различными авторами в различных, часто громоздких, формах [217, 210, 230, 232, 224, 233, 141, 234]. Мы выразим  $M$  через  $D$ , используя 4-формализм.

Всякому 4-вектору  $a = [a_0, \mathbf{a}]$  можно поставить в соответствие дуальную блочную  $(4 \times 4)$ -матрицу  $a^\times$  соотношением [223]

$$a^\times = [a_0, \mathbf{a}]^\times \equiv \begin{bmatrix} a_0 & \mathbf{a} \\ \mathbf{a} & ia^\times \end{bmatrix}. \quad (3.6.3)$$

Тогда, как можно показать, матрица Мюллера  $M$  выражается через матрицу Джонса  $D$  следующим простым способом [223]:

$$M = D^\times (D^\times)^*. \quad (3.6.4)$$

Перемножая матрицы, находим [223]:

$$M = \frac{e^{-2\varphi''}}{|1 + \mathbf{q}^2|} \begin{bmatrix} 1 + |\mathbf{q}|^2; & i(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*) - i[\mathbf{q}\mathbf{q}^*] \\ i(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*) + i[\mathbf{q}\mathbf{q}^*]; & 1 - |\mathbf{q}|^2 - (\mathbf{q} + \mathbf{q}^*)^\times + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^* + \mathbf{q}^* \cdot \mathbf{q} \end{bmatrix}. \quad (3.6.5)$$

Здесь введен трехмерный комплексный вектор-параметр

$$\mathbf{q} = -i\mathbf{D}/D_0, \quad (3.6.6)$$

характеризующий матрицу Джонса  $D = [D_0, \mathbf{D}]$ .

А. Пусть  $N^2 \neq 0$ . Тогда из (3.4.7)

$$\mathbf{q} = \mathbf{p} \operatorname{tg}(\delta/2). \quad (3.6.7)$$

Почти в таком же виде (3.6.4), (3.6.5) матрица  $M$  была представлена в работе Г. С. Семина [235] на основе использования векторной параметризации группы Лоренца  $SO(3,1)$ , разработанной Федоровым [94]. Комплексный вектор-параметр  $\mathbf{q}$  параметризует  $(4 \times 4)$ -матрицы группы Лоренца, а матрица Мюллера

[235] получается из матрицы Лоренца  $L$  с помощью унитарного преобразования с точностью до скалярного множителя:  $M = e^{-2\varphi''} U L U^+$ .

Заметим, что при сопоставлении результатов различных авторов по матрицам Мюллера нужно иметь в виду, что они могут несколько различаться вследствие разного определения (по знаку) третьей компоненты  $s_3$  нормированного вектора Стокса.

Используемый нами выбор знака  $s_3$  и ему соответствующей формы матрицы  $M$  такой же, как в работах [224, 233, 230, 232, 16, 210, 212-218]. Встречаются и определения  $S$  и  $M$ , соответствующие противоположному, чем в (3.3.2), (3.3.23) знаку  $s_3$ : [231, 234, 15, 141, 221, 236]. Поэтому некоторые отличия вида (3.6.5) от [235] в знаках некоторых слагаемых объясняются противоположным определением знака  $s_3$  в [235, 141].

Подставляя в (3.6.7) выражение (3.6.5), после некоторых преобразований можно получить компоненты матрицы  $M$  в виде:

$$\begin{aligned} M_{00} &= e^{-2\varphi''} (\cos \delta' + (ch \delta'' - \cos \delta') p'^2); \\ M_{ik} &= e^{-2\varphi''} \left( (p' \cdot p' + p'' \times p'' \times) (ch \delta'' - \cos \delta') + \cos \delta' + (p'' sh \delta'' - p' \sin \delta')^\times \right)_{ik}; \\ M_{0k, k0} &= -e^{-2\varphi''} \left( (p' sh \delta'' + p'' \sin \delta') \pm (ch \delta'' - \cos \delta') [p' p''] \right)_{0k, k0}. \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

Здесь  $i, k = 1, 2, 3$ ;  $p = p' + i p''$ . Эти результаты соответствуют данным, полученным В. С. Меркуловым [224] для среды, характеризуемой одним тензором  $\epsilon$ , при заменах  $\delta \rightarrow 2\delta$ ,  $2\varphi'' \rightarrow \alpha$ ,  $p'_i, p''_i \rightarrow \xi_i, \zeta_i$ .

В прозрачных средах  $\delta'' = \varphi'' = 0$  и матрица  $M$  (3.6.8) упрощается. Если к тому же еще и собственные волны ортогональны ( $h_+ h_-^* = 0$ ), тогда матрица Джонса унитарна ( $DD^+ = I$ ), вектор  $p$  становится вещественным и вид матрицы Мюллера сильно упрощается:

$$M_{00} = I, \quad M_{0k, k0} = 0, \quad M_{ik} = \left( p \cdot p (1 - \cos \delta) + \cos \delta - \sin \delta p^\times \right)_{ik}. \quad (3.6.9)$$

Отсюда следует, что по мере распространения частично поляризованного излучения в такой безграничной однородной среде интенсивность  $I$  и степень поляризации  $p$  света не изменяются. Нормированный же 3-вектор Стокса  $s$  светового пучка по мере его распространения прецессирует вокруг оси  $z$  по круговому конусу  $s_i(z) = M_{ik} s_k(0)$ .

Вид матрицы  $M$  зависит от выбора параметризации вектора  $p$ . Возьмем, например,  $p$  в виде (3.4.5), тогда матрица  $M$  имеет форму, полученную в [154] (в несколько других обозначениях) для поглощающих магнитоупорядоченных кристаллов, описываемых одним тензором  $\epsilon^{-1}$ . Однако ясно, что эта форма пригодна [154] также для произвольных линейных сред, если оси  $x$  и  $y$  системы координат ориентировать вдоль биссектрис углов между главными осями эллипсов поляризации собственных волн.

Из (3.3.13) можно выразить  $p$  через нормированные векторы Стокса  $s_\pm$  собственных волн [223]

$$\mathbf{p} = (\mathbf{s}_+ + \mathbf{s}_- + [\mathbf{s}_- \mathbf{s}_+]) / (I - \mathbf{s}_+ \mathbf{s}_-). \quad (3.6.10)$$

Тогда получаем еще одну параметризацию матрицы Мюллера.

**Б.** Вдоль сингулярных осей  $N^2 = 0$ ; тогда (3.6.4), (3.6.5) остаются в силе, однако вместо (3.6.6) будем иметь [223]

$$\mathbf{q} = k_0 z N. \quad (3.6.11)$$

**В.** Как и для  $D$ , для матрицы  $M$  можно ввести дифференциальную матрицу Мюллера соотношениями [210, 218]

$$M = \exp(M_d z). \quad (3.6.12)$$

Можно убедиться, что дифференциальная матрица Мюллера  $M_d$  суть (см. [235, 218, 212])

$$M_d = -2k_0 \begin{bmatrix} N_0'' & N'' \\ N'' & N_0'' + (N')^\times \end{bmatrix}, \quad (3.6.13)$$

а ее собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  равны

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -k_0 (2N_0'' \pm \Delta n''), \\ \lambda_{3,4} &= -k_0 (2N_0'' \mp i \Delta n'). \end{aligned} \quad (3.6.14)$$

Собственные значения  $n_j = \exp(\lambda_j z)$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) интегральной матрицы Мюллера  $M$ , согласно (3.6.12), равны

$$v_{1,2} = \exp(-2\varphi'' \mp \delta''), \quad v_{3,4} = \exp(-2\varphi'' \pm i\delta'). \quad (3.6.15)$$

Пусть  $\Delta n \neq 0$ , тогда спектральное разложение матрицы  $M$  линейного недеполяризующего кристалла имеет вид

$$M = e^{-2\varphi''} (\rho_1 e^{-\delta''} + \rho_2 e^{\delta''} + \rho_3 e^{i\delta'} + \rho_4 e^{-i\delta'}). \quad (3.6.16)$$

Здесь коэффициент  $e^{-2\varphi''}$ , где  $\varphi'' = k_0 z N_0''$ , описывает изотропное поглощение.

Поляризационные проекторы  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$  матрицы  $M$  выражаются через поляризационные проекторы  $\rho_\pm$  (3.3.6) и собственные 4-векторы  $S_i, S_i^\sim$  матрицы  $M$  следующим образом:

$$\rho_{1,2} = \rho_\pm^\times (\rho_\pm^\times)^* = S_{1,2} \cdot S_{1,2}^\sim; \quad \rho_{3,4} = \rho_\pm^\times (\rho_\mp^\times)^* = S_{3,4} \cdot S_{3,4}^\sim. \quad (3.6.17)$$

Здесь  $\rho_\pm^\times$  –  $(4 \times 4)$ -матрицы, дуальные 4-векторам  $\rho_\pm$ . Точка между  $S$  и  $S^\sim$  означает их прямое произведение, т.е.  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$  – диады. Параметры  $S_1, S_2, S_3, S_4$  – правые собственные 4-векторы матрицы  $M$ , которые имеют вид

$$\begin{aligned} S_{1,2} &= [I, \mathbf{s}_\pm] / \sqrt{I - \mathbf{s}_+ \mathbf{s}_-} \parallel \rho_\pm \rho_\pm^+, \quad S_{3,4} = [I, \mathbf{d}_\pm] / \sqrt{I - \mathbf{d}_+ \mathbf{d}_-} \parallel \rho_\pm \rho_\mp^+, \\ \mathbf{d}_\pm &= (\mathbf{s}_+ + \mathbf{s}_- \pm i[\mathbf{s}_- \mathbf{s}_+]) / (I + \mathbf{s}_+ \mathbf{s}_-). \end{aligned} \quad (3.6.18)$$

Вещественная матрица Мюллера определена в комплексном линейном 4-векторном пространстве. Мы определили косоугольный прямой  $(S_1, S_2, S_3, S_4)$  и взаимный  $(S_1^{\sim}, S_2^{\sim}, S_3^{\sim}, S_4^{\sim})$  базисы. Определили операции сложения 4-векторов, а также 2 типа их умножения: векторное (3.3.3) и прямое тензорное или диадное (3.6.17). Векторы  $S_i$  и  $S_i^{\sim}$  являются ко- и контрвариантными 4-векторами соответственно, поэтому  $S_i$  переходят в  $S_i^{\sim}$  при изменении знаков их векторных частей. Отметим еще, что 4-векторы прямого и взаимного базиса ортогональны в смысле  $S_\alpha S_\beta^{\sim} = \delta_{\alpha\beta}$ , где  $\delta_{\alpha\beta}$  - 4-символ Кронекера.

Таким образом [223, 116], установлена структура интегральной и дифференциальной матриц Мюллера для недеполяризующих оптических систем и вычислены их собственные векторы и собственные значения.

### 3.7 Ограничения на компоненты матриц Мюллера деполаризующих оптических систем

Формализм 4-векторов Стокса и (4×4)-матриц Мюллера широко используется в поляризационной оптике для описания взаимодействия света с деполаризующими оптическими системами, например, при описании некогерентного рассеяния света [214, 231]. Матрица Мюллера  $M$  осуществляет линейное преобразование 4-параметров Стокса

$$\begin{bmatrix} S_0' \\ S_i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I' \\ I' p' s_i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{00} & M_{0k} \\ M_{i0} & M_{ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ Ips_k \end{bmatrix}. \quad (3.7.1)$$

Хотя в общем случае  $M$  имеет 16 независимых вещественных компонент [210], последние не могут быть произвольными, а должны удовлетворять некоторым ограничениям. Найдем их.

Как известно [214, 231], параметры Стокса для всех допустимых значений  $p$  и  $s$  на выходе системы должны обладать следующими свойствами:

$$S_0' \geq 0; \quad (3.7.2)$$

$$(S_0')^2 \geq (\mathbf{S}')^2. \quad (3.7.3)$$

Свойство (3.7.2) приводит к ограничению [237]

$$M_{00} \geq \sqrt{M_{0k}^2}, \quad (3.7.4)$$

а (3.7.3), в частности, к ограничению [237]

$$a_{00} \equiv M_{00}^2 - M_{i0}^2 \geq |\mathbf{b}|, \quad b_k \equiv a_{0k} = M_{00}M_{0k} - M_{n0}M_{nk}. \quad (3.7.5)$$

Как показано нами в [237], в общем случае свойство (3.7.3) можно свести к условию

$$f(\mathbf{s}) = \mathbf{s}c\mathbf{s} + 2\mathbf{b}\mathbf{s} \geq 0, \quad \mathbf{s}^2 = 1, \quad (3.7.6)$$

где компоненты матрицы  $c_{ik}$  определяются соотношениями

$$c_{ik} = a_{00} + \partial_{ik} + a_{ik}; \quad (3.7.7)$$

$$\tilde{M}GM = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{0k} \\ a_{i0} & a_{ik} \end{bmatrix}, \quad \text{где } G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.7.8)$$

Таким образом, на произвольную матрицу Мюллера  $M$  в (3.7.1) накладываются [237] два явных (3.7.4), (3.7.5) и одно неявное ограничение (3.7.6). Вещественные (4×4)-матрицы, удовлетворяющие условиям (3.7.4)–(3.7.6), будем считать физически реализуемыми.

Имея экспериментально измеренные численные значения компонент матрицы  $M$ , легко непосредственно убедиться, выполняются ли соотношения (3.7.4), (3.7.5). Неравенства же (3.7.6) представляют собой задачу нелинейного программирования [238] при наличии ограничений  $\mathbf{s}^2 = 1$  и требуют дополнительного анализа. С геометрической точки зрения (3.7.6) можно интерпретировать как условия, при которых две соприкасающиеся сферы  $(\mathbf{r} \pm \mathbf{b})^2 = \mathbf{b}^2$  находятся внутри эллипсоида  $\mathbf{r}_i c^{-2} \mathbf{r}_i = 1$ . Здесь  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}_i$  – радиус-векторы сфер и эллипсоида соответственно.

Проверку выполнимости неявного условия (3.7.6) можно произвести, используя метод неопределенных множителей Лагранжа [203]. Для этого следует решить систему уравнений [237]

$$(\lambda - c)\mathbf{s} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{s}^2 = 1, \quad (3.7.9)$$

затем для всех найденных значений  $\mathbf{s}$  и  $\lambda$  вычислить значения функции  $f = \lambda + \mathbf{b}\mathbf{s}$  и выбрать ее глобальный минимум, который для физически реализуемых матриц  $M$  должен быть неотрицательным. Подробный анализ условия (3.7.6) и системы (3.7.9) выполнен нами в работе [237], поэтому не будем здесь на нем останавливаться.

Пусть оптическое устройство является недеполяризующим, как, например, однородная анизотропная пластинка, тогда в (3.7.6) нужно взять знак равенства, и все упрощается. Тогда получаем девять билинейных скалярных соотношений

$$\mathbf{b} = 0, \quad c = 0, \quad (3.7.10)$$

связывающих параметры матриц  $M$  недеполяризующих систем. Результаты (3.7.10) другим путем были впервые получены нами в [154], а также одновременно в [232]. Как видно из (3.7.8), соотношения (3.7.10) эквивалентны также условию  $\tilde{M}GM = a_{00}G$ . [232].

Вопросы погрешностей и достоверности измерений при измерении матриц Мюллера оживленно дискутируются. Так, в [239] обсуждаются вопросы оптимизаций параметров схем измерения матриц Мюллера рассеяния света.

Минимизацию погрешностей предлагается производить путем минимизации числа обусловленности матрицы получающейся системы уравнений.

В [240] рекомендуется использовать соотношения между элементами матриц Мюллера, эквивалентные (3.7.10), для оценки свойств объектов и достоверности эксперимента. Авторы [240], по-видимому, не знают наших работ [154, 237], вышедших в печать еще в 1981 и 1990 годах!

Найденные нами [237] ограничения (3.7.4)-(3.7.6) или (3.7.10) позволяют ответить на вопрос, какой (деполяризующий, недеполяризующий или физически нереализуемый) оптический прибор описывается проверяемая (4×4)-матрица  $M$ . Если для экспериментально измеренной матрицы Мюллера ограничения (3.7.4)-(3.7.6) не выполняются, то это означает, что измерения проведены неверно или с большими погрешностями и результаты опыта нужно корректировать с учетом полученных неравенств.

Последнее неявное условие (3.7.6), которому должна удовлетворять матрица Мюллера любого реального физического объекта, требует [237] численного решения уравнения 6 степени относительно  $\lambda$ , поэтому для нахождения ограничений на  $M$  применим другой формализм.

Оригинальный подход к изучению структуры матриц Мюллера предложил С. Р. Клоуд [214, 241]. Использованный им теоретико-групповой формализм базируется на изоморфизме групп матриц  $SU(4)$  и  $SO(3)$ . Эти матрицы имеют по 16 независимых параметров. Вещественные независимые параметры матрицы Мюллера  $M$  не могут быть произвольными.

Установим структуру и найдем ограничения на компоненты произвольных матриц  $M$ . Согласно Клоуду [214], любой вещественной матрице Мюллера  $M$  всегда можно поставить во взаимно-однозначное соответствие эрмитову (4×4)-матрицу когерентности  $T$ :  $T_{\sigma\nu} \leftrightarrow M_{\sigma\nu}$ . Из [214] следует, что компоненты  $T_{\sigma\nu}$  можно выразить линейно через компоненты  $M_{\sigma\nu}$  следующим образом [242]:

$$\begin{aligned} T_{00} &= (M_{00} + A_{ii})/2, \quad T_{0k} = (M_{0k} + M_{k0})/2 + iG_k, \\ T_{ik} &= A_{ik} + \delta_{ik}(M_{00} - A_{ii})/2 + e_{ikn}(M_{n0} - M_{0n})/2, \\ T_{i0} &= (M_{i0} - M_{0i})/2 - iG_i; \quad M_{ik} = A_{ik} + e_{ink}G_n, \quad A_{ik} = A_{ki}. \end{aligned} \quad (3.7.11)$$

Здесь  $\delta_{ik}$  и  $e_{ink}$  – тензоры Кронекера и Леви-Чивита соответственно;  $i, k, n = 1, 2, 3$ .

Эрмитова матрица  $T$ , согласно Клоуду [214], должна быть неотрицательно определенной. Это означает также [214], что все 9 главных миноров матрицы  $T$  должны быть неотрицательными. Отсюда вытекают, как показал Клоуд [241], 9 ограничений – 9 неравенств, связывающих элементы матрицы  $M$ . Следуя нашим работам [242, 243] покажем, что общее число ограничений можно уменьшить с 9 до 3.

Известно [203], что все собственные значения  $\lambda_i$  неотрицательно определенных эрмитовых матриц должны быть неотрицательными. Используя теорему Декарта [203] о числе положительных корней уравнений нетрудно показать, что коэффициенты  $p_k$  характеристического уравнения

$$|T - \lambda| = \lambda^4 - p_1\lambda^3 + p_2\lambda^2 - p_3\lambda + p_4 = 0 \quad (3.7.12)$$

должны быть неотрицательными [242]:

$$p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (3.7.13)$$

Применяя метод Фаддеева [244], выразим коэффициенты  $p_v$  через компоненты  $T_{\sigma\nu}$  матрицы  $T$ :

$$\begin{aligned} p_1 = T_{\nu\nu} = 2M_{00}, \quad 4p_4 = 4p_1(p_1p_2 + p_3) + 2p_2^2 + p_1^4 - (T^4)_{\nu\nu}, \\ 2p_2 = p_1^2 - (T^2)_{\nu\nu}, \quad 3p_3 = (T^3)_{\nu\nu} - (3p_2 + p_1^2)p_1. \end{aligned} \quad (3.7.14)$$

Два неравенства в (3.7.14) можно заменить одним эквивалентным.

В итоге находим окончательные 3 неравенства

$$p_1 \geq \sqrt{2p_2 - (T^2)_{\nu\nu}}, \quad p_3 \geq 0, \quad p_4 \geq 0, \quad (3.7.15)$$

связывающие компоненты матрицы  $T$  таким образом, чтобы она являлась неотрицательно определенной. Так как компоненты матриц  $M$  и  $T$  однозначно линейно выражаются друг через друга (3.7.11), то тем самым мы девять неявных ограничений Клоуда [241] на матрицы Мюллера произвольных линейных оптических систем свели [243] к трем явным (3.7.15).

Перейдем теперь к параметризации матриц Мюллера общего вида. Используя спектральное разложение, матрицу  $T$  можно записать в форме

$$T = \sum_{\nu=1}^4 \lambda_{\nu} d^{(\nu)} \cdot d^{(\nu)*}, \quad (3.7.16)$$

где  $\lambda_{\nu}$  – вещественные неотрицательные собственные значения матрицы  $T$ . Без ограничения общности будем считать, что  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4 \geq 0$ .

Так как матрица  $T$  эрмитова, то ее собственные комплексные 4-векторы  $d^{(\nu)}$  можно выбрать ортонормированными:

$$d^{(\sigma)} d^{(\nu)*} = \delta_{\sigma\nu}, \quad d^{(\sigma)} = [I, i\mathbf{q}^{(\sigma)}] / \sqrt{I + |\mathbf{q}^{(\sigma)}|^2}, \quad (3.7.17)$$

откуда трехмерные комплексные векторы  $\mathbf{q}^{(\nu)*}$  при  $\sigma \neq \nu$  удовлетворяют условиям нормировки [242]  $\mathbf{q}^{(\sigma)} \mathbf{q}^{(\nu)*} = -I$ .

Для линейной недеполяризующей системы матрица  $M$  просто выражается [223] через матрицу Джонса  $D$  соотношением (3.6.4), тогда из (3.7.11) следует, что в последнем случае матрица  $T$  представляет собой диаду

$$T = 2D \otimes D^*, \quad (3.7.18)$$

выражающуюся через 4-вектор  $D_{\mu}$  матрицы Джонса  $D$ . Отсюда следует, что для недеполяризующей среды

$$\begin{aligned} \lambda_1 > 0, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0; \\ p_1 > 0, p_1 = p_2 = p_3 = 0. \end{aligned} \quad (3.7.19)$$

Таким образом, нами показано [242], что компоненты произвольной вещественной (4x4)-матрицы Мюллера  $M$  линейно выражаются через эрмитову неотрицательно определенную (4x4)-матрицу когерентности  $T$  и удовлетворяют ограничениям (3.7.13).

В общем случае матрицы  $T$  и  $M$  параметризуются с помощью 16 независимых скалярных параметров: 4-х неотрицательных скалярных величин  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  и 3-х комплексных трехмерных линейно независимых векторов  $\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)}, \mathbf{q}^{(3)}$ , удовлетворяющих условиям ортогональности (3.7.15).

При повышении симметрии среды общее число независимых параметров матрицы Мюллера может понижаться до 15, 12, и 7 при  $\lambda_4 = 0$ ,  $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$  и  $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$  соответственно. Последний вариант, как показано выше, соответствует недеполяризующей оптической системе и наиболее изучен. При этом матрица  $T$  является диадой, и все матрицы – Джонса  $D$ , Мюллера  $M$  и когерентности  $T$  – зависят только от семи вещественных параметров.

Полученные результаты позволяют установить, является исследуемая оптическая система деполяризующей или нет. Если матрица  $T$  обладает только одним положительным собственным значением  $\lambda_i$ , то система – недеполяризующая. Если же число ненулевых собственных значений  $\lambda_i$  больше одного (2, 3 или 4), то оптическая система – деполяризующая.

Если некоторые собственные значения отрицательны, то это означает, что измерения матрицы Мюллера  $M$  произведены с погрешностями, а отрицательные значения  $\lambda_i$  обусловлены шумами и помехами.

На этой же основе нами [243], следуя идее Клоуда [241], предложена методика поляризационной фильтрации оптического сигнала, суть которой заключается в следующем. Измеренная матрица Мюллера  $M$  объекта предварительно преобразуется в матрицу когерентности  $T$ . Затем из последней исключаются поляризационные проекторы, соответствующие отрицательно определенным собственным значениям; после чего отфильтрованная матрица  $T$  снова преобразуется в матрицу  $M$ .

Итак, с помощью теоретико-группового формализма, предложенного Клоудом, установлена структура и произведена параметризация [242, 243] матриц Мюллера произвольных линейных оптических систем. Показано [243], что девять ограничений-неравенств на компоненты матриц Мюллера физически реализуемых оптических объектов можно свести к трем явным неравенствам.

Предложенная [243] методика поляризационной фильтрации оптического сигнала является мощной и радикальной при обработке экспериментальных данных и, наряду с другими, может успешно использоваться.

# 4 ВЛИЯНИЕ ПОДРЕШЕТОЧНОЙ МАГНИТНОЙ СТРУКТУРЫ НА ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КРИСТАЛЛОВ

## 4.1 Тензор диэлектрической проницаемости в ферритах-гранатах

В предыдущем разделе мы не учитывали явно зависимости тензоров оптических свойств от параметров магнитного упорядочения. Сейчас влияние магнитной структуры будем учитывать явно. Сначала рассмотрим кристаллы, оптические свойства которых можно описывать одним тензором

$$\varepsilon^{-1} = \chi + i\mathbf{G}^{\times}, \quad \chi = \chi^{\circ} + \Delta\chi, \quad (4.1.1)$$

полагая  $\mu=1$ , а  $\alpha=\beta=0$ . Здесь  $\chi^{\circ}$  – тензор  $\varepsilon^{-1}$  в отсутствие магнитной структуры (в парамагнитной фазе),  $\Delta\chi$  и  $\mathbf{G}^{\times}$  – небольшие добавки, обусловленные магнитным упорядочением. Из принципа симметрии кинетических коэффициентов ( $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$ ) следует, что тензор  $\Delta\chi$  является четной – , а вектор гирации  $\mathbf{G}$  – нечетной функцией моментов  $M_i$  магнитных подрешеток. Отсюда получаем, что линейные (по  $M_i$ ) магнитооптические эффекты описываются антисимметричной  $i\mathbf{G}^{\times}$  частью тензора  $\varepsilon^{-1}$ , а квадратичные (по  $M_i$ ) – симметричным тензором  $\Delta\chi$ .

Заметим, что на практике обычно выбирается простейшая геометрия опыта и исследуются линейные либо квадратичные магнитооптические эффекты [51-54, 236, 241, 245-249], хотя, как показал эксперимент [53, 55, 9], во многих магнетиках эффект Коттона-Мутона по порядку величины сравним с фарадеевским вращением.

Для ферромагнетиков и ферримангнетиков обычно достаточно учесть зависимость матрицы  $\Delta\chi$  только от одного вектора ферромагнетизма  $\mathbf{m}$  и записать, что

$$\Delta\chi_{ij} = \alpha_{ijnk}^{mm} m_n m_k + \dots \dots \quad (4.1.2)$$

Тензор  $\alpha_{ijnk}^{mm}$  является полярным  $i$ -тензором 4 ранга, симметричным по перестановкам индексов внутри пар  $(i,j)$  и  $(n,k)$ . Матрицы  $\alpha^{mm}$  для разных классов симметрии табулированы и хорошо известны [28].

Вектор магнитной гирации  $\mathbf{G} = \mathbf{G}_{cn} + \mathbf{G}_{un}$ , отвечающий за фарадеевское вращение, является аксиальным  $c$ -вектором. Спонтанная часть  $\mathbf{G}_{cn}$  вектора  $\mathbf{G}$  возможна во всех магнетиках, в которых симметрично разрешена макроскопическая намагниченность  $\mathbf{M}$ , а ее ориентация определяется симметрией кристалла. Следует только подчеркнуть, что в средах низших сингоний  $\mathbf{G}_{cn}$  и  $\mathbf{M}$  не обязаны быть параллельными, хотя угол между ними будет небольшим, порядка анизотропии. Вектор же  $\mathbf{G}_{un}$  может индуцироваться внешними воздействиями, обычно магнитным полем.

Среди кристаллов большой интерес представляют ферриты-гранаты, которые являются основными рабочими средами для запоминающих устройств

на цилиндрических магнитных доменах, а также для магнитооптических приборов различного назначения [12, 13]. Вся гиротропия и анизотропия феррита-граната обусловлена его магнитным упорядочением, в процессе которого кубический кристалл в общем случае превращается в двуосный. При этом важное значение в технических приложениях имеет возможность изменения направления вектора намагнитченности  $\mathbf{M}$  и тем самым также дупреломления и ориентации оптических осей<sup>\*)</sup> кристалла в широких пределах с помощью внешних воздействий.

Ранее [151, 250, 245, 248, 249] рассматривалась деформация оптической индикатрисы для случаев, когда вектор  $\mathbf{M}$  расположен в одной из плоскостей симметрии кристалла. Найдем ориентацию оптических осей  $c_i$  тензора  $\chi$  кристаллов ферритов-гранатов при произвольном направлении вектора намагнитченности  $\mathbf{M}$  относительно кристаллографических осей. Поглощением пренебрегаем.

Симметричную часть  $\chi$  тензора  $\varepsilon^{-1}$  феррита-граната представим в виде

$$\chi = \chi^\circ + r_1 + r_2 \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} + r_3 (e_1^2 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 + e_2^2 \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 + e_3^2 \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3). \quad (4.1.3)$$

Здесь  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ - ортонормированный базис;  $r_1, r_2, r_3$  – магнитооптические параметры кристалла, пропорциональные  $M^2$ ;  $e_i$  компоненты нормированного вектора  $\mathbf{e} = \mathbf{M} / |\mathbf{M}| \equiv \mathbf{m}$ .

Собственные значения  $\lambda_i$  девиатора  $\Lambda = \beta - \beta_c / 3$  тензора  $\beta = \chi - \chi^\circ$  равны [251]

$$\lambda_i = 2G_i \sin [2p(i+1)/3 - \psi], \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.1.4)$$

где угол  $\psi$  ( $\psi \leq \pi/6$ ) вводится соотношениями

$$\sin 3\psi = |\Lambda| / (2G^3), \quad 3G^2 = -(\bar{\Lambda})_c, \quad (4.1.5)$$

и поэтому коэффициенты  $\Lambda$  и  $G$  выражаются через безразмерный магнитооптический параметр  $k = r_2 / r_3$  и два инварианта тензора  $\beta$  [251]. Вычислив  $\lambda_i$ , нетрудно рассчитать ориентацию главных осей оптической индикатрисы феррита-граната по формулам, приведенным нами в [251].

Как известно [8], оптические оси негиротропного прозрачного кристалла лежат в плоскости его двух собственных векторов, отвечающих наибольшему и наименьшему собственным значениям тензора  $\chi$ , а угол  $\theta$  между осями определяется соотношением

---

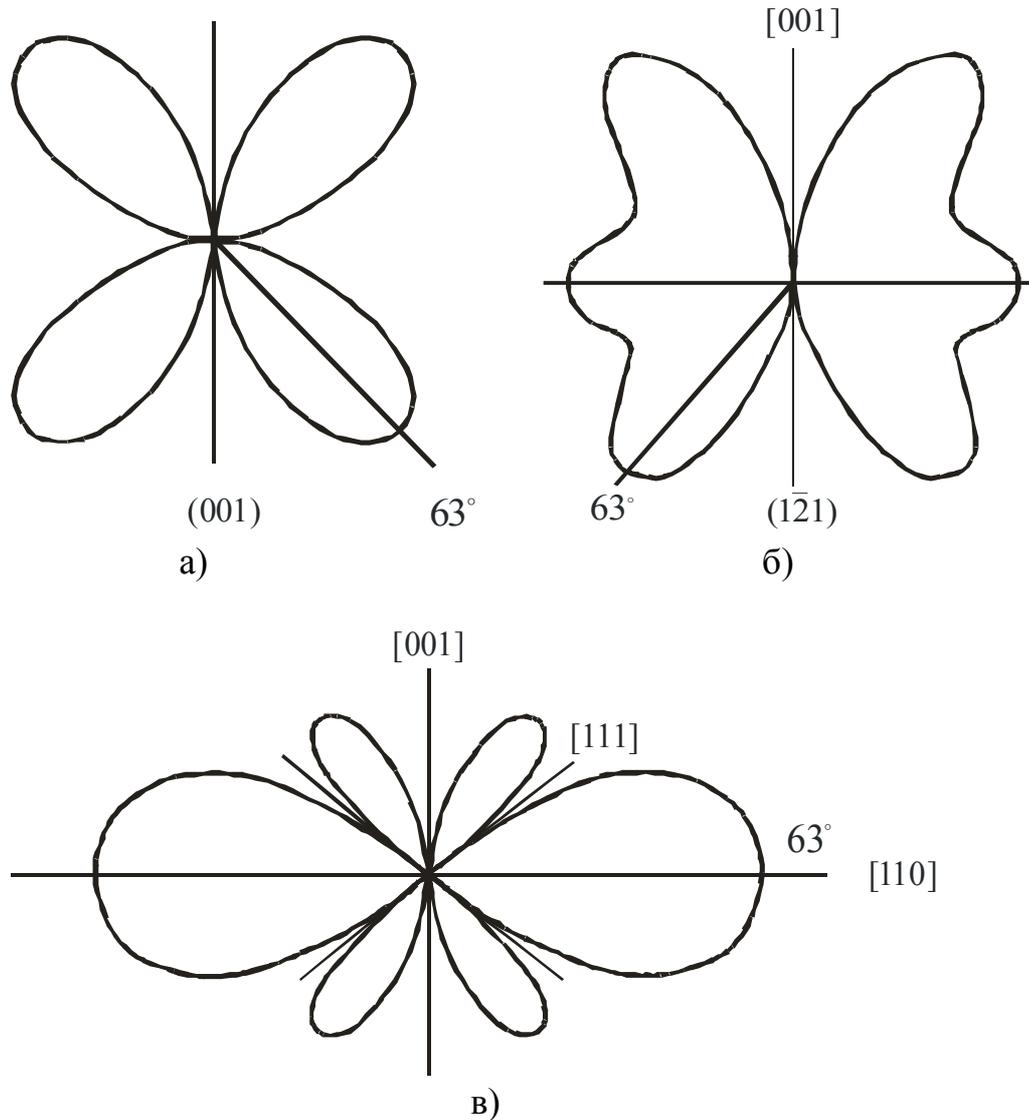
<sup>\*)</sup> Под оптическими осями здесь, как и зачастую в литературе, подразумеваются направления в кристалле, вдоль которых исчезает линейное дупреломление. Однако циркулярное дупреломление, описываемое вектором  $\mathbf{G}^M$ , при этом может иметь место.

$$\operatorname{tg}^2(u/2) = (\lambda_g - \lambda_m) / (\lambda_m - \lambda_p). \quad (4.1.6)$$

Здесь  $\lambda_p$ ,  $\lambda_m$ ,  $\lambda_g$  - меньшее, среднее и большее собственные значения дивиа-тора  $\Lambda$  тензора  $\chi$  соответственно. Используя (4.1.5), получаем простое выраже-ние [251]

$$\cos\theta = \sqrt{3} \operatorname{tg}\psi \quad (4.1.7)$$

для угла  $\theta$ . Найденные соотношения (4.1.5), (4.1.7) позволяют рассчиты-вать угол между оптическими осями кристаллов непосредственно, не прибегая предварительно к вычислению собственных значений тензора  $\chi$ .



**Рисунок 4** – Зависимость угла между осями кристалла  $Y_3Fe_5O_{12}$  от на-правления вектора намагниченности в различных плоскостях:

а) (001); б) (120); в) (110).

Внешним полем  $H$  можно изменять направление  $M$ . При этом изменяется также двуупреломление и направления оптических осей  $c_1$  и  $c_2$ .

На рисунках 4(а, б, в) показано изменение угла между оптическими осями феррита-граната при вращении  $\mathbf{M}$  в некоторых плоскостях кристалла, рассчитанное по формуле (4.1.7) для образца  $Y_3Fe_5O_{12}$ . Экспериментальное значение параметра  $k=r_2/r_3=1.416$  для  $\lambda=1.15$  мкм при  $T=295K$  взято из работ [248, 249]. Видно, что кристалл становится одноосным только при ориентации  $\mathbf{M}$  вдоль кристаллографических осей типа [100], [111], а в остальных же случаях феррит-гранат иттрия оптически двухосен, причем максимальное значение угла между индуцированными осями  $\theta_m \approx 63^\circ$  достигается при  $\mathbf{M} \parallel [110]$  (рисунки 4а, 4в).

Таким образом, в ферритах-гранатах, в зависимости от ориентации вектора намагниченности, проявляется сильная анизотропия оптических свойств.

Вообще говоря, тензор  $\chi$  в ферритах-гранатах является двуосным. Как показано в [251], кристалл может быть одноосным лишь в следующих случаях:

а)  $\mathbf{M} \parallel \mathbf{L}_4$  или  $\mathbf{L}_3$  при этом оптическая ось  $\mathbf{c} \parallel \mathbf{M}$ ; б)  $k=\infty$ , т.е.  $r_2=0$  при произвольном  $\mathbf{M}$ . Теперь ось  $\mathbf{c} \parallel \mathbf{a}_3$ ; в) единичный вектор намагниченности произвольно расположен в координатной плоскости симметрии типа [001] и  $k=-2$ . При этом оптическая ось  $\mathbf{c}$  и вектор  $\mathbf{M}$  расположены симметрично относительно кристаллографических осей  $\mathbf{L}_4$  этой же плоскости так, что при повороте намагниченности  $\mathbf{M}$  в данной плоскости ось  $\mathbf{c}$  поворачивается в противоположном направлении на тот же угол. Векторы  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{c}$  становятся параллельными при  $\mathbf{M} \parallel \mathbf{L}_4$  и перпендикулярными при  $\mathbf{M} \parallel \mathbf{L}_2$ .

Все три собственные значения тензора  $\chi$  совпадают, а  $\chi$  остается изотропным (скалярным) в случаях [251]: г)  $\mathbf{M} \parallel \mathbf{L}_4$  и  $k=-1$ ; д)  $\mathbf{M} \parallel \mathbf{L}_3$  и  $r_2=0$ .

В [248, 52] приведены графики температурных зависимостей магнитооптического параметра  $a=(1+k)^{-1}$  для различных ферритов-гранатов при  $\mathbf{M} \parallel [110]$ , вычисленные из результатов измерения линейного двупреломления света. Авторы специально подчеркивают, что для  $Sm_3Fe_5O_{12}$  при  $T \sim 100K$  для света, распространяющегося вдоль оси [001] перпендикулярно намагниченности  $\mathbf{M} \parallel [110]$ , двупреломление не наблюдается. При этом, согласно данным [248, 52],  $k=\infty$ , т.е.  $r_2=0$ . Этот результат легко объясним, так как он полностью соответствует рассмотренному нами случаю б). Такое же превращение двухосного тензора  $\chi$  в одноосный наблюдалось также для кристаллов феррита-граната гольмия при  $T \sim 130K$  и диспрозия при  $T \sim 230K$  [248].

Параметр  $k$  принимал значение  $k=-2$  также для гольмиевого феррита-граната вблизи температуры компенсации. При этом также, согласно пункту в), тензор  $\chi$  становится одноосным с оптической осью  $\mathbf{c} \perp \mathbf{M}$ , причем  $\mathbf{c} \parallel [1\bar{1}0]$ , что и наблюдалось экспериментально [248, 52].

Отметим, что до нашей работы [251] считалось [248, 245, 53, 54], что кристалл может быть одноосным в случаях б) и в) лишь при дополнительном условии ориентации  $\mathbf{M}$  вдоль кристаллографических осей второго порядка типа [110]. На самом же деле это дополнительное условие является излишним.

Согласно [248, 52], для самариевого феррита-граната в районе  $T \sim 100K$  при  $\mathbf{M} \parallel [111]$  исчезало линейное двупреломление. Для диспрозиевого и голь-

миевого ферритов-гранатов в точках компенсации намагниченности  $230K$  и  $145K$  соответственно при ориентации вдоль осей  $[111]$  и  $[100]$  также исчезало двупреломление. Эти результаты следует интерпретировать как превращение тензора  $\chi$  в изотропный (сферический), согласно случаям г) и д).

Ряд полученных в данном параграфе результатов можно обобщить. Так, соотношения (4.1.1)-(4.1.5) пригодны также и при учете поглощения света, а выражения (4.1.5), (4.1.6), (4.1.7) могут быть использованы и для других типов магнитных кристаллов.

Найдена ориентация оптических осей  $c_i$  кристаллов ферритов-гранатов при произвольном направлении вектора намагниченности  $M$  и установлены [251] условия одноосности и изотропности тензора  $\chi$ . Экспериментальные данные по ферритам-гранатам подтверждают эти выводы. В [250] в рамках двухподрешеточной модели была исследована деформация оптической индикатрисы ферритов-гранатов и ориентация индуцированных оптических осей. С учетом неколлинеарности магнитных подрешеток найдены условия одноосности и изотропности тензора  $\chi$ , которые оказались весьма разнообразными.

## 4.2 О феноменологической тензорной кристаллофизике двухподрешеточных магнетиков. Их симметрия и макроскопические свойства

В предыдущем разделе мы обсуждали свойства тензора обратной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon^{-1}$  и его зависимость от вектора намагниченности  $M$ . Многие магнитные кристаллы, например антиферромагнетики, имеют, по крайней мере, две магнитные подрешетки, поэтому необходимо рассмотреть также и такие среды. Кроме того, от параметров магнитного упорядочения и внешних воздействий могут сложным образом зависеть не только тензор  $\varepsilon^{-1}$ , но и, в более общих случаях, тензоры оптической активности  $\alpha_{OA}$ , тензоры магнитоэлектрического эффекта  $\alpha_{ME}$ , тензор  $\mu$  и др.

Симметрия магнитных сред, обычно характеризуемая шубниковскими [26] магнитными группами, позволяет феноменологически описывать многие их свойства [28]. Более информативным однако является описание магнитоупорядоченных кристаллов с помощью нескольких магнитных подрешеток. Как известно, свойства большинства магнетиков достаточно хорошо описываются двухподрешеточной моделью [24, 49] с двумя векторами: намагниченности  $m = (m_1 + m_2)/(2m_0)$  и антиферромагнетизма  $l = (m_1 - m_2)/(2m_0)$ .

Рассмотрим вопросы феноменологического симметричного описания физических свойств и явлений в двухподрешеточных магнетиках с совпадающими химической и магнитной ячейками. При теоретико-групповом анализе полезно связать интересующие нас физические явления в кристалле с векторами  $m$  и  $l$  его магнитной подсистемы. Магнитная симметрия, а вместе с ней величина и ориентация векторов  $m$  и  $l$  могут легко изменяться при внешних воздействиях среды: температуры, магнитного поля, давления и пр. При анализе

целесообразно разделить обменные взаимодействия, приводящие к возникновению магнитной структуры, от значительно более слабых релятивистских взаимодействий, ответственных, в частности, за ориентацию спиновой конфигурации относительно кристаллографических осей [49]. Как известно, при изменении полной магнитной симметрии кристалла обменная симметрия его ионной ферро– и/или антиферромагнитной структуры часто остается неизменной. Поэтому в таких случаях компоненты тензора исследуемого физического свойства кристалла удобно разложить в ряд по степеням компонент  $l_k$ ,  $m_n$ , рассматривая их как внешние воздействия на кристалл с неизменной обменной симметрией [47, 252, 50, 43].

Например, для описания влияния магнитного упорядочения на кристаллооптические свойства обсуждаемых магнетиков представим компоненты  $\varepsilon^{-l}_{ij}$  тензора обратной диэлектрической проницаемости в виде

$$\varepsilon_{ij}^{-l} = \varepsilon_{ij}^{\circ-l} + \alpha_{ijn}^m m_n + \alpha_{ijn}^l l_n + \alpha_{ijnl}^{mm} m_n m_l + \alpha_{ijnl}^{ll} l_n l_l + \alpha_{ijnl}^{lm} l_n m_l + \dots \quad (4.2.1)$$

Здесь тензор  $\varepsilon^{\circ-l}$  характеризует оптические свойства в парамагнитной фазе, величины  $\alpha^m$  и  $\alpha^l$  определяют эффект Фарадея, а тензоры  $\alpha^{mm}$ ,  $\alpha^{ll}$ ,  $\alpha^{lm}$  описывают магнитное линейное двупреломление света. В первом приближении можно считать, что векторы  $m$  и  $l$  зависят от напряженности магнитного поля, а тензорные коэффициенты разложения  $\alpha^m$ ,  $\alpha^l$ ,  $\alpha^{mm}$ ,  $\alpha^{ll}$  не зависят от прилагаемых внешних воздействий (например, магнитного поля) и определяются обменной симметрией кристалла. При этом, если возникающие (в обменном приближении) при магнитном упорядочении компоненты  $m_i$ ,  $l_n$  преобразуются по одномерным неприводимым представлениям парамагнитной фазы, то обменные структуры двухподрешеточных магнетиков являются коллинеарными [41, 49]. Далее мы будем рассматривать только такие магнетики.

В ферримагнетиках с кристаллографически неэквивалентными подрешетками  $m$  и  $l$  обладают одинаковыми трансформационными свойствами. Иначе дело обстоит при наличии эквивалентных подрешеток.

По терминологии Турова [39, 24], операции симметрии, переставляющие (не переставляющие) подрешетки магнетика, называются нечетными (четными) по отношению к этой структуре и помечаются значками  $(-)$  и  $(+)$  соответственно. Важно иметь в виду, что вектор  $l$  преобразуется так, как и вектор  $m$  только под действием четных операций симметрии, однако дополнительно меняет знак под воздействием нечетных операций [24]. Это означает, что, наряду с обычными операциями симметрии, в магнетиках с кристаллографически эквивалентными магнитными подрешетками фактически неявно вводится и используется дополнительная операция перестановки местами подрешеток или, более кратко, операция обмена подрешеток  $I^{(-)}$ . Поэтому классические шубниковские группы магнитной симметрии недостаточно полно характеризуют уже двухподрешеточные магнетики, не представляя полной информации о симметрии векторов  $m$  и  $l$ . Естественно поставить вопрос: как более полно характеризовать симметрию векторов  $m$ ,  $l$  и соответствующих им магнитных структур, обменные группы симметрии которых содержат нечетные операции? Извест-

но, что в подобных случаях можно вводить более общие группы цветной симметрии [42, 31], интерпретируя значки (+), (–) как символы дополнительной нагрузки на элементы точечной группы симметрии кристалла. С этой точки зрения обменная симметрия двухподрешеточных магнетиков характеризуется  $P$ -группами цветной симметрии [42, 31].

Феноменологическая тензорная кристаллофизика немагнитных сред развита хорошо. Рассчитаны и табулированы, в частности, все отличные от нуля компоненты полярных и аксиальных тензоров различных рангов. Такие данные для тензоров до 4-го ранга включительно можно найти, например, в [28], а результаты работы [253] применить для расчета вида тензоров более высоких рангов. Аналогичные таблицы необходимы и для соответствующих тензоров в магнитной кристаллофизике. Следует отметить, конечно, что, с точки зрения теории представлений групп, информация о группе симметрии парамагнитной фазы и о ее неприводимых представлениях, индуцирующих магнитные фазовые переходы, является обычно достаточной для расчета трансформационных свойств тензорных величин в магнетиках. Однако соответствующие расчеты, особенно для тензоров высоких рангов, могут оказаться достаточно громоздкими и сложными. Желательно поэтому готовую известную табулированную информацию о симметрии тензоров в немагнитных средах использовать также для магнитных сред.

Идея установления и использования изоморфизма магнитных (шубниковских) и кристаллографических групп симметрии для расчета тензорных характеристик магнетиков была высказана и реализована Сиротиным [28], а также Инденбомом [33, 34] и Бирссом [37].

В кристаллофизике немагнитных сред все тензоры по отношению к операции пространственной инверсии  $\bar{I}$  достаточно разделить на тензоры четного и нечетного типов. В классической магнитной кристаллофизике при учете новой операции симметрии – операции антиотожествления  $\underline{I}$ , изменяющей знаки всех токов и магнитных моментов на противоположные и часто называемой операцией инверсии времени, кристаллы характеризуются более общими шубниковскими [26, 28] группами симметрии. При этом различают уже четыре типа тензоров: четного –, электрического –, магнитного – и магнитоэлектрического типов, преобразующихся по неприводимым представлениям группы  $\bar{I}\underline{I}$ . Симметрия и трансформационные свойства этих тензорных величин определены в [28].

Обобщая подход [28] и учитывая явно новую возможную операцию перестановки подрешеток  $I^{(-)}$  мы находим, что любую операцию точечной группы магнитной симметрии двухподрешеточного магнетика, определяемую на расширенной ортогональной группе  $\infty\infty\bar{I}\underline{I}I^{(-)}$ , можно записать в форме [252-254]

$$G(m, p, n) = (\bar{I})^m (\underline{I})^n (I^{(-)})^p R(\mathbf{k}, \varphi). \quad (4.2.2)$$

Здесь  $\bar{I}$  – оператор пространственной-,  $\underline{I}$  – временной инверсии;  $I^{(-)}$  – оператор перестановки подрешеток;  $R$  – оператор поворотной оси симметрии на угол  $\varphi$ ;  $\mathbf{k}$  – волновой вектор;  $m, n, p = 0, 1$ .

Следовательно, все тензоры, характеризующие получающиеся таким путем группы цветной симметрии (точнее, кратной антисимметрии [42]) исследуемых двухподрешеточных магнетиков, преобразуются по восьми неприводимым представлениям абелевой полной инверсионной группы  $\bar{1} \underline{1} I^{(-)}$ . При этом число различных типов таких тензоров, определяемых на группе  $\infty \infty \bar{1} \underline{1} I^{(-)}$ , удваивается и достигает восьми (см. таблицу 3) [252-255].

**Таблица 3 – Базисные тензоры и неприводимые представления группы  $\underline{1} \bar{1} I^{(-)}$**

Тип базисного тензора	Операция симметрии								Неприводимое представление	Коэффициент $\varepsilon$
	1	$\bar{1}$	$\underline{1}$	$1^{(-)}$	$1^{(-)}$	$\underline{1}^{(-)}$	$\underline{1}^{(-)}$	$\underline{1}^{(-)}$		
1. Четный (+)	1	1	1	1	1	1	1	1	$\Gamma_4^+$	0
2. Электрический (+)	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	$\Gamma_3^+$	$m$
3. Магнитный (+)	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	$\Gamma_m^+$	$n$
4. Четный (-)	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	$\Gamma_4^-$	$p$
5. Электрический (-)	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	$\Gamma_3^-$	$m+p$
6. Магнитный (-)	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	$\Gamma_m^-$	$n+p$
7. Магнитоэлектрический (+)	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	$\Gamma_{m3}^+$	$m+n$
8. Магнитоэлектрический (-)	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	$\Gamma_{m3}^-$	$m+n+p$

Устанавливая и используя изоморфизм между изучаемыми магнитными группами и хорошо исследованными немагнитными, нетрудно показать, что компоненты тензоров  $A$   $n$ -го ранга всех восьми типов обладают следующими [252-254] трансформационными свойствами

$$A_{i_1 \dots i_n} = (-1)^\gamma R_{i_1 k_1} \dots R_{i_n k_n} A_{k_1 \dots k_n}, \quad (4.2.3)$$

где  $R_{i_n k_n}$  – матрица собственных пространственных вращений. Коэффициенты же  $\gamma=0, 1 \dots$  являются характерами групповой операции  $G(m, n, p, R)$ , зависят от

ее нагрузок  $m, n, p$ , от типа тензора  $A_{k_1 \dots k_n}$  и определяются по таблице 3. Аналогичные результаты независимо получены также в [255].

Развивая терминологию Сиротина [28], величины  $\alpha^{mm}$ ,  $\alpha^{ll}$  в (4.2.1) назовем тензорами четного (+) типа,  $\alpha^{lm}$  – четного (–) типа;  $\alpha^m$ ,  $m$  и  $\alpha^l$ ,  $l$  – тензорами магнитного (+) и магнитного (–) типов соответственно. Дополнительно разлагая  $\varepsilon^{-l}$  по вектору спонтанной электрической поляризации  $\mathbf{P}$  или электрического поля  $\mathbf{E}$ , мы получили бы также тензоры еще четырех типов.

Таблица 3 позволяет также редуцировать формальные задачи определения отличных от нуля тензоров шести нечетных типов (№№ 3–8), характеризующих свойства двухподрешеточных магнетиков, к уже решенным задачам расчета вида матриц тензоров электрического (+) типа немагнитных сред. Действительно, согласно (4.2.3), операция симметрии  $G(m, n, p, R)$  действует на тензор  $A$  произвольного ранга и типа точно также, как операция  $G(\gamma, \theta, \theta, R)$  действует на соответствующий тензор электрического (+) типа немагнитной среды с той же внутренней симметрией, что и  $A$ . Для немагнитных же кристаллов все отличные от нуля компоненты тензоров электрического типа до четвертого ранга приведены, например, в [28, 20, 37], а более высокого ранга в [37, 253].

Следовательно, предложенный в [252–254] симметричный метод, использующий установленный изоморфизм магнитных и немагнитных групп, позволяет редуцировать формальные задачи нахождения правил отбора для тензоров шести нечетных типов двухподрешеточных магнетиков к уже решенным задачам вычисления форм тензоров немагнитных сред.

Такой подход дает возможность, используя информацию об обменной группе симметрии и не проводя утомительных расчетов, сразу получать явные феноменологические выражения для инвариантов в теории магнитных фазовых переходов второго рода, для магнитооптических, пьезомагнитных и других свойств двухподрешеточных магнетиков.

### 4.3 Кристаллооптические свойства двухподрешеточных магнетиков

Мы выяснили, что тензоры макроскопических свойств двухподрешеточных магнетиков, коллинеарных в обменном приближении, естественно классифицируются по восьми неприводимым представлениям группы  $\bar{1}11^{(-)}$  и делятся на 8 типов. Обменные взаимодействия приводят к образованию магнитной структуры и характеризуются обменными точечными группами симметрии (обменными классам). Обменные классы рассматриваемых сред описывают коллинеарные магнитные структуры, поэтому возникающие магнитные векторы (в обменном приближении) преобразуются по одномерным вещественным неприводимым представлениям парамагнитной фазы кристалла [41, 42]. Отсюда следует, что обменные магнитные классы таких двухподрешеточных магнетиков изоморфны 90 белым и черно-белым шубниковским [26] классам антисимметрии. Их можно получить также заменой операции ан-

тиотождествления  $\tilde{I}$  на  $I^{(-)}$ . Например, в кристалле  $CoF_2$  при переходе в антиферромагнитное состояние в обменном приближении возникает одна компонента  $l_2$  вектора антиферромагнетизма  $I$ , преобразующаяся по представлению  $B_{2g}$ . Чтобы получить обменный антиферромагнитный класс, достаточно все операции симметрии парамагнитной фазы, соответствующие характерам  $(-I)$  представления  $B_{2g}$ , умножить на  $I^{(-)}$ ; тогда получаем  $4_z^{(-)} 2_d^{(-)} \bar{I}^{(+)}$ . Здесь в символе антиферромагнитной структуры приведены только генераторы группы. Отметим также, что в работах [256, 257] обменный класс кристалла  $CoF_2$  записывается как  $4_z^{(-)} 2_d^{(+)} \bar{I}^{(+)}$ ; ясно, что обе формы записи определяют одну и ту же антиферромагнитную структуру, но соответствуют различным ориентациям системы координат относительно кристаллографических осей.

Коллинеарные обменные магнитные структуры двухподрешеточных магнетиков можно разделить [253] на 3 типа: структуры  $I$ , не содержащие центра инверсии  $\bar{I}$  в качестве элемента симметрии (48 классов); структуры  $II$ , которые являются четными относительно  $\bar{I}$ , т.е. содержат операцию  $\bar{I}^{(+)}$ ; структуры  $III$ , нечетные относительно  $\bar{I}$ , т.е. содержащие операцию  $\bar{I}^{(-)}$ .

Целесообразность такого деления естественно вытекает из следующих физических соображений: в структурах  $II$  могут проявляться эффекты типа слабого ферромагнетизма [43], пьезомагнетизма [8, 47] и запрещено существование магнитоэлектрического эффекта; в структурах  $III$ , наоборот, может иметь место магнитоэлектрический эффект [258, 259]; в структурах  $I$  возможно одновременное существование эффектов обоих типов.

Однако в литературе полный перечень обменных классов магнитных структур рассматриваемых кристаллов ранее не приводился. Так, в работе [23] при записи элементов симметрии магнитных структур не конкретизировалось, являются ли эти элементы обычными поворотными или инверсионными осями. В [42] указано только общее число таких магнитных структур для каждого кристаллического класса. Поэтому в работе [253] мы привели список магнитных структур  $I$  и  $II$  типов с полным указанием операций симметрии для генераторов групп. Структуры  $III$  там не приводятся, поскольку они получаются из структур  $II$  путем простой замены операции  $\bar{I}^{(+)}$  на  $\bar{I}^{(-)}$ .

Релятивистские (спин-спиновые и спин-орбитальные) взаимодействия понижают обменную симметрию и приводят обычно к возникновению слабонекллинеарных магнитных структур. Такие слабоферромагнитные структуры характеризуются релятивистскими группами симметрии, относительно которых векторы  $m$  и  $l$  должны быть инвариантными. В то же время, например, шубниковская точечная группа релятивистской симметрии  $m$  не содержит информации о том, является ли данный кристалл ферромагнетиком или слабым ферромагнетиком. Если же записать группу в виде  $m^{(-)}$ , то становится ясно, что мы имеем слабый ферромагнетик, так как операция  $m^{(-)}$  разрешает существование вектора  $m \parallel \bar{2}$  и вектора  $l \perp \bar{2}$ . Сейчас можно ответить на поставленный

в разделе 4.2 вопрос о том, как более полно характеризовать симметрию двух-подрешеточных магнетиков.

Релятивистские группы симметрии двухподрешеточных магнетиков точнее характеризовать не шубниковскими группами, а группами кратной [35] антисимметрии, включающими следующие 3 основные антиоперации:  $\bar{1}\bar{1}\bar{1}^{(-)}$ , а в более общих случаях – группами цветной симметрии, точнее, группами  $Q$ -симметрии [36].

Обратимся теперь к вопросам расчета вида тензоров макроскопических тензорных свойств двухподрешеточных магнетиков. Обменная симметрия определяет форму макроскопических тензоров, в частности, правила отбора для тензоров  $\alpha^m$ ,  $\alpha^l$ ,  $\alpha^{mm}$ ,  $\alpha^{ll}$ ,  $\alpha^{lm}$ , описывающих кристаллооптические свойства магнитных сред в разложении (4.2.1) тензора обратной диэлектрической проницаемости. Магнитооптические тензоры 4 ранга  $\alpha^{mm}$ ,  $\alpha^{ll}$ ,  $\alpha^{lm}$  вносят вклады в линейное магнитное двупреломление света. Компоненты  $\alpha^{mm}$  возможны во всех ферро-, ферримагнетиках и слабых ферромагнетиках. Антиферромагнитный вклад в линейное магнитное двупреломление дают величины  $\alpha^{ll}$ , причем в антиферромагнетиках он является преобладающим. Матрицы тензоров  $\alpha^m$ ,  $\alpha^l$ ,  $\alpha^{mm}$ ,  $\alpha^{ll}$  по форме совпадают с матрицами фотоупругих коэффициентов и хорошо известны [28].

Матрицы же  $\alpha^{lm}$  описывают билинейное по векторам  $m$  и  $l$  двупреломление света и возможны [51, 52] только в слабых ферромагнетиках, где некоторые  $l_i$  преобразуются так же, как компоненты  $m_k$ . По симметрии тензоры  $\alpha^{lm}$  аналогичны тензорам обратного пьезомагнитного эффекта, которые приведены в [47]. Вместе с тем правила отбора для компонент матриц  $\alpha^{lm}$  отнюдь не являются тривиальными и хорошо известными.

Так, например, в [260] в выражениях для тензора  $\chi$  ортоферрита  $YFeO_3$  (структура  $2^{(+)}2^{(+)}\bar{1}^{(+)}$ ) оказались пропущенными слагаемые, пропорциональные  $m_i l_k$ . Аналогично, для кристалла карбоната кобальта симметричный вклад в тензор  $\chi$  векторов  $m$  и  $l$  был определен первоначально [261] неверно, а позже исправлен в [50]. Ввиду этого в [253] мы привели матрицы  $\alpha^{lm}$  для всех двухподрешеточных структур.

Заметим, что в позже вышедшей монографии по магнитооптике и спектроскопии антиферромагнетиков [50] также содержится информация о форме тензоров  $\alpha^{mm}$ ,  $\alpha^{ll}$ ,  $\alpha^{lm}$  для двухподрешеточной модели. К сожалению, в [50] для структур матрицы  $\alpha^{lm}$  переставлены местами, а для структуры  $6^{(-)}$  матрица  $\alpha^{lm}$  содержит опечатку.

Писарев [51, 262] впервые обратил внимание на то, что в тензорной добавке  $\Delta\chi$ , обусловленной магнитным упорядочением, целесообразно выделить разные вклады векторов  $m$  и  $l$ . Изотропная (скалярная) составляющая часть  $\Delta\chi_{ск}$  пропорциональная  $m^2$  или  $l^2$ , вносит вклад только в средний показатель преломления  $n$ , а не в линейное магнитное двупреломление света. Для кубических магнетиков оказалось, что этот скалярный вклад в  $n$  - примерно на 2 порядка больше, чем анизотропная составляющая ( $\Delta\chi - \Delta\chi_{ск}$ ) [53, 262]. Было показано [53, 262] также, что линейное магнитное двупреломление света,

описываемое девиаторной частью тензора  $\Delta\chi$ , в свою очередь полезно разделить на изотропное двупреломление  $\Delta n_{из}$ , не зависящее от ориентации вектора  $\mathbf{m}$  относительно кристаллографических осей, и анизотропное  $\Delta n_{ан}$ , поскольку обычно  $\Delta n_{ан} \ll \Delta n_{из}$ .

Уже первые экспериментальные исследования показали, что эффекты линейного магнитного двупреломления света во многих магнитоупорядоченных кристаллах проявляются значительно сильнее, чем в немагнитных средах, и по порядку величины ( $\Delta n \sim 10^{-2} \div 10^{-5}$ ) сравнимы с фарадеевским вращением [54]. Двупреломление по  $\mathbf{m}^2$  наблюдалось во всех ферро- и ферримагнетиках. В ферромагнитном окисле европия  $EuO$  при  $T \sim 20K$  имеет место рекордное значение линейного двупреломления света  $\Delta n \approx 10^{-2}$  [54]. Явление магнитного двупреломления  $\sim I^2$  существует во всех антиферромагнетиках. Например, во фторидах переходных металлов  $CoF_2$ ,  $MnF_2$ ,  $NiF_2$  имеющих антиферромагнитную структуру  $4^{(-)}_z 2^{(-)}_d \bar{1}^{(+)}$ , в которой симметрично разрешено существование слабого ферромагнетизма, линейное двупреломление, пропорциональное  $I_z^2$ , достигает величины  $(I \div 2) \cdot 10^{-3}$  [54, 263].

Билинейное по векторам  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{l}$  линейное магнитное двупреломление света  $\Delta n \sim m_i l_k$  может проявляться во всех кристаллах, допускающих слабый ферромагнетизм [43] и наблюдалось, например, в  $CoF_2$  [256, 52] (магнитная структура  $3^{(+)}_z 2^{(-)}_x \bar{1}^{(+)}$ ), в  $D_4FeO_3$  [252] (структура  $2^{(-)}_z 2^{(-)}_x \bar{1}^{(+)}$ ), гематите [264] и др. [54, 50, 56].

Экспериментальные исследования в слабых ферромагнетиках показали [265, 54, 266, 260], что линейные по намагниченности магнитооптические явления Фарадея и Керра в слабых ферромагнетиках сравнимы по порядку величины с аналогичными эффектами в ферритах-гранатах, хотя намагниченности у первых кристаллов на порядок величин меньше, чем у вторых.

Писарев предположил [51], что в слабых ферромагнетиках в спонтанный эффект Фарадея, наряду с намагниченностью, дает также линейный вклад вектор антиферромагнетизма  $\mathbf{l}$ :

$$\mathbf{G} = \alpha^m \mathbf{m} + \alpha^l \mathbf{l} + \dots, \quad (4.3.1)$$

а эффект Коттона-Мутона пропорционален  $I^2$ . В [265] было доказано, что аномально большие магнитооптические эффекты в слабых ферромагнетиках обусловлены не абсолютной величиной результирующего магнитного момента  $\mathbf{m}$  кристалла и не его переориентацией, а переориентацией вектора антиферромагнетизма  $\mathbf{l}$ , сопровождающей перемагничивание слабого ферромагнетика.

В ортоферрите иттрия  $Y_3Fe_5O_{12}$  был экспериментально измерен [260, 267] антиферромагнитный вклад вектора  $\mathbf{l}$  в фарадеевское вращение и найдено, что он в 4 раза больше, чем вклад, обусловленный слабым ферромагнитным моментом  $\mathbf{m}$ . Теоретические оценки вкладов  $\mathbf{l}$  и  $\mathbf{m}$  в эффект Фарадея [268, 269] в ортоферритах согласуются с этими результатами. Таким образом, существование антиферромагнитного эффекта Фарадея, описываемого тензором  $\alpha^l$ , можно считать доказанным экспериментально. Вместе с тем такого рода явления изучены еще недостаточно и представляют, конечно, большой интерес.

С симметрией точки зрения ферромагнитный эффект Фарадея возможен во всех средах, допускающих магнитный момент [51]; антиферромагнитный эффект Фарадея возможен во всех антиферромагнетиках, допускающих магнитный момент. Антиферромагнитный эффект Фарадея может индуцироваться только теми компонентами вектора  $I$ , которые преобразуются подобно компонентам вектора  $m$  [51]. Иначе говоря,  $\alpha^l$  – это тензоры 2 ранга четного<sup>(-)</sup> типа в слабых ферромагнетиках и четного<sup>(+)</sup> типа в ферримагнетиках.

Что же касается симметрии тензоров  $\alpha^{mm}$ ,  $\alpha^{ll}$ ,  $\alpha^{lm}$ , то она уже рассматривалась нами выше. Явный вид матрице  $\alpha^{lm}$  не приводится, (см. [253]). Они изоморфны матрицам аксиального тензора 4 ранга, симметричного по паре индексов. Взаимосвязь между магнитным и немагнитным тензорами установлена в разделе 4.1.

В приложениях  $A$  и  $B$  мы приводим матрицы псевдотензоров 4 ранга, симметричных по двум индексам и общего вида соответственно для всех кристаллографических точечных групп. Данные были унифицированы и сверены с информацией в [270-272, 37]. Эти таблицы позволяют, пользуясь установленной симметрией двухподрешеточных магнетиков, сразу выписать матрицы тензоров 4 ранга всех семи типов симметрии.

Итак, установлена симметрия и правила отбора для тензоров оптических и магнитооптических свойств двухподрешеточных магнетиков [252-254].

#### 4.4 Симметрия и правила отбора для тензоров макроскопических свойств многоподрешеточных магнетиков

Ряд антиферромагнитных кристаллов обладает сложной магнитной структурой, для которой двухподрешеточная модель оказывается недостаточной. В таких случаях можно использовать многоподрешеточную модель магнетика. Рассмотрим некоторые симметричные аспекты феноменологического описания тензорных характеристик макроскопических физических свойств и явлений в многоподрешеточных магнетиках.

При теоретико-групповом анализе полезно связать интересующие нас физические свойства с магнитным  $M$  и антиферромагнитными векторами  $L_1, L_2, \dots, L_n$ , компоненты которых преобразуются [25, 42] по неприводимым представлениям парамагнитной фазы магнетика. Ограничимся рассмотрением наиболее часто встречающихся магнетиков с совпадающими химической и магнитной ячейками и коллинеарных в обменном [42] приближении. Тогда достаточно пользоваться не пространственными – , а точечными группами симметрии. Каждое неприводимое представление группы симметрии парамагнитной фазы может, вообще говоря, индуцировать одну или несколько компонент векторов  $M, L_1, L_2, \dots$ . Отсюда следует, что 3-мерные векторы  $M, L_1, L_2, \dots$  в рассматриваемых нами магнетиках должны преобразовываться по 3-мерным (приводимым либо нет)  $\Gamma_M, \Gamma_{L1}, \Gamma_{L2}, \dots$  представлениям точечной группы симметрии парамагнитной фазы.

Поэтому, используя теоремы об умножении представлений, можно записать

$$\Gamma_M = \Gamma_0 \Gamma_R, \quad \Gamma_{L_1} = \Gamma_1 \Gamma_R, \quad \Gamma_{L_2} = \Gamma_2 \Gamma_R, \dots \quad (4.4.1)$$

Аналогично, можно также выражать  $\Gamma_L$ , через  $\Gamma_M$ :

$$\Gamma_{L_1} = \Gamma_{10} \Gamma_M, \quad \Gamma_{L_2} = \Gamma_{20} \Gamma_M, \dots \quad (4.4.2)$$

В (4.1.1) и (4.4.2)  $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n, \Gamma_{10}, \Gamma_{20}, \dots, \Gamma_{n0}$  - некоторые одномерные вещественные неприводимые представления точечной группы симметрии парамагнитной фазы магнетика;  $\Gamma_{n0} \Gamma_0 = \Gamma_n$ ;  $n=1, 2, 3, \dots$ ;  $\Gamma_R$  - векторное представление.

Из (4.4.2) вытекает, что произвольный вектор антиферромагнетизма  $L_n$  ( $n=1, 2, \dots, n$ ), как и в двухподрешеточных магнетиках [24], преобразуется либо как вектор  $M$ , либо дополнительно меняет знак.

Такое дополнительное изменение знака происходит только под действием операций симметрии магнетика, соответствующих  $(-1)$  характерам в неприводимом представлении  $\Gamma_{n0}$  и переставляющих местами магнитные моменты между различными магнитными подрешетками. Для многоподрешеточных магнетиков введения одной новой операции антисимметрии - обмена магнитными моментами между двумя подрешетками  $I^{(-)}$  - уже недостаточно.

Каждое неприводимое представление группы симметрии кристалла может, в принципе, индуцировать свой ферро- или антиферромагнитный вектор. Поэтому число  $N$  различных по своим трансформационным свойствам магнитных векторов  $M, L_1, L_2, \dots, L_n$  не должно быть больше числа вещественных одномерных неприводимых представлений точечной группы немагнитной фазы в данном кристалле, т.е.  $N \leq 1, 2, 4, 8$ . Отсюда следует, что для симметричного феноменологического описания многоподрешеточных магнетиков достаточно введения еще только одной формальной операции антисимметрии, характеризующей обмен подрешетками,  $-I^{(*)}$ , неэквивалентной операции  $I^{(-)}$ . Поэтому далее мы будем различать 4 коммутирующие антиоперации: две - пространственной и временной инверсий ( $\bar{I}$  и  $\underline{I}$ ) и две различные операции обмена подрешетками ( $I^{(-)}, I^{(*)}$ ).

Следовательно, все различные векторы, характеризующие макроскопические свойства многоподрешеточных (коллинеарных в обменном приближении, с  $k=0$ ) магнетиков, можно классифицировать по неприводимым представлениям абелевой группы  $\bar{I} \underline{I} I^{(-)} I^{(*)}$  кратной антисимметрии [35] 16 порядка [273].

В магнитной кристаллофизике [28, 46] по трансформационным свойствам все векторы обычно делятся на 4 типа: четного ( $G$ ), электрического ( $P$ ), магнитного ( $M$ ) и магнитоэлектрического, или, как в последнее время называют, тороидного ( $T$ ) типов.

Тороидный момент  $T$  изменяет свой знак под действием как операции  $\underline{I}$ , так и операции  $\bar{I}$ . Введение дополнительных различных антиопераций обмена подрешеток  $I^{(-)}$  и  $I^{(*)}$  позволяет различать [273] уже 16 различных типов векторов. Из них, изменяющих свой знак под действием  $\underline{I}$ , – 8: один вектор ферромагнетизма  $M$  и 7 векторов антиферромагнетизма  $L_n$ :  $M^{(-)}$ ,  $M^{(*)}$ ,  $M^{(-*)}$ ,  $T$ ,  $T^{(-)}$ ,  $T^{(*)}$ ,  $T^{(-*)}$ . Остальные 8 видов ( $G$ ,  $G^{(-)}$ ,  $G^{(*)}$ ,  $G^{(-*)}$ ,  $P$ ,  $P^{(-)}$ ,  $P^{(*)}$ ,  $P^{(-*)}$ ) могут, в принципе, возникать также и в немагнитных средах. Следует, однако, иметь в виду, что вследствие трехмерности нашего пространства одновременно могут реализоваться не более 3 различных по симметрии векторов.

Анализ результатов теоретико-группового изучения различных типов магнитных структур при фазовых переходах, полученных рядом авторов, подтверждает целесообразность предлагаемой здесь симметричной схемы. Например, согласно Дзялошинскому [43], в кристаллах симметрии  $D_{3d} = 3\bar{2}I$  четыре одномерные неприводимые представления ( $A_{1g}$ ,  $A_{2g}$ ,  $A_{1u}$ ,  $A_{2u}$ ) могут индуцировать  $z$ -компоненты магнитных векторов 4 типов  $M_z^{(-)}$ ,  $M_z$ ,  $T_z^{(-)}$ ,  $T_z$  соответственно.  $M^{(-)}$  и  $M$  наблюдаются в кристаллах  $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ ,  $T^{(-)}$  – в  $\text{Cr}_2\text{O}_3$ , а  $T$  –, вероятно, в  $Ni\text{-I}$  борците [274].

В кристаллах ортоферритов и ортохромитов (симметрия  $D_{2h} = 222\bar{1}$ ) в магнитоупорядоченном состоянии возможно, согласно [24], возникновение 8 векторов:  $F$ ,  $F_R$ ,  $G$ ,  $G_R$ ,  $A$ ,  $A_R$ ,  $C$ ,  $C_R$ , компоненты которых преобразуются по неприводимым представлениям  $\Gamma_1 - \Gamma_4$ . По симметрии они соответствуют нашим 6 типам:  $M \sim F$ ,  $F_R$ ;  $M^{(-)} \sim G$ ;  $M^{(*)} \sim C$ ,  $C_R$ ;  $M^{(-*)} \sim A$ ;  $T^{(-*)} \sim G_R$ . Отсутствуют только  $T$  и  $T^{(*)}$ . Обычно реализуются фазы  $\Gamma_1 - \Gamma_4$ , то есть индуцируются векторы  $M$ ,  $M^{(-)}$ ,  $M^{(*)}$ ,  $M^{(-*)}$ . Так, магнитная симметрия фазы  $\Gamma_1$  будет  $2_z^{(-)} 2_x^{(-*)} 2_y^{(*)} \bar{1}$ . Последняя форма записи явно показывает, что данная магнитная группа инвариантна относительно компонент магнитных векторов  $M_y^{(-)}$ ,  $M_z^{(*)}$ ,  $M_x^{(-*)}$ .

При гелиевых температурах упорядочиваются и редкоземельные спины, и могут возникать фазы  $\Gamma_5 - \Gamma_8$ . Наблюдались [275] фазы  $\Gamma_{15}$  – в  $DyFeO_3$ ,  $\Gamma_{25}$  – в  $DyCrO_3$ , а в алюминатах редкоземельных элементов ( $DyAlO_3$  и др.) – фаза  $\Gamma_5$  – в "чистом виде" с векторами  $T_y^{(-)}$ ,  $T_x^{(-*)}$ .

Аналогично, в кристаллах симметрии  $D_{4h} = 422\bar{1}$  восьми одномерным неприводимым представлениям соответствуют 8 типов магнитных структур, что согласуется с выводами [44].

Из соотношений (4.4.1) имеем, что

$$\Gamma_M \Gamma_{L_1} \dots \Gamma_{L_n} \sim (\Gamma_0 \Gamma_1 \dots \Gamma_n) (\Gamma_R)^n = \Gamma (\Gamma_R)^n, \quad (4.4.3)$$

где  $\Gamma$  – также некоторое одномерное знакопеременное неприводимое представление. Это означает, что произвольный тензор в рассматриваемых магнетиках преобразуется как полярный либо аксиальный тензор некоторой немагнитной группы симметрии, изоморфной магнитной.

Отсюда следует, что симметрию как самих обсуждаемых многоподрешеточных магнетиков, так и симметрию векторов и тензоров в них, можно характе-

ризовать группами кратной антисимметрии [35]. Эти группы являются подгруппами расширенной ортогональной группы  $\infty\infty \bar{1} \underline{1} I^{(-)} I^{(+)}$ .

Общие результаты можно применять для описания оптических свойств в магнитоупорядоченных многоподрешеточных кристаллах. Феноменологическое описание вкладов различных векторов  $m_i, l_k$  в тензор  $\varepsilon^{-1}$  проводилось для ряда кристаллов; например, для гексагональных  $CsMnF_3$  [276, 277],  $RbNiCl_3$  [53]. В [269] дано формальное описание эффекта Фарадея в рамках 8-подрешеточной модели для ортоферритов.

Подход, предложенный в [273] и описанный здесь, позволяет по известной группе кратной антисимметрии написать разложение тензора  $\varepsilon^{-1}$  по компонентам векторов  $M, L_1, L_2, \dots, L_n$ . При этом можно пользоваться приложениями  $A$  и  $B$ .

Итак, введены [273] две дополнительные симметричные операции обмена подрешетками  $I^{(-)}$  и  $I^{(*)}$ , что позволило полностью охарактеризовать симметрию и предложить простые правила отбора для тензорных свойств в многоподрешеточных магнетиках.

## 5 НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В КРИСТАЛЛАХ С МАГНИТНОЙ СТРУКТУРОЙ

### 5.1 Частотно-перестановочные соотношения для тензоров нелинейных оптических восприимчивостей

Электромагнитные поля лазерного излучения обладают большой спектральной интенсивностью и поэтому учет только линейного отклика среды на световое излучение ограничиваться часто нельзя. Кроме того, некоторые классические оптические и магнитооптические Эффекты, возникающие в кристаллах при приложении постоянных электрических, магнитных и акустических полей, целесообразно трактовать как нелинейные явления. Поэтому в этой главе будет проведено симметричное рассмотрение нелинейных кристаллооптических явлений в средах с упорядоченной магнитной структурой.

Нелинейные эффекты в кристаллах описываются тензорами различных рангов, причем частотная дисперсия весьма существенна. Для выяснения симметрии тензоров нелинейных оптических восприимчивостей воспользуемся простой феноменологической моделью нелинейной среды [278], как совокупности классических анизотропных ангармонических осцилляторов и получим явные выражения для этих тензоров. Вектор смещения  $X$  электрона одного осциллятора удовлетворяет уравнению

$$m \ddot{X} + R \cdot \dot{X} + K \cdot X - \beta : XX - \xi : XXX = eE + e[\dot{X} H^\circ] / c, \quad (5.1.1)$$

Здесь  $m$  – эффективная масса электрона,  $R$  и  $K$  – тензоры коэффициентов трения и упругости соответственно,  $\beta$  и  $\xi$  – компоненты тензоров ангармоничности. Справа в (5.1.1) – сила Лоренца, действующая со стороны электрического поля  $E(t)$  светового излучения и внешнего постоянного магнитного поля на электрон.

Пусть на нелинейный кристалл падает световое излучение нескольких частот вида [279-281]  $E = \sum_m E^m \exp(-i\omega_m t)$  Используя слабость нелинейных взаимодействий методом последовательных приближений получаем, что в выражении для поляризации среды на частоте  $\omega_m$

$$P_i^m = \chi_{ij}^m E_j^m + \chi_{ijk}^{m;np} E_j^n E_k^p + \chi_{ijkl}^{m;qrst} E_j^q E_k^r E_l^s + \dots \quad (5.1.2)$$

тензоры квадратичной  $\chi$  и кубичной  $\theta$  нелинейных оптических восприимчивостей равны соответственно [282]

$$\chi_{ijk}^{m;np} = \epsilon_{tuv} \chi_{it}^m \chi_{uj}^n \chi_{vk}^p / (e^3 N^2); \quad (5.1.3)$$

$$\chi_{ijkl}^{m;qrst} = \epsilon_{tuvw} \chi_{it}^m \chi_{uj}^q \chi_{vk}^r \chi_{wl}^s / (e^4 N^3). \quad (5.1.4)$$

Здесь  $N$  – число анизотропных осцилляторов в единице объема, верхние индексы обозначают частоты, которые связаны между собой

$$u_m = u_n + u_p; \quad u_m = u_q + u_s + u_r. \quad (5.1.5)$$

Для кристаллов ромбической сингонии тензор линейной восприимчивости на частоте  $\omega_m$  равен [282]

$$y_{ij}^m = e^2 N [\partial_{ij} - ie u_m e_{ijk} H_k^0 / (m c f_i^m)] / (m f_j^m), \quad (5.1.6)$$

где  $f_i^m = \omega_{0i}^2 - \omega_m^2 - i u_m \varepsilon_i^m$ ,  $\omega_{0i}$  - собственная частота колебаний, а  $\gamma_i^m$  - коэффициенты затухания на частоте  $\omega_m$  вдоль  $i$ -ой оси соответственно;  $H^0$  - внешнее магнитное поле или параметр магнитного упорядочения.

Для установления симметрии тензоров  $y$ ,  $\chi$ ,  $\theta$  введем следующие симметричные операции:  $\underline{I}$  - операция обращения (во времени) магнитной структуры, которая изменяет направления всех магнитных моментов, магнитных полей и токов на противоположные; операция инверсии времени  $I'$ , которая для монохроматических волн изменяет знаки всех частот на противоположные и сводится к операции комплексного сопряжения  $I^*$ ,  $\tilde{I}$  - операция изменения знака линейного поглощения, под воздействием которой поглощение заменяется усилением и наоборот.

Из этих определений следует, что

$$\underline{I}H = -H, \quad I^*k = -k^*, \quad \underline{I}k = -k, \quad \tilde{I}k = k^*, \quad (5.1.7)$$

$$\tilde{I}^* \equiv \underline{I} \tilde{I} I^* = 1, \quad I^*n = n^*, \quad \tilde{I}n = n^*, \quad I^*\omega = -\omega. \quad (5.1.8)$$

Частоты  $\omega_m$  считаются вещественными, а волновые векторы  $k$  и показатели преломления  $n$  - комплексными.

Из вещественности векторов  $P$  и  $E$  следует вывод о том, что вещественные части тензоров линейных  $y$  и нелинейных  $\chi$ ,  $\theta$  восприимчивостей должны быть четными -, а мнимые - нечетными функциями частот [280, 283, 284].

Из (5.1.8) вытекает, что в прозрачных средах операция  $\underline{I}^*$  является операцией симметрии, поэтому тензоры восприимчивостей обладают следующей симметрией:

$$\underline{\chi}^* = \chi, \quad \underline{y}^* = y, \quad \underline{\theta}^* = \theta, \quad (5.1.9)$$

где подчеркивание снизу означает изменение во времени магнитной структуры системы, обусловленной внутренним магнитным упорядочением и/или внешним магнитным полем  $H^0$ . Этот вывод соответствует мнению Н. Бломбергена [280, с.86] о том, что при отсутствии поглощения часть нелинейной восприимчивости, нечетная по намагниченности или магнитному полю, - мнимая, а четная - действительная.

Из (5.1.6) видно, что в поглощающих магнитных средах тензор линейной восприимчивости  $\sigma$  обладает следующими свойствами симметрии:

$$y_{ik}^m = y_{ki}^m = \underline{y}_{ik}^{\tilde{m}}, \quad (5.1.10)$$

где индекс  $\tilde{m}$  означает изменение знаков частоты  $\omega_m$  и поглощения  $\gamma^m$  на противоположные; подчеркивание снизу означает обращение магнитной структуры.

Полагая далее, что тензоры  $\beta$  и  $\xi$  не зависят от частот и магнитного упорядочения и симметричны по всем индексам, учитывая симметрию  $u$ , находим, что [282]

$$\underline{u}_{ijk}^{m,np} = \underline{u}_{-jik}^{n,\tilde{m}\tilde{p}} = (\underline{u}_{jik}^{\tilde{n},\tilde{m}\tilde{p}})^*, \quad (5.1.11)$$

$$\underline{u}_{ijkl}^{m,qrs} = \underline{u}_{jikl}^{q,\tilde{m}\tilde{r}\tilde{s}} = (\underline{u}_{jikl}^{\tilde{q},\tilde{m}\tilde{r}\tilde{s}})^*. \quad (5.1.12)$$

Найденные нами частотно-перестановочные соотношения можно сформулировать так.

У тензоров нелинейных оптических восприимчивостей можно одновременно переставлять декартовы индексы и соответствующие им частоты. Если же переставляется крайний слева индекс, то следует дополнительно изменить на противоположные знак магнитной структуры и знаки частот и поглощения при непереставляемых индексах тензора.

Хотя выражения (5.1.11), (5.1.12) получены на основе модели ангармонического осциллятора, можно полагать, что они будут справедливы и в более общих случаях.

Полученные симметричные связи (5.1.11), (5.1.12) при пренебрежении поглощением редуцируются в известные частотно-перестановочные соотношения, полученные ранее рядом авторов для **прозрачных** нелинейных сред. Так, первоначально Г. А. Армстронг, Н. Бломберген, П. С. Першан и Г. Дюкунг получили свои соотношения из квантово-механических расчетов [285], а затем Першан получил эти же выражения из термодинамических соображений [279]; причем было выполнено обобщение результатов предыдущей работы [285] на прозрачные среды, неинвариантные относительно операции обращения времени  $I'$ , т.е. наряду с электродипольными учитывались также магнитодипольные и электрические квадрупольные эффекты. Затем Ахманов и Хохлов получили [278] свои соотношения на базе модели **прозрачной** нелинейной среды, состоящей из связанных классических ангармонических осцилляторов, однако магнитные эффекты ими не рассматривались. Изящный вывод частотно-перестановочных соотношений для прозрачных сред, основанный на применении схемы Мэнли-Роу (законов сохранения числа фотонов) к нелинейным оптическим явлениям, приведен во втором издании [8]. (См. также работы [280, 281, 283, 284]).

Однако в поглощающих средах такого рода симметричные связи для мнимых частей тензоров нелинейных восприимчивостей не выполняются. Дальнейшие многочисленные попытки обобщить частотно-перестановочные соотношения на поглощающие кристаллы не увенчались успехом. Правда, Батчер и Мак-Лин предложили [286] свои формальные соотношения, связывающие поля на комплексных частотах. Однако соотношения [286] не имеют прямого физического смысла, так как в нелинейной оптике частоты обычно считаются

вещественными, а затухание волн объясняется диссипативными свойствами самих сред.

Выше мы уже подробно обсуждали линейный принцип Онзагера, справедливый для различных линейных поглощающих сред с магнитной структурой. В литературе [280, 284, 281, 279, 287, 283, 288] установилась точка зрения, согласно которой в общем случае для диссипативных анизотропных нелинейных сред нелинейного аналога принципа Онзагера не существует. Однако связи (5.1.10) для линейных поглощающих сред сводятся к (1.2.8), т.е. к известному в линейной электродинамике принципу симметрии кинетических коэффициентов, т.е. к линейному принципу Онзагера.

Поэтому найденные нами частотно-перестановочные соотношения (5.1.11), (5.1.12) можно интерпретировать, как обобщение принципа Онзагера (соотношений взаимности) на оптические явления в поглощающих нелинейных средах. Линейные соотношения взаимности Онзагера накладывают ограничения временной симметрии на компоненты тензоров одного и того же свойства. В отличие от этого, найденные нами частотно-перестановочные соотношения связывают тензоры различных нелинейных эффектов в одном поглощающем кристалле, но находящемся в термодинамически различных состояниях, когда поглощение на некоторых частотах становится отрицательным. Практически среды, обладающие отрицательным поглощением, хорошо известны. Это, например, лазерные среды с инверсионной заселенностью [289].

Подобно тому, как линейные уравнения связи (1.2.1) обобщаются на линейные соотношения (1.2.12), так и нелинейные уравнения (5.1.2) можно обобщить, если учесть, что векторы электрической  $\mathbf{P}$  и магнитной  $\mathbf{M}$  поляризаций среды могут нелинейно зависеть от электрических, магнитных, акустических, тепловых и других полей. Кроме того, при учете частотной и пространственной дисперсий тензоры восприимчивостей зависят от частот  $\omega_m$  и волновых векторов  $\mathbf{k}_m$  взаимодействующих световых волн.

Поэтому вместо (5.1.10) – (5.1.12) в более общих случаях получаем

$$y_{ij}^m = \varepsilon^m \varepsilon^n y_{ji}^{nm}, \quad (5.1.13)$$

$$\chi_{ijk}^{m;np} = \varepsilon^m \varepsilon^n \varepsilon^p \underline{\chi}_{jik}^{n;m\tilde{p}}, \quad (5.1.14)$$

$$\theta_{ijkl}^{m;nqr} = \varepsilon^m \varepsilon^n \varepsilon^q \varepsilon^r \underline{\theta}_{jikl}^{nm\tilde{q}\tilde{r}}. \quad (5.1.15)$$

Здесь введенные коэффициенты  $\varepsilon^i$  принимают значение  $(-1)$  или  $(+1)$  в зависимости от того, меняют или не меняют свой знак соответствующие им переменные  $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{P}, \mathbf{M}, \dots$  относительно операции  $I'$ . Значок  $\sim$  (тильда) над некоторыми индексами означает, что линейное поглощение на данной частоте изменяет свой знак на противоположный. Совокупность двух параметров  $(\omega_p, k_p)$ ,  $(-\bar{\omega}_m, -\tilde{k}_m)$  обозначается одним индексом  $p$ ,  $\tilde{m}$  соответственно. Такого рода краткая форма записи была предложена в [284].

Выражения (5.1.13)–(5.1.15) являются искомыми частотно-перестановочными соотношениями для тензоров восприимчивостей поглощающих магнитоупорядоченных кристаллов, учитывающими частотную и пространственную дисперсию. Из них следуют, как частные случаи, результаты, известные ранее в литературе.

Так, полагая в (5.1.11), что линейное поглощение на частотах  $\omega_m$  и  $\omega_n$  отсутствует, точнее, что фотоны на  $\omega_m$  и  $\omega_n$  рождаются и уничтожаются вместе, приходим для немагнитной среды к выражению, эквивалентному предложенным в [287, 284] (см. также [290]).

Если же поглощение существенно только на одной частоте, тогда (5.1.14) сводится к результату, полученному нами ранее в [291]. Если еще дополнительно отсутствует магнитная структура, то получаем соотношения [288, 287, 284, 290].<sup>\*)</sup>

Для некогерентных процессов обсуждаемые симметричные связи также упрощаются. Так, из (5.1.12) при  $\omega_m = \omega_m + \omega_n - \omega_n$  следуют также частотно-перестановочные соотношения, описывающие рамановские и другие двухфотонные переходы [292, 284].

Если все частоты взаимодействующих волн и их комбинации лежат вдали от собственных резонансов нелинейного кристалла, то тензоры нелинейных восприимчивостей становятся симметричными по перестановке всех индексов, независимо от частот. Последнее утверждение известно, как правило Д. А. Клейнмана [293], которое неплохо соответствует экспериментальным данным для ряда кристаллов. Нужно подчеркнуть, однако что оно может выполняться только для негиротропных сред, т.е. для сред без явлений эффекта Фарадея и оптической активности. В литературе на последнее обстоятельство почему-то не обращалось внимания.

Отметим еще, что все частоты взаимодействующих полей могут быть положительными, отрицательными и равными нулю, причем они считаются несоизмеримыми. Если же некоторые частоты совпадают, тогда уравнения связи должны быть модернизированы [285, 281] и полученные частотно-перестановочные соотношения также видоизменяются.

Итак, в данном разделе нами найдены [291, 282] частотно-перестановочные соотношения (5.1.11)–(5.1.15) для тензоров нелинейных оптических восприимчивостей в поглощающих магнитоупорядоченных кристаллах с частотной и пространственной дисперсией и являющиеся нелинейными аналогами принципа Онзагера. Показано, что из найденных частотно-перестановочных соотношений следуют, как частные случаи, известные ранее результаты для частично-диссипативных и прозрачных магнитных и немаг-

---

<sup>\*)</sup> К сожалению, в некоторые формулы в [290, 291] для частично диссипативных сред вкрались опечатки. Здесь эти соотношения исправлены и обобщены.

нитных сред. Отмечено также, что правило Клейнмана не может выполняться в гиротропных средах.

## 5.2 Четный эффект Фарадея

Оптические свойства магнитоупорядоченных кристаллов обычно характеризуют тензором обратной диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon^{-1} = \chi + i\mathbf{G}^\times. \quad (5.2.1)$$

Согласно принципу симметрии кинетических коэффициентов  $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$ , поэтому разложение симметричной части  $\chi$  тензора  $\varepsilon^{-1}$  в магнитных средах может содержать как четные, так и нечетные [252] по внешнему магнитному полю  $\mathbf{H}^\circ$  части. Квадратичные по  $\mathbf{H}^\circ$  добавки в  $\chi$  описывают хорошо известный эффект Коттона-Мутона, а линейные по  $\mathbf{H}^\circ$  добавки – сравнительно новый [50] линейный магнитооптический эффект, приводящий к линейному двупреломлению света и пропорциональный первой степени внешнего поля  $\mathbf{H}^\circ$ .

Линейный магнитооптический эффект был сравнительно недавно открыт, затем теоретически и экспериментально изучался в ряде кристаллов [50, 56, 264, 294-296]. С симметричных позиций линейный магнитооптический эффект [50] можно феноменологически описывать аксиальным  $c$ -тензором 3 ранга  $q_{ijk}$ , симметричным по двум индексам ( $\Delta\chi_{ij}^s = q_{ijk}H_k^\circ$ ).

Аксиальный  $c$ -вектор гирации  $\mathbf{G}$ , дуальный антисимметричной части  $i\mathbf{G}^\times$  тензора  $\varepsilon^{-1}$  и описывающий невзаимное вращение плоскости поляризации или фарадеевское вращение плоскости поляризации света, можно разложить по  $\mathbf{H}^\circ$ :

$$G_i = G_i^{(0)} + G_i^{(1)} + G_i^{(2)} + \dots = G_i^{(0)} + \beta_{ij}H_j^\circ + \varepsilon_{ijk}H_j^\circ H_k^\circ + \dots \quad (5.2.2)$$

Здесь первые два слагаемых ответственны за спонтанный и индуцируемый внешним полем  $\mathbf{H}^\circ$  линейный эффект Фарадея соответственно. В очень сильных полях должны наблюдаться кубичные отклонения ( $G_i^{(3)} \sim H^3$ ) фарадеевского вращения от линейной связи с  $\mathbf{H}^\circ$ , что обсуждалось В. С. Запасским [297].

Из принципа Онзагера вытекает также, что в магнетиках, кроме спонтанного эффекта Фарадея, описываемого вектором гирации  $\mathbf{G}^{(1)}$ , возможно также наблюдать новое явление – четный (квадратичный) по магнитному полю  $\mathbf{H}^\circ$  эффект Фарадея [298, 152, 299]. Из (5.2.2) видно, что четный эффект Фарадея феноменологически описывается аксиальным  $c$ -тензором 3 ранга, симметричным по паре индексов  $(j,k)$ . Компоненты  $\beta_{ijk}$  равны нулю только в кристаллах 21 класса точечных шубниковских групп, содержащих операции  $I'$  или  $\bar{I}'$ , а также в кристаллах классов  $4'32$ ,  $432$ ,  $m3m$ .

Нами было показано [298, 152], что четный эффект Фарадея, меняющий знак при перемагничивании образца, может наблюдаться в кристаллах остальных 66 магнитных групп (в пьезомагнетиках). И действительно, четный эффект Фарадея затем наблюдался экспериментально [300] Харченко с сотру-

никами в пьезомагнитном кристалле  $CoF_2$  при температуре 15К. Линейно поляризованное излучение с  $\lambda=622.8$  нм распространялось вдоль оси [001], поперечное магнитное поле  $\mathbf{H}^\circ$  прикладывалось вдоль оси [110]. Измеренное удельное вращение плоскости поляризации света оказалось равным  $V_\perp=1.3 \cdot 10^{-2}$  град·см<sup>-1</sup>·кЭ<sup>-2</sup>. При дальнейших исследованиях авторами был затем зарегистрирован квадратичный эффект Фарадея в  $FeF_2$ , а также обнаружен четный (квадратичный) по  $\mathbf{H}^\circ$  циркулярный дихроизм [50, 301, 302]. Результаты магнитооптических исследований пьезомагнитных антиферромагнетиков этих авторов систематизированы также в [50].

В [45] и [303, 304] было показано, что в магнитоупорядоченных кристаллах определенных магнитных классов возможна нелинейная зависимость магнитного момента  $\mathbf{M}$  от внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}^\circ$ . По термодинамическим соображениям это следует из того, что плотность свободной энергии  $F$  магнетика может содержать, наряду с четными – , также нечетные (кубичные) по  $\mathbf{H}^\circ$  члены:

$$\Delta F = -(c_{ij} + c_{ijk} H_k^\circ) H_j^\circ H_i^\circ + \dots, \quad (5.2.3)$$

откуда индуцируемый магнитный момент равен

$$M_i = (c_{ij} + c_{ijk} H_k^\circ) H_j^\circ + \dots \quad (5.2.4)$$

Поэтому тензор нелинейной (квадратичной) магнитной восприимчивости третьего ранга  $c_{ijk}$  обладает симметрией  $\tau\epsilon[V^3]$ , т.е. симметричен по перестановке всех трех индексов [303].

В [300] авторы, используя аналогию с работой [303], считают, что тензор четного эффекта Фарадея  $\beta_{ijk}$  отличен от нуля не в 66, а лишь в 58 магнитных классах, в которых разрешена квадратичная по  $\mathbf{H}^\circ$  намагниченность. Эта точка зрения осталась без изменений и в последующих их публикациях [50, 302]. Поэтому остановимся на этом вопросе подробнее.

Плотность свободной энергии прозрачного магнетика, помещенного в магнитное поле  $\mathbf{H}^\circ$ , может содержать добавку [305, 299]

$$\Delta F = i\beta_{ijk} [E^{-\omega} E^{\omega}] H_j^\circ H_k^\circ / (4p), \quad (5.2.5)$$

ответственную за четный эффект Фарадея. Здесь  $E^\omega$  – Фурье-компонента электрического поля световой волны на частоте  $\omega$ . Отсюда снова получаем, что аксиальный  $c$ -тензор  $\beta_{ijk}$ , характеризующий четный эффект Фарадея, обладает симметрией  $\tau\epsilon V[V^2]$ , т.е. симметричен только по двум индексам ( $j, k$ ), так как термодинамические соображения (5.2.3), (5.2.4) уже не имеют места. Различия в симметрии тензоров  $c_{ijk}$  и  $\beta_{ijk}$  обусловлены, следовательно, тем, что тензор  $c_{ijk}$  описывает **статические** свойства, в то время как тензор  $\beta_{ijk}$ , характеризующий четный эффект Фарадея, описывает **динамические** свойства кристаллов на частоте  $\omega$ . Понятно, что симметрия тензора  $\beta$  может быть более низкой. Заметим попутно, что даже само понятие фарадеевского вращения для статических электромагнитных полей теряет смысл.

Здесь уместно провести аналогию между тензорами генерации второй оптической гармоники и нелинейной квадратичной восприимчивости. Хотя тензор 3 ранга, описывающий генерацию второй гармоники, симметричен только по двум индексам [283, 306]; для процессов, когда частотной дисперсией можно пренебречь, он становится симметричным по всем индексам (условие Клейнмана) [293]. Однако правило Клейнмана в общем случае не выполняется; например, оно неприменимо для линейного электрооптического эффекта [306]. В то же время тензор квадратичной электрической восприимчивости в постоянном электрическом поле по термодинамическим соображениям должен быть полностью симметричен по всем трем индексам, аналогично тензору нелинейной магнитной восприимчивости  $c_{ijk}$ .

Итак, термодинамический анализ показывает, что макроскопическая симметрия тензоров квадратичного эффекта Фарадея  $\beta_{ijk}$ , вопреки мнению [300, 50], ниже симметрии тензора квадратичной нелинейной магнитной восприимчивости  $c_{ijk}$  и совпадает симметрией тензоров пьезомагнетизма [307] и тензоров линейного магнитооптического эффекта [50, 56], хотя микроскопические механизмы их реализации, вообще говоря, различные.

Рассмотрение выражений для векторов гирации  $\mathbf{G}^{(2)}$  показывает, что четный эффект Фарадея носит резко анизотропный характер. В большинстве из 66 классов магнитной симметрии, где возможно это явление, при ориентации вектора  $\mathbf{H}$  в плоскости (001) возникает вектор гирации  $\mathbf{G}^{(2)} \perp \mathbf{H}$ , причем  $\mathbf{G}^{(2)} \parallel [001]$ . Поэтому при распространении света вдоль [001] может возникнуть только поперечный квадратичный эффект. При этом обычный (нечетный) эффект Фарадея отсутствует. Такая геометрия опыта предлагалась [298] нами для наблюдения четного эффекта Фарадея в кристаллах классов  $m\bar{3}$  и  $m\bar{3}m'$  и именно в этой конфигурации позже экспериментально последний был обнаружен [300, 301] в  $CoF_2$  и  $FeF_2$  (магнитный класс  $4'/mmm'$ ). Аналогично этому, при ориентации магнитного поля вдоль основных кристаллографических осей [100], [010] и [001] во многих кристаллах пьезомагнетиков четный эффект Фарадея тождественно обращается в нуль.

В кристаллах  $66-58=8$  классов магнитной симметрии ( $422, \bar{4}2m, 4mm, 4/mmm, 622, \bar{6}2m, 6mm, 6/mmm$ ), вопреки мнению [50], вектор гирации  $\mathbf{G}^{(2)}$ , описывающий квадратичное по магнитному полю невязимное вращение плоскости поляризации, должен быть отличен от нуля и иметь вид:

$$\mathbf{G}^{(2)} = \epsilon_{14}(\mathbf{e}_1 H_2 - \mathbf{e}_2 H_1) H_3. \quad (5.2.6)$$

Здесь и далее  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  – единичные векторы вдоль осей [100], [010] и [001] соответственно;  $\mathbf{H}=(H_1, H_2, H_3)$ . Как видно из (5.2.6), вектор гирации  $\mathbf{G}^{(2)}$  может находиться только в плоскости (001). При  $\mathbf{H} \parallel (\mathbf{e}_2 \pm \mathbf{e}_3)$  индуцируется вектор  $\mathbf{G}^{(2)} = \beta_{14} \mathbf{H}^2 \mathbf{e}_1 / 2$  и при пропускании линейно поляризованного излучения вдоль [100] может проявляться поперечная четная фарадеевская гиротропия (правда, на фоне естественного линейного двупреломления). В centrosymmetric антиферромагнетиках классов  $m\bar{3}, m\bar{3}m'$ , в которых отсутствуют двупреломле-

ние, естественная оптическая активность и спонтанный эффект Фарадея, индуцируемое четное фарадеевское вращение можно выделить в "чистом" виде. К классу  $m\bar{3}m'$  принадлежат, в частности, кристаллы диспрозий-алюминиевого граната  $Dy_3Al_5O_{12}$ , в антиферромагнитной фазе в которых возможно изучение обсуждаемого явления в "чистом" виде. При наложении внешнего магнитного поля на такой кристалл индуцируется вектор гирации

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^{(1)} + \mathbf{G}^{(2)} = \alpha \mathbf{H} + \beta (H_2 H_3 \mathbf{e}_1 + H_1 H_3 \mathbf{e}_2 + H_1 H_2 \mathbf{e}_3), \quad (5.2.7)$$

где  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ - ортогональный кристаллографический базис,  $\alpha$  и  $\beta$  - константы, характеризующие обычный – и четный эффект Фарадея.

Как следует из (5.2.7), здесь квадратичный эффект Фарадея носит явно выраженный анизотропный характер. Так, при  $\mathbf{H} \parallel [100]$  он отсутствует; а при  $\mathbf{H} \parallel [111]$  – максимален, причем вектор гирации  $\mathbf{G}^{(2)} \parallel \mathbf{H}$ . В последнем случае линейно поляризованный свет, распространяющийся вдоль магнитного поля, будет испытывать вращение плоскости поляризации, обусловливаемое обычным и четным эффектами Фарадея. Разделить их можно, изменяя, например, направление поля на противоположное или перемагнитчивая кристалл.

При ориентации вектора  $\mathbf{H}$  в плоскости (001) вектор  $\mathbf{G}^{(2)} \perp \mathbf{H}$ , т.е. четный эффект Фарадея всегда поперечен. Для наблюдения последнего оптимальной является геометрия опыта, при которой  $\mathbf{H} \parallel [110]$ , а волновой вектор световой волны  $\mathbf{k} \parallel [001]$ . Тогда линейный эффект Фарадея отсутствует, а поперечный четный эффект максимален. В данной геометрии опыта, как можно показать, отсутствуют также новый линейный магнитооптический эффект и гиротропное двупреломление [118], поэтому обсуждаемое нами явление будет проявляться только на фоне одного индуцированного внешним полем эффекта Коттона-Мутона.

Поскольку эффект Коттона-Мутона и четный эффект Фарадея – оба квадратичны по  $\mathbf{H}$ , то вызываемая ими эллиптичность  $\varepsilon = \text{tg}[(\arctg v/c_3)/2]$  собственных плоских световых волн, распространяющихся вдоль оси [001], в последнем случае не зависит от величины магнитного поля, а наблюдаемое их эллиптическое двупреломление равно [298]

$$\Delta n_{\text{элли}} = n_0^3 \sqrt{c_3^2 + v^2} H^2 / 2. \quad (5.2.8)$$

Здесь  $\beta$  и  $c_3$  – параметры четного эффекта Фарадея и эффекта Коттона-Мутона соответственно. Выделить линейное и циркулярное двупреломление из измеряемого общего эллиптического двупреломления для современной техники поляриметрии [308, 309] не представляет особых трудностей.

В кристаллах классов  $4'22'$ ,  $4'mm'$ ,  $\bar{4}'2m'$ ,  $\bar{4}'2'm$ ,  $4'/mmm'$ , к которым относятся, как уже отмечалось выше, и кристаллы фторидов кобальта и железа, где был впервые обнаружен четный эффект Фарадея, вектор  $\mathbf{G}^{(2)}$  характеризуется выражением [299]

$$\mathbf{G}^{(2)} = [\beta_{14} \cos u \sin \varphi, v_{14} \cos u \cos \varphi, v_{36} \sin \varphi \cos \varphi] \sin \theta \mathbf{H}^2, \quad (5.2.9)$$

где  $\theta$ ,  $\varphi$  – полярные углы вектора  $\mathbf{H}$  в кристалле. Уместно подчеркнуть, что в таких средах четный эффект Фарадея определяется не одним  $\beta_{14}$  (по [50]), а двумя  $\beta_{14}$ ,  $\beta_{36}$  независимыми параметрами. При произвольном расположении  $\mathbf{H}$  в одной из координатных плоскостей вектор  $\mathbf{G}^{(2)}$ , квадратичный по  $\mathbf{H}$ , всегда принадлежит этой же плоскости и обладает сильной зависимостью от углов  $\theta$  и  $\varphi$ .

Оптимальная геометрия опыта  $\mathbf{H} \parallel [100]$ ,  $\mathbf{k} \parallel [001]$  и была использована в работе [300]. Две другие конфигурации:  $\mathbf{k} \parallel [010]$ ,  $\mathbf{H} \parallel [101]$  и  $\mathbf{k} \parallel [100]$  при  $\mathbf{H} \parallel [011]$  также приводят к экстремальному по величине поперечной квадратичной фарадеевской гиротропии, правда, на фоне сильного естественного линейного двупреломления.

В [298] нами было указано, что поскольку четный эффект Фарадея меняет знак при перемагничивании кристалла, то представляется интересным использовать его, как и линейный магнитооптический эффект [252, 256], для визуализации антиферромагнитной доменной структуры. И действительно, в [300] сообщалось, что с помощью квадратичного эффекта Фарадея удалось визуально различать 180-градусные антиферромагнитные домены во фториде кобальта при напряженности магнитного поля  $\mathbf{H} \parallel [110]$  уже в полях  $\geq 10 \text{ кЭ}$ . В [310] подробно обсуждаются проблемы перемагничивания и монодоменизации фторида кобальта с помощью линейного и нелинейного эффектов Фарадея.

Интересны работы [311, 312], посвященные микроскопической теории четного эффекта Фарадея. В них показано, что четный эффект Фарадея по сути дела имеет ту же квантовую природу, что и линейный магнитооптический эффект, т.е. связан с низкой локальной симметрией кристаллического поля в кристаллах и большой величиной одноионной анизотропии.

С феноменологической точки зрения оба явления – линейный магнитооптический эффект и четный эффект Фарадея – описываются тензорами 3 ранга одинаковой внутренней и внешней магнитной симметрии. Это может служить дополнительным аргументом в пользу возможности грубых оценок величины квадратичной магнитной гиротропии для различных магнитных сред по величине линейного магнитооптического эффекта. По экспериментальным данным, полученным в [252] и [264] для линейного магнитооптического эффекта, можно предположить, что компоненты тензора  $\beta_{ijk}$  квадратичной магнитной гиротропии в кристаллах  $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$  и  $D_3\text{FeO}_3$  могут быть большими, чем в  $\text{CoF}_2$ .

В [300] на основании измерений в  $\text{CoF}_2$  было высказано предположение о том, что фарадеевское вращение (магнитная гиротропия)  $\mathbf{G}$  будет пропорциональна индуцируемому магнитному моменту  $\mathbf{M}$ , независимо от того, является ли оно четным или нечетным по полю, т.е.

$$M^{(2)}/G^{(2)} \approx M^{(1)}/G^{(1)}. \quad (5.2.10)$$

Следует, однако, иметь в виду, что значения магнитных восприимчивостей  $c_{ij}$  для  $\text{CoF}_2$  у различных авторов отличаются на порядок [50, 313-316]. Дальнейшие исследования магнитного циркулярного дихроизма в  $\text{CoF}_2$  [302, 50] показали, что предположение (5.2.10) выполняется далеко не всегда и про-

демонстрировали зависимость магнитных гиротропных свойств от физических причин, вызывающих намагниченность.

Тем не менее, по нашему мнению, предварительные качественные оценки величины четного эффекта Фарадея в других магнитных кристаллах можно выполнить, используя известные данные для них по линейному эффекту Фарадея, нелинейной магнитной восприимчивости  $c_{ijk}$  и полагая  $c_{3j}/b_{3j} \approx c_{ijk}/v_{ijk}$ .

В [303] получены теоретические оценки величин нелинейной магнитной восприимчивости для  $CoF_2 - 2 \cdot 10^{-7}$  и для  $MnF_2 - 2 \cdot 10^{-9}$  (в единицах  $CGSM/моль \cdot \text{Э}^2$ ). Для  $CoF_2$  эта оценка хорошо согласуется с экспериментом [314]. Отсюда ясно, что в кристалле  $MnF_2$  четная магнитная гиротропия может быть примерно в 10 раз меньше. Фактически во фториде марганца четный эффект Фарадея не был обнаружен даже при чувствительности измерений  $10^{-11}$  град  $см^{-1} \text{Э}^2$  [50].

Используя экспериментальные данные по намагниченности  $\sigma(\theta)$  и коэффициентам  $c_{ijk}$  для редкоземельных ортоферритов в слабоферромагнитной фазе  $\Gamma_4(m_z m_x' m_y')$  из [304] и магнитооптические параметры линейного эффекта Фарадея из [266, 317, 318], получаем оценку для удельного вращения плоскости поляризации света, обусловленного поперечным четным эффектом Фарадея на длине волны  $\lambda = 6300 \text{ \AA}$  вдоль оси  $z$  в тербиевом и диспрозиевом ортоферритах соответственно: 1. Для  $TbFeO_3$ :  $V_{\perp} = V_{11} c_{113} / y_z = 3.6 \cdot 10^{-1}$  град  $см^{-1} кЭ^{-2}$ , что в 3 раза больше, чем в  $CoF_2$ . 2. Для  $DyFeO_3$ :  $V_{\perp} \approx 0.91 \cdot 10^{-1}$  град  $см^{-1} кЭ^{-2}$ , что примерно совпадает с удельным вращением в  $CoF_2$ .

В работе [319] на кристалле  $DyFeO_3$  в антиферромагнитной фазе  $\Gamma_1$  (магнитная симметрия  $mmm$ ) измерялась компонента  $c_{321}$ , которая оказалась велика:  $c_{321} = 4.2 \cdot 10^{-2}$   $CGSM/(кЭ \cdot Г)$ . Отсюда можно полагать, что в магнитном состоянии  $\Gamma_1$  в ортоферритах будет также велик четный эффект Фарадея при геометрии опыта  $\mathbf{k} \parallel z$ ,  $\mathbf{H} \parallel [110]$ , как и в  $CoF_2$ . Конечно, следует иметь в виду, что наблюдению четной магнитной гиротропии вдоль оси  $[001]$  мешает сильное естественное ДП  $\Delta n \sim 10^{-1}$ , поэтому целесообразнее исследовать квадратичный эффект Фарадея в одноосных кристаллах.

С точки зрения подрешеточной магнитной структуры вектор гирации  $\mathbf{G}$ , описывающий четный эффект Фарадея, равен

$$\mathbf{G}^{(2)} = \pi_1 : mmm + \pi_2 : mml + \pi_3 : mll + \pi_4 : lll + \dots, \quad (5.2.11)$$

т.е. вклад в квадратичное фарадеевское вращение вносят члены, кубичные по векторам ферро-  $\mathbf{m}$  и антиферромагнетизма  $\mathbf{l}, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \dots$ . Зная обменную симметрию кристалла и векторов  $\mathbf{m}, \mathbf{l}, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \dots$  легко найти все отличные от нуля компоненты  $c$ -тензоров 4 ранга  $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ , отражающих различные механизмы четного явления Фарадея. Для этого достаточно воспользоваться результатами симметричного анализа тензорных макроскопических свойств двух- и многоподрешеточных магнетиков, выполненного нами ранее, в главе 4. Ясно, что в слабых ферромагнетиках тензоры  $\pi_1$  и  $\pi_3$  – магнитного (+) типа, а тензоры  $\pi_2$  и

$\pi_4$  – магнитного (–) типа. Матрицы этих тензоров имеют такую же форму, как матрицы псевдотензоров 4 ранга, приводимые в таблицах приложения Б.

Рассмотрим, например, кристаллы типа  $CoF_2$  и  $FeF_2$ , в которых экспериментально исследовался четный эффект Фарадея. Из-за громоздкости мы не будем выписывать все ненулевые компоненты вектора  $\mathbf{G}^{(2)}$ . Укажем только, что в компоненту  $\mathbf{G}^{(2)}_z$  вносят независимые вклады следующие 8 комбинаций

$$l_x l_y l_z, (ml)_z, l^2 m_z, l_z^2 m_z, m_z^3, m_z(l_x m_y - l_y m_x), m^2 \cdot m_z, l_z m_x m_y \quad (5.2.12)$$

векторов  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{l}$ , каждая из которых преобразуется как  $m_z$ .

Если внешнее магнитное поле  $\mathbf{H} \perp \mathbf{Z}$ , то

$$\mathbf{G}^{(2)}_z = a_1(m_x l_x + m_y l_y)l_z + a_2 m_x m_y l_z + a_3 l_x l_y l_z, \quad (5.2.13)$$

где  $a_1, a_2, a_3$  – некоторые скалярные параметры. Как видим,  $\mathbf{G}^{(2)}$  сложным образом зависит от кубичных комбинаций векторов  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{l}$ . Отсюда видно, что в [300, 50] учтены не все слагаемые 3-го порядка в разложении  $\mathbf{G}^{(2)}_z$  по  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{l}$ .

Таким образом, установлены [298, 305, 299] симметричные условия существования и наблюдения нового магнитооптического эффекта – четного (по магнитному полю) эффекта Фарадея, который затем неоднократно экспериментально исследовался.

### 5.3 Магнитогирация

Сейчас на основе подхода магнитной симметрии исследуем условия существования и наблюдения нового магнитооптического явления – магнитогирации. Под магнитогирацией будем понимать **обратимый** эффект вращения плоскости поляризации света, пропорциональный первой степени приложенного постоянного внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}^\circ$ . Напомним, что известный эффект Фарадея является необратимым и накапливается при прохождении света туда–назад через пластинку. Иначе говоря, магнитогирация – это линейное изменение (или возникновение) естественной оптической активности под воздействием поля  $\mathbf{H}^\circ$ .

Разложим аксиальный  $i$ -тензор второго ранга  $\alpha_{ij}$ , описывающий оптическую активность, по степеням напряженности внешнего постоянного магнитного поля  $\mathbf{H}^\circ$ :

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}^\circ + \alpha_{ijk}^H \mathbf{H}_k^\circ + \alpha_{ijkl}^{HH} \mathbf{H}_k^\circ \mathbf{H}_l^\circ + \dots = \alpha_{ij}^\circ + D\alpha_{ij}. \quad (5.3.1)$$

Тензор естественной гиротропии  $\alpha_{ij}$ , вообще говоря, несимметричен. Однако вклад в показатели преломления собственных волн вносит только симметричная часть матрицы  $\alpha_{ij}$ . Антисимметричные же компоненты матрицы  $\alpha_{ij}$  могут вносить вклад лишь в поляризацию волн, что может проявиться при наклонном отражении и преломлении света на границах раздела оптических сред. Это явление, впервые предсказанное Федоровым [16] (по терминологии

авторов [19] – слабая оптическая активность), экспериментально, по-видимому, еще не наблюдалось. Поэтому антисимметричную часть тензора оптической активности учитывать далее не будем, полагая  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ .

В (5.3.1)  $\alpha_{ij}^{\circ}$  – компоненты матрицы оптической гиротропии в отсутствие внешнего поля  $H^{\circ}$ . Пренебрегая слабой оптической активностью заключаем, что линейную магнитогирацию, которую будем называть просто магнитогирацией, можно описывать полярным  $s$ -тензором третьего ранга  $\alpha_{ijk}^H$ , симметричным по перестановке двух индексов  $(i, j)$  – тензором магнитоэлектрического типа. Поэтому магнитогирация возможна только в кристаллах с магнитной структурой. Далее, аксиальный  $i$ -тензор 4 ранга  $\alpha^{HH}$ , симметричный по перестановке индексов внутри пар  $(i, j)$  и  $(k, l)$ , характеризует значительно более слабый эффект квадратичной [320] магнитогирации. Принцип же симметрии кинетических коэффициентов [8, 120] никаких ограничений на компоненты  $\alpha^H$  и  $\alpha^{HH}$  не накладывает, поэтому остаются лишь требования магнитной симметрии, вытекающие из принципа Неймана [28, 31]. Согласно Бирссу [37], полярные  $s$ -тензоры нечетного ранга тождественно равны нулю в группах, содержащих операции временной  $I'$  и пространственной  $\bar{I}$  инверсий. Из 122 магнитных шубниковских классов 32 класса содержат в качестве операции симметрии  $I'$ , 21 класс – пространственную инверсию  $\bar{I}$ . Из оставшихся 122–32–21=69 классов в 3 кубических группах  $432$ ,  $\bar{4}3m'$ ,  $m'3m'$  тензор  $\alpha^H$  также обращается в нуль. Следовательно, по симметричным соображениям, в кристаллах 66 магнитных классов, допускающих также явления невзаимного линейного гиротропного двупреломления [118], магнитогирация может иметь место [321, 152]. Интересно отметить, что в магнитных центрoантисимметричных кристаллах, группы которых содержат операцию антиинверсии  $\bar{I}'$ , но не имеют операций  $\bar{I}$  и  $I'$ , естественная гиротропия симметрично запрещена, а магнитогирация разрешена.

Для наглядного представления внутренней симметрии тензоров удобно пользоваться символикой Яна [28]. Так тензор  $n$ -го ранга общего вида обозначается как  $V^n$ . Это указывает, что такой тензор преобразуется как произведение  $n$  векторов. Если же имеется дополнительная симметрия по перестановке  $k$  индексов из  $n$ , то это обозначается символом  $[V^k]V^{n-k}$ .  $s$ -тензоры и аксиальные тензоры обозначаются дополнительными значками  $\tau$  и  $\varepsilon$  соответственно.

Поэтому внутренняя симметрия полярного  $s$ -тензора магнитогирации  $\alpha^H$  равна  $\tau[V^2]V$ . Аксиальные  $s$ -тензоры 3 ранга, характеризующие линейный магнитооптический эффект, линейную магнитострикцию, пьезомагнетизм и четный эффект Фарадея, обладают одинаковой внутренней симметрией  $\varepsilon\tau[V^2]V$  и отличны от нуля в 66 магнитных классах, изоморфных группам, где возможна магнитогирация. Символически этот изоморфизм можно представить в виде

$$\Phi[V^2]V \leftrightarrow e\Phi[V^2]V \leftrightarrow [V^2]V. \quad (5.3.2)$$

Следовательно, группы симметрии тензоров магнитогирации  $\alpha^H$  магнитоэлектрического типа изоморфны группам симметрии тензоров электрического

типа, характеризующих линейный электрооптический и обратный пьезоэлектрический эффект. Взаимосвязь между группами тензоров магнитного, магнитоэлектрического и электрического типов известна [28]:

$$G_{\text{магн}} \leftrightarrow G_{\text{магнитоэл}} \leftrightarrow G_{\text{электр}} \quad \text{при} \quad \bar{I} \leftrightarrow \bar{I}' \leftrightarrow I', \quad (5.3.3)$$

поэтому отличные от нуля компоненты тензора магнитогирации для различных 66 групп не приводим.

В магнитных нецентросимметричных кристаллах возможно также существование в оптическом диапазоне частот магнитоэлектрического эффекта, проявляющегося в невзаимном линейном двупреломлении. Магнитоэлектрический эффект описывается аксиальным несимметричным тензором второго ранга  $\alpha_{MЭ}$ , который отличен от нуля в 58 магнитных классах. По сравнению с магнитогирацией тензор  $\alpha_{MЭ}$  дополнительно исчезает в классах  $6'm2$ ,  $4'32'$ ,  $\bar{4}3m$ ,  $m'3m$ ,  $\bar{6}$ ,  $6'$ ,  $\bar{6}\bar{I}'$ ,  $\bar{6}m'2'$ ,  $6'2'2$ ,  $6'tm'$ ,  $6'/tm'm'$ , однако дополнительно отличен от нуля в классе  $\bar{I}$ , за счет своей антисимметричной части.

Для экспериментального обнаружения и изучения магнитогирации необходимо выделить ее на фоне других, обычно более сильных эффектов, таких, как линейное кристаллографическое двупреломление, эффект Фарадея, оптическая активность, эффект Коттона-Мутона, линейный магнитооптический эффект, магнитоэлектрический эффект. Расчеты показывают, что в кристаллах следующих 10 магнитных классов:  $4/m'm'm'$ ,  $\bar{3}'$ ,  $\bar{3}'m$ ,  $\bar{6}$ ,  $6/m'$ ,  $6/m'm'm'$ ,  $\bar{6}'m'2'$ ,  $\bar{4}'3m'$ ,  $4/m'$ ,  $m'3m'$  вдоль магнитного поля, направленного по кристаллографической оси высшего порядка, может проявляться циркулярное двупреломление  $\Delta n \sim \alpha_{123}^H H_3$  [321], обусловленное магнитогирацией. В этих кристаллах отсутствует естественная оптическая активность, спонтанный эффект Фарадея и линейное двупреломление. Из-за возможного присутствия также необратимых спонтанного оптического магнитоэлектрического эффекта [136, 121] и его аналога, индуцированного внешним магнитным полем [188-190, 122], собственные волны могут быть эллиптически поляризованными. В итоге при пропускании света вдоль высшего порядка в кристаллах указанных классов может проявляться вращение плоскости поляризации, обусловленное только индуцированными эффектами Фарадея и магнитогирации. Вклад магнитогирации можно выделить, пропуская свет в прямом и обратном направлениях, или перемагнитывая антиферромагнитный кристалл.

Заметим, однако, что магнитоэлектрический эффект хорошо исследован до настоящего времени, по-видимому, лишь в радиодиапазоне частот. Одно время сообщалось [320, 20] об экспериментальном обнаружении магнитогирации в некоторых немагнитных сегнетоэлектрических кристаллах. Интерпретация экспериментальных результатов в [320] как проявление линейной магнитогирации, вызывала возражения [321, 50, 322], поскольку в [320] игнорировались требования принципа Онзагера и не принималось во внимание, что  $\mathbf{H}$ , а, следовательно, и тензор  $\alpha^H$  являются  $c$ -тензорами, т.е. меняющими знак при инверсии времени  $I'$ . Поэтому в [20] и особенно в [32] пред-

принимались попытки обоснования возможности наблюдения магнитогирации в немагнитных средах путем постулирования новых соотношений для кинетических коэффициентов, т.е. коренной модификации принципа Онзагера. Однако такое изменение принципа Онзагера с целью подгонки его под предполагаемое наблюдение магнитогирации представляется неубедительным, так как наблюдаемые эффекты в [320, 20] были малыми и могут быть объяснены в рамках классических симметричных представлений. Коренной же пересмотр принципа симметрии кинетических коэффициентов или соотношений взаимности требует более серьезных обоснований. Более того, позже автор работ [320, 20] сам отказался от трактовки своих результатов как магнитогирации и в [323] предложил новую интерпретацию наблюдавшегося циркулярного дву-преломления как эффекта "магнитополяризационной псевдогирации". В [323] авторы обратили внимание на то, что наблюдаемое ими вращение плоскости поляризации под действием магнитного поля наблюдалась только в пироэлектриках. Оно изменяет свой знак при переполяризации сегнетоэлектрика, а также исчезает выше температуры сегнетоэлектрического фазового перехода (в парамагнитной фазе). Поэтому изменения гиротропии, наблюдаемые во внешнем магнитном поле  $\mathbf{H}$ , авторы [323] стали трактовать как дополнительное вращение плоскости поляризации света, пропорциональное спонтанной электрической поляризации  $\mathbf{P}_s$  и  $\mathbf{H}$ , т.е.  $\Delta\varphi \sim \mathbf{H}\mathbf{P}_s$ . По нашему мнению, влияние  $\mathbf{P}_s$  кристалла на эффект Фарадея вполне возможно, и такая интерпретация экспериментов [323] не противоречит принципу Онзагера.

Для описания магнитогирации мы раскладывали аксиальный  $i$ -тензор 2 ранга  $\alpha_{ij}$ , характеризующий оптическую активность, по  $\mathbf{H}$  (5.3.1). Больше информации можно получить, если разложить  $\alpha^\circ$  по векторам магнитного упорядочения  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{l}$  [52]:

$$\alpha^\circ = \alpha_i^\circ + \alpha^{mm} : \mathbf{m}\mathbf{m} + \alpha^{ll} : \mathbf{l}\mathbf{l} + \alpha^{lm} : \mathbf{l}\mathbf{m}. \quad (5.3.4)$$

Здесь  $\alpha_i^\circ$  - тензор естественной оптической активности в парамагнитной фазе;  $\alpha^{mm}$ ,  $\alpha^{ll}$ ,  $\alpha^{lm}$  - аксиальные  $i$ -тензоры 4 ранга, характеризующие спонтанную магнитогирацию, обусловленную магнитным упорядочением. Компоненты же  $\Delta\alpha_{ij}$ , индуцируемые внешним полем  $\mathbf{H}$ , равны

$$\Delta\alpha = \alpha^{mH} : \mathbf{m}\mathbf{H} + \alpha^{lH} : \mathbf{l}\mathbf{H} + \alpha^{HH} : \mathbf{H}\mathbf{H}. \quad (5.3.5)$$

Разложение (5.3.5) можно также получить из (5.3.4), если учесть линейную зависимость компонент векторов  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{l}$  от  $\mathbf{H}$ .

Таким образом, обратимое вращение плоскости поляризации или оптическая активность может вызываться следующими причинами: а) нецентросимметричностью среды, которая приводит к кристаллографической гиротропии или естественной оптической гиротропии и характеризуется тензором  $\alpha_i^\circ$ ; б) магнитным упорядочением, приводящим к спонтанной магнитогирации, характеризуемой тензорами  $\alpha^{mm}$ ,  $\alpha^{ll}$ ,  $\alpha^{lm}$ ; в) внешним магнитным полем  $\mathbf{H}$ , которое индуцирует вынужденную магнитогирацию, билинейную векторам  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{m}$  или  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{l}$ .

В антиферро- и ферромагнетиках спонтанная магнитогирация описывается тензорами  $\alpha^{ll}$ ,  $\alpha^{mm}$  соответственно. Кроме того, в ферри- и слабых ферромагнетиках она возможна также еще за счет тензора  $\alpha^{lm}$  [52]. Оптическая гиротропия, индуцированная магнитным упорядочением, может проявляться во всех магнетиках, где симметрично разрешена естественная оптическая активность. Общий аксиальный несимметричный  $i$ -тензор второго ранга, характеризующий оптическую активность, не равен тождественно нулю в 58 из 122 шубниковских точечных групп. Из них в 11 классах возможна только слабая гиротропия, характеризуемая антисимметричными компонентами  $\alpha_{ij}^a$ . Ответственный за обратимое циркулярное двупреломление симметричный аксиальный  $i$ -тензор  $\alpha_{ij}$  может иметь ненулевые компоненты в  $58 - 11 = 47$  классах. В них входят 15 кристаллографических (немагнитных) классов [28, 16]:  $1'$ ,  $21'$ ,  $2221'$ ,  $mm21'$ ,  $m1'$ ,  $31'$ ,  $321'$ ,  $41'$ ,  $4221'$ ,  $\bar{4}1'$ ,  $\bar{4}2m1'$ ,  $61'$ ,  $6221'$ ,  $4321'$ ,  $231'$ . На  $i$ -тензор  $\alpha_{ij}$  операция инверсии времени  $1'$  не оказывает влияния, поэтому спонтанная магнитогирация разрешена также в средах 15 магнитных полярных групп ( $1$ ,  $2$ ,  $222$ ,  $m$ ,  $mm2$ ,  $3$ ,  $32$ ,  $4$ ,  $\bar{4}$ ,  $422$ ,  $\bar{4}2m$ ,  $6$ ,  $622$ ,  $432$ ,  $23$ ) и 17 классах смешанной полярности ( $2'$ ,  $2'2'2$ ,  $m'$ ,  $m'm'2$ ,  $32'$ ,  $4'$ ,  $\bar{4}'$ ,  $42'2'$ ,  $4'22'$ ,  $\bar{4}'2'm$ ,  $\bar{4}'2m'$ ,  $\bar{4}'2'm'$ ,  $6'$ ,  $6'22'$ ,  $62'2'$ ,  $4'32$ ,  $mm'2'$ ).

Обсудим возможности экспериментального обнаружения и исследования магнитогирации. Как уже отмечалось, в магнитоэлектриках, где может проявляться линейный магнитооптический эффект, возможна также и магнитогирация, индуцированная внешним магнитным полем  $H$ . Поэтому, за исключением кубических магнитных классов  $432$ ,  $\bar{4}'3m'$ ,  $m'3m'$ , во всех магнитоэлектриках разрешена магнитогирация, иначе говоря, обратимое циркулярное двупреломление, пропорциональное  $H$ .

Список магнитоэлектриков, известных в настоящее время, достаточно велик. К ним относятся, в частности, многие хорошо известные кристаллы: антиферромагнитная при комнатной температуре окись хрома  $Cr_2O_3$  (магнитный класс  $\bar{3}'m'$ ), гематит при температуре ниже 160К, редкоземельные ортоферриты  $RFeO_3$  и ортохромиты  $RCrO_3$  при низких температурах  $< 4K^*$

К достаточно прозрачным магнитным кристаллам в оптическом диапазоне частот принадлежат, например,  $BaMnF_4$  при  $T < 25K$ , борациты  $Ni-Cl$  и  $Ni-I$  при  $T < 9K$  и  $T < 64K$  соответственно, гексагональный  $CsCuCl_3$  [18, 186]. Экспериментально пока, насколько нам известно, влияние магнитной структуры и ее переориентации на оптическую активность не исследовалось. Исключение составляет работа [185], где экспериментально наблюдалась оптическая гиротропия в магнитоупорядоченной несоразмерной фазе кристалла  $BaMnF_4$ . Изучалась также естественная гиротропия в сегнетоэлектрической фазе в

---

<sup>\*</sup> В [324] авторы указали, что в материалах типа  $RMnO_3$  (группа  $D_{2h}$ ) в магнитных фазах  $\Gamma_5 \div \Gamma_8$  возможна магнитогирация.

гексагональном образце  $CsCuCl_3$  [186] и в  $Cu-Cl$  бораците [184], в которых при низких температурах возникает магнитная структура.

Кристаллы  $KNiPO_4$  ниже температуры  $T_N=25K$  являются пироэлектриками и слабыми ферромагнетиками. Чтобы объяснить наблюдаемые явления МЭЭ и др., в [24] предполагается, что симметрия низкотемпературной фазы – ромбическая ( $m'm'2'$  или  $m'm'2$ ), либо даже моноклинная ( $m'$ ,  $m$  или  $2$ ).

В [69] изучался ромбический нецентросимметричный пироэлектрик-ферромагнетик при комнатной температуре (группа симметрии –  $m'2'm$ ). В антиферромагнетике и сегнетоэлектрике  $TbPO_4$  был обнаружен большой магнитоэлектрический эффект.

Мультиферроики – гексагональные редкоземельные манганиты  $RMnO_3$  ( $R$  – редкоземельный ион  $La, Tl, Tb, Dy, Gd$ ) [68, 69]. В них исследовался магнитоэлектрический эффект и сегнетоэлектрические и антиферромагнитные домены. В работах [79, 81] изучались структура и взаимодействие доменных стенок в нецентросимметричном гексагональном сегнетоэлектрике – антиферромагнетике  $YMnO_3$ . В [80] описаны магнитоэлектрические фазовые переходы в кристаллах антиферромагнетиков  $NiO$  и  $RMnO_3$ . В [68] в кристаллах  $RMnO_3$  изучался магнитоэлектрический эффект и наблюдались сегнетоэлектрические и антиферромагнитные домены.

Редкоземельные бораты железа  $GdFe_3(BO_3)_4$  [85] – мультиферроики тригональной структуры. Ферробораты прозрачны при толщинах несколько сот  $\mu m$  в зеленой области спектра. Недавно были синтезированы [90, 69] структуры с гигантскими магнитооптическими эффектами, что открывает новые потенциальные возможности для применений мультиферроиков в информационных системах в качестве сенсоров и в устройствах спинтроники. Оптика и магнитооптика пироэлектрика-ферромагнетика  $GaFeO_3$ , мультиферроика с высокой температурой Кюри, детально изучалась в [69].

Невзаимное двупреломление света исследовалось [62] в нецентросимметричных ромбических борацитах  $M_3B_7O_{17}X$ , где  $M$  – двухвалентный металл,  $X$  – галоген. К ним относятся кристаллы  $Ni-I, Ni-Cl, Ni-Br, Mn-I, Ga-I$ .

При изучении магнитооптических явлений в сегнетомагнетиках необходимо учитывать сегнетоэлектрическую и магнитную доменную структуру. Кроме того, образцы должны обладать малой проводимостью и быть достаточно прозрачными в исследуемом диапазоне частот.

Спонтанная магнитогирация, возникающая при магнитных фазовых переходах, должна быть более ярко выраженным эффектом, чем индуцированная внешним магнитным полем. Переключение направления спонтанных векторов магнетизма  $m$  и антиферромагнетизма  $l$  внешними воздействиями (магнитным полем  $H$ , электрическим полем  $E$  и полем механических напряжений  $T$ ) может переключать также спонтанную магнитогирацию, величина которой при этом должна быть достаточно большой. Такие процессы переключения магнитогирации должны быть аналогичны процессам переключения оптической активности в сегнетоэлектриках, т.е. электрогирации [18, 20]. Правда, надо иметь в виду, что группы симметрии большинства магнитоупорядоченных сред содержат либо центр инверсии  $\bar{I}$ , либо центр антиинверсии  $\bar{I}'$ , и поэтому не мо-

гут обладать никакой оптической гиротропией (невзаимные эффекты сейчас не рассматриваем!). Вместе с тем существуют многие нецентросимметричные магнетики, у которых оптическая активность может иметь место; просто еще не проводились такого рода исследования. К интересным кристаллам для изучения явлений спонтанной и индуцированной магнитогирации относятся магнитные "кубичные" борациты, являющиеся сегнетомагнетиками. Кристаллооптические и магнитные свойства последних изучал Шмид и другие [183, 181, 325]. Уникальным является борацит  $Ni-I$ , в котором при  $T=64K$  происходит фазовый переход, являющийся одновременно сегнетоэлектрическим, ферромагнитным и сегнетоэластическим [182]. При этом возникают линейное дву-преломление, эффект Фарадея и, возможно, оптическая активность. Специального разделения гиротропии на оптическую активность и эффект Фарадея, однако, в борацитах и других магнетиках пока еще не проводилось.

Понятно, что спонтанная и индуцированная внешними воздействиями магнитогирация может использоваться для визуализации антиферромагнитных доменов, подобно тому, как применяются для этой цели линейный и квадратичный эффекты Фарадея.

Итак, нами найдены [321, 116] условия существования и наблюдения нового магнитооптического эффекта – магнитогирации. В соответствии с принципом Онзагера магнитогирация возможна только в кристаллах 66 магнитных классов. Показано, что проще всего наблюдать спонтанную магнитогирацию при переключении доменной структуры магнитоэлектриков.

## 5.4. Новые фотомагнитные явления

В предыдущих разделах данной главы мы обсуждали новые *статические* магнитооптические эффекты, индуцируемые постоянным магнитным полем  $H^0$  – четный эффект Фарадея и линейную магнитогирацию. Перейдем теперь к рассмотрению нелинейных явлений, возникающих в результате действия высокочастотных оптических электромагнитных полей. Важными представителями *динамических* нелинейных оптических явлений являются фотомагнитные явления – эффекты намагничивания различных сред под воздействием светового излучения. В последнее время они привлекают исследователей, что связано, в частности, с возможностями использования фотомагнетизма для систем оптической записи информации [49, 58].

Мысли о возможности намагничивания сред циркулярно поляризованным оптическим излучением впервые были высказаны Л. П. Питаевским [326] и П. С. Першаном [279]. Затем при облучении образца  $Eu^{2+}:CaF_2$  циркулярно поляризованным светом Першаном с сотрудниками [327] было действительно обнаружено возникновение в нем магнитного момента  $M$ , пропорционального интенсивности света  $I$ . В [327] было показано, что коэффициент пропорциональности между  $M$  и  $I$  описывает также эффект Фарадея в данной среде, поэтому обнаруженное фотомагнитное явление было названо обратным эффектом Фарадея.

С течением времени интерес к фотомагнитным явлениям возростал. Наряду с обратным эффектом Фарадея обсуждались также явления намагничивания линейно поляризованным светом в кристаллах с упорядоченной магнитной структурой в присутствии внешнего магнитного поля [328], либо в кристаллах, обладающих спонтанной намагниченностью – ферримагнетиках и слабых ферромагнетиках [329-331]. Авторы [329-331] называют явление намагничивания кристаллов линейно поляризованным светом обратным эффектом Коттона-Мутона по аналогии с обратным эффектом Фарадея [327]. В [331] приводятся результаты экспериментальных попыток обнаружения обратного эффекта Коттона-Мутона на монокристаллических  $Vi$ -содержащих пленках некоторых ферритов-гранатов. Линейно поляризованное излучение лазера с  $\lambda=1.06$  мкм в импульсном режиме направлялось нормально к поверхности пленки феррита-граната и параллельно внешнему магнитному полю. Наблюдался электрический сигнал, пропорциональный интенсивности света и напряженности магнитного поля. Эксперимент [331], однако, показал, что зависимости регистрируемого сигнала от поляризации лазерного излучения не наблюдалось. Не проявлялся также и обратный эффект Фарадея. Поэтому фотомагнитные явления [328-331] требуют дальнейших теоретических исследований и экспериментальных подтверждений.

Проведем общее феноменологическое рассмотрение возможностей намагничивания кристаллов поляризованным светом [332, 333]. Для недиссипативных сред можно ввести, пользуясь термодинамическим подходом Першана [279], потенциальную функцию свободной энергии электромагнитного поля, усредненную во времени

$$F = F_0 - E_i^{-\omega} (y_{ik} E_k^{\omega} + \epsilon_{ik} H_k^{\omega}) + \dots, \quad (5.4.1)$$

где  $E_k^{\omega}$  и  $H_k^{\omega}$  – Фурье-компоненты векторов напряженностей электрического и магнитного полей на частоте  $\omega$  соответственно. Здесь учитываем только линейные по  $E^{\omega}$  и  $H^{\omega}$  слагаемые и пренебрегаем нелинейными высокочастотными слагаемыми высших порядков. В соответствии с [279] электрическая поляризация кристалла на частоте  $\omega$  равна

$$P_i^{\omega} = -\partial F / \partial E_i^{-\omega}. \quad (5.4.2)$$

Аналогично, намагниченность  $M$  на нулевой частоте, индуцируемая в среде световым полем  $E^{\omega}$ , равна  $4M = -\partial F / \partial H^0$ . Поэтому из (5.4.1) находим, что

$$4M = E_i^{-\omega} E_k^{\omega} (\partial y_{ik} / \partial H^0) + E_i^{-\omega} H_k^{\omega} \partial \beta_{ik} / \partial H^0 + \dots \quad (5.4.3)$$

Выражение (5.4.3) без последнего слагаемого было впервые получено Пятаевским и Першаном [326, 327] для описания обратного эффекта Фарадея в немагнитных средах (см. также [8], 2 издание). В [330, 332] отмечалось, что в магнетиках первое слагаемое в (5.4.3) может описывать также обратный эффект Коттона-Мутона. Остановимся на этом вопросе подробнее.

Как следует из закона сохранения энергии, в прозрачных средах тензор линейной восприимчивости  $\sigma$  должен быть эрмитовым:

$$y_{ik} = \bar{\sigma}_{ik} + e_{ikm} g_m, \quad (5.4.4)$$

причем вектор магнитной гирации  $\mathbf{g}$  описывает эффект Фарадея;  $\varepsilon_{ikm}$  – тензор Леви-Чивита;  $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ . Аналогично, в бездиссипативных кристаллах

$$\mathbf{v} = i\mathbf{v}_{OA} + \mathbf{v}_{MЭ}, \quad (5.4.5)$$

где вещественные компоненты  $\beta_{OA}$  и  $\beta_{MЭ}$  характеризуют естественную оптическую активность и магнитоэлектрический эффект в оптическом диапазоне частот (2.10.1), (2.10.5).

Если кристалл находится во внешнем магнитном поле  $\mathbf{H}^\circ$ , то тензоры  $\sigma$  и  $\beta$  можно разложить в ряд по его компонентам:

$$\alpha = \alpha^{(0)} + \alpha^{(1)} \cdot \mathbf{H}^\circ + \alpha^{(2)} : \mathbf{H}^\circ \mathbf{H}^\circ + \dots; \quad (5.4.6)$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}^{(0)} + \mathbf{g}^{(1)} \cdot \mathbf{H}^\circ + \mathbf{g}^{(2)} : \mathbf{H}^\circ \mathbf{H}^\circ + \dots; \quad (5.4.7)$$

$$\beta_{OA} = \beta_{OA}^{(0)} + \beta_{OA}^{(1)} \cdot \mathbf{H}^\circ + \beta_{OA}^{(2)} : \mathbf{H}^\circ \mathbf{H}^\circ + \dots; \quad (5.4.8)$$

$$\beta_{MЭ} = \beta_{MЭ}^{(0)} + \beta_{MЭ}^{(1)} \cdot \mathbf{H}^\circ + \beta_{MЭ}^{(2)} : \mathbf{H}^\circ \mathbf{H}^\circ + \dots. \quad (5.4.9)$$

В соотношениях (5.4.6)–(5.4.9) тензор  $\alpha^{(0)}$  описывает спонтанное линейное двупреломление;  $\alpha^{(1)}$  – его изменение, называемое линейным магнитооптическим эффектом [50, 56];  $\alpha^{(2)}$  – эффект Коттона-Мутона; тензоры  $\mathbf{g}^{(0)}$ ,  $\mathbf{g}^{(1)}$ ,  $\mathbf{g}^{(2)}$  характеризуют спонтанный эффект Фарадея, линейный и квадратичный по  $\mathbf{H}^\circ$  эффекты Фарадея соответственно;  $\mathbf{v}_{OA}^{(0)}$ ,  $\beta_{OA}^{(1)}$  и  $\mathbf{v}_{OA}^{(2)}$  – спонтанную естественную оптическую активность, линейную и квадратичную магнитогирацию соответственно;  $\mathbf{v}_{MЭ}^{(0)}$  – спонтанный магнитоэлектрический эффект, а тензор  $\mathbf{v}_{MЭ}^{(1)}$  описывает аналог оптического магнитоэлектрического эффекта, индуцируемого внешним полем [188-190].

Подставляя (5.4.6)–(5.4.9) в (5.4.3), получаем выражение

$$4M_n = [\bar{\sigma}_{ikn}^{(1)} + 2\bar{\sigma}_{iknp}^{(2)} H_p^\circ + ie_{ikm} (\mathbf{g}_{mn}^{(1)} + 2\mathbf{g}_{mnp}^{(2)} H_p^\circ)] E_i^{-\omega} E_k^\omega + [i(\mathbf{v}_{OA}^{(1)})_{ikn} + (\mathbf{v}_{MЭ}^{(1)})_{ikn} + 2i(\mathbf{v}_{OA}^{(2)})_{iknp} H_p^\circ + 2(\mathbf{v}_{MЭ}^{(2)})_{iknp} H_p^\circ] E_i^{-\omega} H_k^\omega + \dots \quad (5.4.10)$$

для расчета постоянного магнитного момента, индуцируемого электромагнитным излучением частоты  $\omega$  в различных прозрачных средах. Полярный  $i$ -тензор 2 ранга  $\mathbf{g}^{(2)}$  описывает эффект Фарадея, а также намагничивание среды циркулярно поляризованным светом – хорошо известный обратный эффект Фарадея [327, 8].

Можно сделать общий вывод о том, что в непоглощающих кристаллах все тензоры, характеризующие прямые статические магнитооптические эффекты в присутствии постоянного магнитного поля  $\mathbf{H}^\circ$ , определяют также соответ-

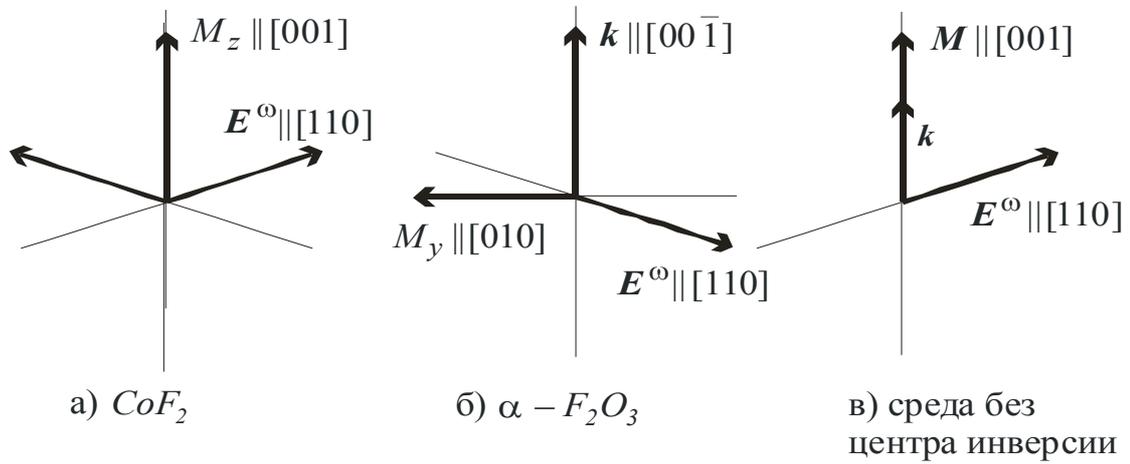
вующие им обратные фотомагнитные явления. Поэтому тензоры  $\bar{\alpha}_{(ik)n}^{(1)}$ ,  $\bar{\alpha}_{(ik)np}^{(2)}$ , симметричные по индексам  $(i, k)$ , характеризуют возможности намагничивания среды *линейно* поляризованным светом. Полярный  $i$ -тензор 4 ранга  $\alpha^{(2)}$  возможен во всех средах и отвечает за слабый обратный эффект Коттона-Мутона – индуцирование намагниченности линейным светом в присутствии постоянного поля  $H^\circ$ . Более интересным и достигающим больших значений является явление намагничивания среды линейно поляризованным излучением за счет компонент  $\alpha^{(1)}$ . Аксиальный  $s$ -тензор 3 ранга  $\alpha^{(1)}$  описывает, как уже указывалось, наблюдавшееся в ряде кристаллов линейное двупреломление света, нечетное по магнитному полю  $H^\circ$  [50, 56], т.е. линейный магнитооптический эффект. Намагничивание линейно поляризованным светом, возможное только в магнитоупорядоченных средах (пьезомагнетиках), обусловлено тензором  $\alpha^{(1)}$  и является термодинамически обратным линейному магнитооптическому эффекту. Недавно обсуждались возможности намагничивания кристаллов, обладающих спонтанной намагниченностью, плоскополяризованным излучением. Тензоры  $\alpha^{(1)}$ ,  $\alpha^{(2)}$  описывают, естественно, такие явления. (Заметим попутно, что термин обратный эффект Коттона-Мутона, введенный в [329, 331] для характеристики явлений намагничивания среды линейным светом, описываемых тензором  $\alpha^{(2)}$ , по своему смыслу правильнее относить к тензору  $\alpha^{(1)}$ ).

Вместе с тем  $s$ -тензор  $\alpha^{(1)}$  отвечает также за новый [332, 333] фотомагнитный эффект намагничивания плоскополяризованным светом в *скомпенсированных* антиферромагнетиках. Так, например, в антиферромагнитном кристалле фторида кобальта при прохождении линейно поляризованного ( $E^\omega \parallel [110]$ ) света вдоль оси  $[1\bar{1}0]$  должен возникнуть поперечный ( $M \perp k$ ) *постоянный* магнитный момент (рисунок 5а)

Аналогично, линейно поляризованный ( $E^\omega \parallel [010]$ ) свет, проходя вдоль кристаллографической оси  $[001] \parallel k$  гематита  $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$  (при температуре 300К), будет индуцировать поперечный ( $M \perp k$ ) магнитный момент  $M_y = \bar{\alpha}_{122}^{(1)} E_2^{-u} E_1^u / 2$  (рисунок 5б).

Примененный здесь термодинамический подход позволяет непосредственно оценить величину намагничивания кристалла плоскополяризованным излучением по известным экспериментальным данным для линейного магнитооптического эффекта. В немагнитных средах обратный эффект Фарадея вектор гирации  $g^{(0)} \sim 10^{-11}$ , в  $\text{CoF}_2$  –  $\alpha_{63}^{(1)} = 2.2 \cdot 10^{-10}$ , а в гематите  $\alpha_{(12)2}^{(1)} = 10^{-8}$  единиц СГС [56]. Следовательно, эффективность намагничивания линейно поляризованным излучением в  $\text{CoF}_2$  будет примерно в 20 –, а в гематите – в  $10^3$  раз выше, чем при использовании циркулярного излучения в немагнитных средах. Так, для гематита при мощности излучения  $N = 2 \cdot 10^7 \text{ Вт/см}^2$  получаем  $M \approx 1 \text{ Гс}$ .

$$M_z = \bar{\alpha}_{63}^{(1)} E_1^{-u} E_1^u / 2. \quad (5.4.11)$$



**Рисунок 5** – Намагничивание кристаллов линейно поляризованным светом.

а) фторид кобальта  $CoF_2$ ,  $M_z = \beta_{123}^{(1)} E_2^{-\omega} E_1^{\omega} / 2$  ;

б) гематит  $\alpha-Fe_2O_3$ ,  $M_y = \beta_{122}^{(1)} E_2^{-\omega} E_1^{\omega} / 2$  ;

в) нецентросимметричная изотропная среда,  $M = 2\pi\beta S/c$ .

В [74] сообщалось, что в кристаллах  $Ca-Mn-Ge$  граната с помощью линейно поляризованного света удалось осуществить перемагничивание полосовых антиферромагнитных доменов. Т.обр., наблюдалось предсказанное нами в [332] намагничивание кристалла линейно поляризованным излучением. В кристаллах  $Ca-Mn-Ge$  граната был также зарегистрирован [72] четный эффект Фарадея.

Обратимся теперь к оптическому магнитоэлектрическому эффекту. Несимметричный  $i$ -тензор 3 ранга  $\beta_{m\alpha}^{(i)}$  в (5.4.9) отвечает за невзаимное линейное двупреломление света, иначе, по терминологии Д. Л. Портигала [334] – за магнитопространственную дисперсию, которую экспериментально наблюдали М. А. Новиков и др. [188-190]. В кристаллах  $KDP$  и  $LiIO_3$  для линейного света при геометрии опыта  $H^\circ \perp k \perp [001]$  изменение двупреломления, обусловленное магнитопространственной дисперсией, составило  $3.7 \cdot 10^{-9} \text{ кЭ}^{-1}$  и  $2.3 \cdot 10^{-10} \text{ кЭ}^{-1}$  соответственно. А в арсениде галлия в экситонной области спектра вблизи края фундаментального поглощения ( $h\omega = 1.496 \text{ эВ}$ ) А. С. Гоголину и др. [335] удалось наблюдать за счет этого явления рекордное значение двупреломления  $\Delta n/H^\circ = 10^{-6} \text{ кЭ}^{-1}$ !

В [63] изучались невзаимные линейное двупреломление и линейный дихроизм в борците  $Co_3B_7O_{13}I$  в кубической фазе в поперечной геометрии. Этот эффект также относится к явлениям магнитопространственной дисперсии и его анизотропия характерна для тензора магнитоэлектрического эффекта в оптическом диапазоне. В [60] исследовались обсуждаемые явления дисперсии в пара-, ферро- ( $LiF_3O_5$ ) и  $Cr_2O_3$  кристаллах, индуцируемые магнитным полем или параметром порядка.

С другой стороны, тот же тензор  $\beta_{m\alpha}^{(i)}$  в (5.4.10) описывает фотомагнитный эффект намагничивания кристалла линейным светом, по симметрии разрешае-

мый во всех нецентросимметричных немагнитных средах. Это новое, предсказанное в [333] фотомагнитное явление, термодинамически обратное магнитопространственной дисперсии и поэтому его естественно назвать обратной магнитопространственной дисперсией. Можно оценить величину момента  $M$ , индуцируемого в нецентросимметричных немагнитных средах линейно поляризованным светом. Для обратного эффекта Фарадея  $\Delta n/H^\circ = 10^{-8}$  кЭ<sup>-1</sup>. Следует также в виду, что в [190] измерялось только линейное двупреломление, а изотропный вклад в показатели преломления остался неизвестным. Так как изотропные добавки в показатели преломления обычно на 2 ÷ 3 порядка больше, чем анизотропные, то можно ожидать, что возможен процесс намагничивания нецентросимметричных немагнитных сред линейным светом (явление обратной магнитопространственной дисперсии), по величине превышающий известный обратный эффект Фарадея на 1 ÷ 2 порядка.

Тензор  $\beta_{M\Omega}^{(l)}$  отличен от нуля во всех нецентросимметричных средах, но его изотропная часть (псевдоскаляр) имеется лишь в энантиоморфных, т.е. в тех веществах, группы симметрии которых не содержат инверсионных поворотов. Таких кристаллографических классов 11: (1, 2, 222, 3, 32, 4, 422, 6, 622, 23, 432). Все они являются оптически активными. Например, в изотропной среде без центра инверсии магнитный момент  $M$ , индуцируемый светом за счет механизма обратной магнитопространственной дисперсии, равен

$$M = \beta_{M\Omega}^{(l)} [E^{-\omega} H^\omega], \quad (5.4.12)$$

где  $\beta_{M\Omega}^{(l)}$  – псевдоскаляр. Отсюда следует также, что возможно также намагничивание энантиоморфных сред произвольно поляризованным светом.

С другой стороны, усредненный по времени вектор Умова–Пойнтинга равен  $S = c[E^{-\omega} H^\omega] / (8\pi)$ , поэтому (рисунок 5в)

$$M = 2\pi\beta S/c, \quad (5.4.13)$$

где  $\beta$  – некоторый псевдоскаляр. Это означает, что в энантиоморфных средах разрешается симметрией линейная связь между аксиальным  $c$ -вектором  $M$  и полярным  $c$ -вектором  $S$ . Вектор потока энергии  $S$  может характеризовать не обязательно световые волны, но и акустические, тепловые и т.д. Взглянем на (5.4.13) с более общих симметричных позиций.

Так как  $M$  меняет знак при инверсии времени  $t \rightarrow (-t)$ , то для его возникновения необходима энантиоморфная среда (содержащая псевдоскалярные параметры) и либо диссипация энергии, либо другие процессы, изменяющие знак при обращении времени. К ним относятся, например: **А.** Процессы переноса массы, заряда, импульса, момента импульса, тепла, энергии и т.д. **Б.** Диссипативные процессы, приводящие к выделению джоулева тепла. **В.** Движение среды относительно наблюдателя (описываемое преобразованиями Лоренца [94]).

Из (5.4.10) видно, что вклад в момент  $M$  может также вносить линейная магнитогирация (тензор  $\beta_{O\Omega}^{(l)}$ ). Наконец, ответственными за изменение магнитного момента сред в присутствии световых волн и постоянного поля  $H^\circ$

могут быть также обратные магнитооптические явления, квадратичные по  $H^\circ$ . Они более слабые, чем линейные, и представляют поэтому меньший интерес.

Итак, на базе термодинамического анализа нами установлено [332, 333], что каждый тензор, характеризующий прямой магнитооптический эффект в присутствии постоянного магнитного поля  $H^\circ$ , одновременно описывает также и термодинамически ему обратный фотомагнитный эффект. Предсказаны [332, 116] два новых фотомагнитных явления, обратные известным эффектам линейного магнитооптического эффекта и магнитопространственной дисперсии и приводящие соответственно к намагничиванию антиферромагнитных пьезомагнетиков и нецентросимметричных сред линейно поляризованным излучением. Первое явление затем наблюдалось [74] экспериментально. Показано также, что в энантиоморфных средах любые процессы, неинвариантные относительно  $I'$ , могут также приводить к намагничиванию последних.

## 5.5 Влияние магнитного поля и магнитного упорядочения на генерацию второй гармоники

К нелинейным оптическим явлениям, наряду с обсуждавшимися ранее, относится генерация второй гармоники, описание которой производится обычно с помощью нелинейной поляризации

$$P^{2\omega} = \chi^{2\omega} : E^\omega E^\omega, \quad (5.5.1)$$

учитывающей электродипольные взаимодействия.

Генерация второй гармоники наблюдалась [85] в мультиферроике  $CaFeO_3$  [69] и магнетике  $GdFe_3(BO_3)_4$ , которые не обладают центром симметрии. В [70] с ее помощью определялась магнитная симметрия гексагональных манганитов.

Как известно, полярный  $i$ -тензор 3 ранга  $\chi^{2\omega}$ , характеризующий генерацию второй гармоники, в центросимметричных средах тождественно равен нулю. Между тем в средах с центром инверсии [85] вторая гармоника наблюдалась, хотя и слабая [279, 280, 281, 336, 337]. Так, в [78] исследовалась последняя в центросимметричных антиферромагнетиках  $NiO$  и  $KNiF_3$ . В таких случаях возникновение второй оптической гармоники может быть обусловлено другими механизмами: электрическими квадрупольными, магнитодипольными взаимодействиями; неоднородностями сред вследствие несовершенства кристаллической решетки или шероховатости окружающей поверхности. Кроме того, приповерхностный слой кристалла обладает структурой, отличной от структуры в объеме. В нем нарушается инверсионная симметрия и поэтому становится возможной генерация второй гармоники.

Все эти механизмы, приводящие к возникновению излучения на удвоенной частоте при отражении света от центросимметричных сред, часто дают примерно одинаковые вклады в амплитуду второй гармоники, которая по порядку величины в  $\lambda/a \sim 10^3$  раз меньше, чем в нецентросимметричных средах.

Внешнее магнитное поле также может влиять на генерацию удвоенной частоты. Отметим работы Келиха и Заводного [270, 271, 338, 339, 362], а так-

же других авторов [279, 192, 280, 324, 341-343] по теории нелинейных магнитооптических явлений.

В средах с упорядоченной магнитной структурой появляются дополнительные возможности для обсуждаемого явления [270, 271, 324, 339, 341].

Обсудим вопрос о генерацию второй гармоники магнитоупорядоченными кристаллами, у которых парамагнитная фаза является центросимметричной и поэтому не допускает генерацию второй гармоники в электродипольном приближении. Магнитная часть  $\chi^{(m)}$  тензора нелинейной восприимчивости  $\chi^{2\omega}$  такого однородного магнетика может содержать слагаемые, зависящие от компонент  $M_i$  векторов ферро- и антиферромагнетизма, внешнего магнитного поля  $H^\circ$  [341]:

$$\chi_{ijk}^{(0)} = i\bar{b}_{ijkl}M_l + \epsilon_{ijkl}H_l^\circ M_n + \dots \quad (5.5.2)$$

Здесь первое и второе слагаемые являются тензорами магнитоэлектрического и магнитного типа [28].

В кристаллах  $Nb_2Mn_4O_9$ ,  $Cr_2O_3$  и других наблюдается магнитный фазовый переход  $\bar{3}m1' \rightarrow \bar{3}'m'$  [40]. При этом возникает возможность индуцирования второй гармоники за счет магнитной структуры. Такая гармоника изучалась в  $Cr_2O_3$  [82, 83] как функция температуры, поэтому отметим некоторые особенности ее генерации в кристаллах типа  $Cr_2O_3$ .

Пусть на полубесконечный кристалл симметрии  $\bar{3}'m'$  нормально падает плоская монохроматическая эллиптически поляризованная световая волна частоты  $\omega$ . В [168] в приближении заданного поля нами решена граничная задача о генерации второй гармоники в отраженном и преломленном свете для такой геометрии опыта. Показано, что в указанных кристаллах, обладающих центром антиинверсии  $\bar{1}'$ , вторая гармоника может возникать за счет магнитного упорядочения, даже в отсутствие внешнего магнитного поля, причем отраженная волна второй гармоники имеет эллиптичность, отличную от эллиптичности падающей, хотя оси эллипса поляризации вектора  $E^{2\omega}$  не изменяются. При циркулярной поляризации падающего излучения как отраженная, так и прошедшая волны на частоте  $2\omega$  будут также поляризованы по кругу.

В кубических центросимметричных парамагнетиках возможны магнитные фазовые переходы типа  $m\bar{3}m1' \rightarrow m\bar{3}m'$  (прозрачный антиферромагнетик  $Dy_4Al_5O_{12}$ ) переходы типа  $m\bar{3}m1' \rightarrow \bar{3}'m'$  (редкоземельные ферриты-гранаты иттрия, диспрозия и др.). Симметричный анализ показывает, что вторая гармоника в таких магнетиках может возникать только в присутствии внешнего магнитного поля  $H^\circ$ . Тем не менее в эпитаксиальных пленках некоторых редкоземельных ферритов-гранатов все-таки наблюдались [344] вторая гармоника и нелинейный эффект Фарадея. Авторы [344] сообщают, что обнаружили также влияние магнитного поля  $H^\circ$  на генерацию второй гармоники. Эти данные по-видимому, можно объяснить нарушением трансляционной симметрии в пленках и квадрупольными взаимодействиями.

В кристаллах с центросимметричной парамагнитной фазой переход в магнитоупорядоченное состояние приводит к возникновению некоторых нелинейных магнитооптических явлений в "чистом" виде, поскольку их существование запрещается симметрией немагнитного состояния среды. В то же время в средах без центра инверсии магнитные фазовые переходы усиливают уже имеющиеся эффекты, описываемые тензорами нечетного типа.

В [168] нами также указывалось, что при магнитном фазовом переходе типа  $3m1' \rightarrow 3m$  [345], который происходит, например, в кристаллах феррита висмута, процесс генерации второй гармоники вдоль оси 3 порядка должен усиливаться при возникновении магнитного упорядочения как за счет возникающей внутренней магнитной структуры, так и внешнего магнитного поля. Кроме того, должен проявляться [168] поворот осей эллипса отраженной волны второй гармоники, которые в парамагнитной фазе совпадают с осями эллипса падающей световой волны.

И действительно, позже в отраженном (неполяризованном) свете от кристаллов  $BiFeO_3$  на длине волны  $\lambda_1 = 578.2$  нм в [343] было экспериментально обнаружено значительное нелинейное изменение интенсивности второй гармоники ( $\lambda_2 = 289.1$  нм) с температурой вблизи точки Нееля. Авторы [343] объясняют такое изменение (увеличение) интенсивности второй гармоники квадратичным вкладом компонент вектора антиферромагнетизма  $\mathbf{G}$  в нелинейную поляризацию. Это, по-видимому, был первый эксперимент по наблюдению влияния магнитного упорядочения на генерацию второй гармоники в оптическом диапазоне частот. По нашему мнению, в описанном эксперименте [343] может проявляться также линейный вклад слабого ферромагнитного момента  $\mathbf{M}$  в нелинейную поляризацию  $\mathbf{P}^{2\omega}$ . Требуются дальнейшие экспериментальные и теоретические исследования в этом направлении.

Итак, показана [168] возможность генерации второй гармоники в магнетиках с центросимметричной парамагнитной фазой как за счет возникновения магнитного упорядочения, так и за счет внешнего магнитного поля. Предсказание [168] усиления генерации второй гармоники в феррите висмута при магнитном фазовом переходе затем было подтверждено в [343] экспериментально.

## 5.6. Влияние магнитоэлектрической связи на нелинейные оптические взаимодействия в сегнетомагнитных борацитах

Для изучения влияния магнитного упорядочения на генерацию второй гармоники целесообразно использовать переключение (переориентацию) магнитных доменов образца внешними воздействиями. Обсудим этот вопрос на примере сегнетомагнитного борацита [10, 11]  $Ni_3B_7O_{13}J$ . Он является пьезоэлектрическим парамагнетиком с точечной группой симметрии  $43m1'$  при температурах выше 120К, пьезоэлектриком с точечной группой симметрии  $mm2$  при  $T = 64\text{К} \div 120\text{К}$ , сегнетоэлектрическим слабым ферромагнетиком ниже 64К с магнитной группой симметрии  $m'm'2'$  (хотя вопрос о точечной группе антиферромагнитной фазы не выяснен до конца) [11, 325, 182].

Сегнетомагнитная фаза  $Ni-J$  борацита допускает статический магнито-электрический эффект, т.е. линейную связь между векторами  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{M}$ . Ниже 64К вектор спонтанной электрической поляризации ориентирован вдоль кристаллографической оси  $[001]$ . Спонтанный магнитный момент  $\mathbf{M}$ , направление которого определялось посредством эффекта Фарадея [325, 182], лежит в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{M} \parallel [110]$ . Электрическое переключение внешним полем  $E=5$  кВ/см вектора  $\mathbf{P}$  на  $180^\circ$  от направления  $[001]$  к  $[00\bar{1}]$  приводит за счет магнитоэлектрической связи к повороту  $\mathbf{M}$  на  $90^\circ$  от оси  $[110]$  к оси  $[1\bar{1}0]$ . Справедливо и обратное: вращение приложенного магнитного поля порядка 6 кЭ на  $90^\circ$  от оси  $[110]$  к  $[1\bar{1}0]$  переориентирует  $\mathbf{P}$  на  $180^\circ$  от оси  $[001]$  к оси  $[00\bar{1}]$  [325].

О наблюдении процесса генерации второй гармоники в некоторых борацитах сообщалось в [345], при этом интенсивность ее в результате сегнетоэлектрических переходов возросла примерно вдвое. Поэтому представляется интересным рассмотреть влияние магнитного упорядочения и его переключения на нелинейные оптические взаимодействия (генерацию второй гармоники) в сегнетомагнетиках на примере  $Ni-J$  борацита.

Пусть плоская электромагнитная волна частоты  $\omega$  нормально падает на поверхность пластинки из нелинейного магнитоупорядоченного кристалла  $Ni-J$  борацита, вырезанной перпендикулярно оси  $[110]$ .

Тензор нелинейной восприимчивости  $\chi_{ijk}$ , связывающий векторы нелинейной поляризации среды  $\mathbf{P}^{2\omega}$  с векторными амплитудами  $\mathbf{E}^\omega$  световых волн, зависит от векторов спонтанной поляризации  $\mathbf{P}$  и намагниченности  $\mathbf{M}$  и равен

$$\chi_{ijk} = \chi_{i(jk)}^\circ + \chi_{in(jk)}^P P_n + i\chi_{in(jk)}^M M_n + \dots \quad (5.6.1)$$

Принимая во внимание явный вид тензоров  $\chi^\circ, \chi^P, \chi^M$ , определяемый группой симметрии  $\bar{4}'3m'$ , можно вычислить вектор нелинейной поляризации  $\mathbf{P}^{2\omega}$ .

Интенсивность второй гармоники  $I^{2\omega}$  сильно зависит от поляризации падающего излучения и ориентации векторов  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{M}$  в образце.

**I.** Пусть, например, образец находится в состоянии с  $\mathbf{M} \parallel [110]$ ,  $\mathbf{P} \parallel [001]$ .

а) Если падающее излучение на кристалл линейно поляризовано вдоль оси  $[001]$ , тогда в отраженном свете можно наблюдать вторую гармонику с интенсивностью

$$I^{2\omega} \sim [( \chi_{33}^P P )^2 + ( \chi_{66}^M M )^2 ] ( I^\omega )^2. \quad (5.6.2)$$

б) Если же свет поляризован вдоль оси  $[1\bar{1}0]$ , то

$$I^{2\omega} \sim [ ( \chi_{14}^\circ - \chi_{31}^P P )^2 + ( \chi_{66}^M M )^2 / 4 ] ( I^\omega )^2. \quad (5.6.3)$$

**II.** Теперь внешним электрическим или магнитным полем переключим векторы  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{M}$  в кристалле так, чтобы  $\mathbf{M} \parallel [1\bar{1}0]$ ,  $\mathbf{P} \parallel [00\bar{1}]$  и  $\mathbf{k} \perp \mathbf{M}$ .

а) Для линейно поляризованного света вдоль  $[001]$  интенсивность второй гармоники

$$I^{2\omega} \sim ( \chi_{33}^P P )^2 ( I^\omega )^2. \quad (5.6.4)$$

б) Если же  $E^\omega || [1\bar{1}0] || \mathbf{x}$ , то

$$I^{2\omega} \sim (c_{14}^\circ + c_{31}^P P)^2 (I^\omega)^2. \quad (5.6.5)$$

На основании экспериментальных данных по генерации второй гармоники в борацитах и феррите висмута [343] будем предполагать, что  $|\chi^P P| \leq |\chi^\circ|$ ,  $|\chi^M M| \leq |\chi^\circ|$ , поэтому относительное изменение интенсивности второй гармоники  $\Delta I^{2\omega}/I^{2\omega}$  в отраженном свете при переполяризации и перемагничивании кристаллического образца *Ni-J* борацита может достигать десятков процентов, что нетрудно зарегистрировать на эксперименте.

Таким образом, в данном разделе показано, что в *Ni-J* бораците магнито-электрический эффект не вносит существенных изменений в генерацию второй гармоники из-за своей малости, однако магнитоэлектрическая связь позволяет осуществлять одновременное переключение спонтанных векторов **P** и **M**, переориентируя тензор нелинейной восприимчивости  $\chi_{ijk}$  и значительно влияя [116] тем самым на интенсивность второй гармоники.

Изменяя поляризацию  $E^\omega$  светового излучения, а также переориентируя векторы **P** и **M** в образце внешним электрическим либо магнитным полем, можно разделить вклады во вторую гармонику, обусловленные электрической и магнитной структурой и измерить нелинейные магнитооптические коэффициенты  $c_{14}^\circ$ ,  $c_{33}^\circ$ ,  $c_{31}^P$ ,  $c_{66}^M$ .

## 5.7 Магнитооптические свойства антиферромагнитного *Ca-Mn-Ge* граната

Одним из перспективных кристаллов для технических применений является кальций-марганец-германиевый гранат  $Ca_3Mn_2Ge_3O_{12}$  (или сокращенно *Ca-Mn-Ge*) [50, 72, 74, 75]. При температуре  $T=516\text{K}$  в нем происходит янтеллеровский фазовый переход, и симметрия кристалла понижается от кубической  $m\bar{3}m1'$  до тетрагональной. При дальнейшем понижении температуры до  $T_N=13.5\text{K}$  возникает антиферромагнитное упорядочение. Симметрия новой фазы твердо не установлена, но предпочтение (на основании рентгеноструктурных исследований) ранее отдавалось группе  $4/m$ . Согласно же магнитооптическим исследованиям [50, 72, 74, 75], магнитный класс этого граната –  $4'/m$ . Мы в дальнейшем будем полагать его также  $4'/m$ .

Проведем симметричный анализ магнитооптических и других макроскопических физических свойств *Ca-Mn-Ge* граната с учетом возможно доменной магнитной и кристаллической структуры.

Сначала обсудим возможную доменную структуру кристалла в тетрагональной фазе  $4/m1'$ . Для этого разложим группу  $m\bar{3}m1'$  по ее подгруппе  $4/m1'$ :

$$m\bar{3}m1' = 1 \bullet 4/m1' + m_x \bullet 4/m1' + 4_y \bullet 4/m1' + 4_y^{-1} \bullet 4/m1' + 4_x \bullet 4/m1' + 4_x^{-1} \bullet 4/m1'. \quad (5.7.1)$$

Здесь  $1$ ,  $m_x$ ,  $4_y$ ,  $4_y^{-1}$ ,  $4_x$ ,  $4_x^{-1}$  – представители шести смежных классов.

Число  $n$  возможных различных кристаллических доменов, согласно [384, 29], равно отношению порядков групп:

$$n = n_{m_3m_1'} / n_{4/m_1'} = 96/16 = 6. \quad (5.7.2)$$

Три кристаллических двойника ориентированы тетрагональными осями вдоль кристаллографических осей  $4_x$ ,  $4_y$ ,  $4_z$  кубической фазы кристалла соответственно. Каждая из компонент двойника имеет соответственно симметрию

$$4/m_x 1', 4/m_y 1', 4/m_z 1'. \quad (5.7.3)$$

Эти три группы отличаются физическими тензорами второго ранга, в частности, тензорами спонтанной деформации  $\hat{\epsilon}$  и обратной диэлектрической проницаемости  $\epsilon^{-1}$ . Поэтому они легко различаются кристаллооптически (по разной ориентации оптических индикатрис) и могут переключаться с помощью одноосных напряжений, прилагаемых вдоль осей [001], [010], [100] кубической фазы.

Симметрия же каждой пары кристаллического двойника –  $4/mmm 1'$ . Так, двум смежным классам  $1 \bullet 4/m_z 1'$  и  $m_x \bullet 4/m_z 1'$  разложения (5.7.1) соответствует кристаллический  $z$ -двойник с осями  $4_z$  вдоль [001]. Следуя [50], обозначим компоненты этого двойника через  $d$  и  $\tilde{d}$ . Компоненты  $d$  и  $\tilde{d}$  кристаллического  $z$ -двойника идентичны по линейным оптическим свойствам. Они различаются, как можно показать, лишь тензорами 4-го ранга типа  $[V^2]^2$  и  $[[V^2]^2]$ , например, модулями упругости  $c_{mn}$ . Действительно, в классе  $4/m_z mm 1'$  компоненты тензора упругости  $c_{16} = c_{26} = 0$ , а в классе  $4/m_z 1'$  –  $c_{16} = -c_{26} \neq 0$ . Поэтому можно указать напряжения переключения домена  $d$  в домен  $\tilde{d}$  и обратно:

$$\sigma_{11}\sigma_{12} \text{ или } \sigma_{22}\sigma_{12}. \quad (5.7.4)$$

Итак, для механического переключения компонент двойника  $d$  и  $\tilde{d}$  необходимо приложить касательное  $\sigma_{12}$  и одноосное  $\sigma_{11}$  или  $\sigma_{22}$  напряжения одновременно. Кристаллические двойники  $d$  и  $\tilde{d}$  ведут себя подобно известным дофинеи́ским или бразильским двойникам.

Кроме того, двойники  $d$  и  $\tilde{d}$  будут отличаться нелинейными оптическими эффектами, описываемыми тензорами 4-го ранга, например, электрооптическими постоянными квадратичного эффекта Керра, пьезооптическими и упругооптическими свойствами. В последнем случае

$$p_{16} = -p_{26}, \quad p_{61} = -p_{62}, \quad p_{45} = -p_{54} \quad (5.7.5)$$

для упругооптических коэффициентов.

При магнитном фазовом переходе  $4/m_z 1' \rightarrow 4'/m_z$  из каждого члена кристаллического двойника могут возникнуть два антиферромагнитных домена. Из  $d$  получаются  $d^+$  и  $d^-$ , а из  $\tilde{d}$  –  $\tilde{d}^+$  и  $\tilde{d}^-$  [50]. Знаки ( $\pm$ ) здесь соответствуют противоположным ориентациям антиферромагнитного момента вдоль оси  $z$ . Действительно, при переходе  $4/m_z 1' \rightarrow 4'/m_z$  симметрия понижа-

ется вдвое, и образуются два типа антиферромагнитных доменов, связанных операцией инверсии магнитной структуры  $I'$ .

Все четыре типа доменов ( $d^+$ ,  $\tilde{d}^+$ ,  $d^-$ ,  $\tilde{d}^-$ ) имеют одинаковые оптические индикатрисы. Как можно показать, по переключающим воздействиям типа  $\sigma_{ik}H_n^0$ , где  $H^0$  – внешнее магнитное поле, они различаются полностью, а по  $\sigma_{ik}\sigma_{mn}$  – частично. Антиферромагнетик *Ca-Mn-Ge* является по терминологии [384] полным ферроиком по  $\sigma H^0$  и частичным по  $\sigma\sigma$ , иначе говоря, частичным ферробизластиком и полным ферромагнитоэластиком.

В общем случае в антиферромагнитном образце может быть  $6 \times 2 = 12$  типов доменов. Так как оси [001], [010] и [100] кристаллографически эквивалентны, то достаточно исследовать четыре типа доменов ( $d^+$ ,  $\tilde{d}^+$ ,  $d^-$ ,  $\tilde{d}^-$ ). Свойства остальных типов доменов совершенно аналогичны; отличие в том, что оптические оси остальных типов доменов повернуты относительно оси [001] на  $\pm 90^\circ$ . На магнитооптических экспериментах [50, 72, 74, 75] также изучались  $z$ -пластинки с  $d$ -доменами.

Перейдем теперь к обсуждению оптических и магнитооптических свойств *Ca-Mn-Ge*-граната с учетом возможной доменной структуры. Будем описывать эти свойства одним тензором обратной диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{ij}^{-1} = \chi_{ij} + ie_{ikj}G_k. \quad (5.7.6)$$

Здесь введен вектор гирации  $\mathbf{G}$ , дуальный антисимметричной части  $e_{ikj}G_k$  тензора  $\varepsilon^{-1}$ ;  $\chi_{ij} = \chi_{ji}$ . Полагаем также  $\mu = 1$ .

Вектор  $\mathbf{G}$ , характеризующий фарадеевское вращение плоскости поляризации света (естественная оптическая активность запрещена симметрией), имеет следующую зависимость [298, 305]:

$$G_i = G_i^{(1)} + G_i^{(2)} = \alpha_{ij}H_j^0 + \beta_{ijk}H_j^0H_k^0 + \dots \quad (5.7.7)$$

от внешнего магнитного поля  $H^0$ . Спонтанный вектор  $\mathbf{G}$  в антиферромагнитном классе  $4'/m$  отсутствует. Индуцированный полем  $H^0$  линейный эффект Фарадея характеризуется тензором  $\alpha_{ij}$  симметрии  $V^2$ . Второе слагаемое в (5.7.7) ответственно за квадратичный по полю  $H^0$  четный эффект Фарадея. Симметричный и термодинамический анализ условий существования и наблюдения четного эффекта Фарадея был проведен в [289, 305] (см. также [50]). Это явление характеризуется, как следует из (5.7.7), аксиальным  $s$ -тензором 3-го ранга  $\beta_{ijk}$ , обладающим симметрией  $\tau \in V[V]^2$ , и возможно во всех 66 пьезомагнитных классах [289, 305].

Симметричная часть  $\chi$  тензора  $\varepsilon^{-1}$  также имеет линейные и квадратичные по  $H^0$  добавки

$$\chi_{ij}^0 = \chi_{ij}^0 + q_{ijk}H_j^0 + b_{ijkl}H_k^0H_l^0 + \dots \quad (5.7.8)$$

Тензор 4-го ранга  $b_{ijkl}$  характеризует эффект Коттона-Мутона. Он разрешен во всех средах, так как обладает симметрией  $[V^2]^2$ . Далее,  $q_{ijk}$  – тензор, описывающий т.наз. линейный магнитооптический эффект [50]. Не трудно видеть [289, 305], что симметрия тензоров линейного магнитооптического эффекта и четного эффекта Фарадея одинакова, хотя физически они характеризуют магнитооптические различные (линейное и циркулярное) двупреломления.

Явный вид отличных от нуля компонент различных типов в (5.7.7) и (5.7.8) можно определить, используя соответствующие таблицы в [28].

Рассмотрим магнитооптические свойства антиферромагнитного  $z$ -домена  $d^+$  (с тетрагональной осью вдоль [001]). Можно показать [305], что компоненты тензора  $\chi$  и вектора гирации  $\mathbf{G}$  в произвольно направленном внешнем магнитном поле  $\mathbf{H}^o = (H_1, H_2, H_3)$  имеют соответственно вид:

$$\begin{aligned}
 \chi_{11} &= 1/\varepsilon_o + q_{13}H_3 + b_{11}H_1^2 + b_{12}H_2^2 + b_{13}H_3^2 + b_{16}H_1H_2; \\
 \chi_{22} &= 1/\varepsilon_o - q_{13}H_3 + b_{12}H_1^2 + b_{11}H_2^2 + b_{13}H_3^2 - b_{16}H_1H_2; \\
 \chi_{33} &= 1/\varepsilon_e + b_{31}(H_1^2 + H_2^2) + b_{33}H_3^2; \\
 \chi_{12} &= q_{63}H_3 + q_{42}H_2 + b_{61}(H_1^2 - H_2^2) + b_{66}H_1H_2; \\
 \chi_{13} &= q_{42}(H_2 - H_1) + (b_{44}H_1 - b_{45}H_2)H_3; \\
 \chi_{23} &= q_{41}H_1 + q_{42}H_2 + (b_{44}H_2 + b_{45}H_1)H_3;
 \end{aligned} \tag{5.7.9}$$

$$\begin{aligned}
 G_1 &= \alpha_{11}H_3 + \alpha_{12}H_2 + (\beta_{14}H_2 - \beta_{24}H_1)H_3; \\
 G_2 &= -\alpha_{12}H_1 + \alpha_{22}H_2 + (\beta_{24}H_2 + \beta_{14}H_1)H_3; \\
 G_3 &= \alpha_{33}H_3 + \beta_{31}(H_1^2 - H_2^2) + \beta_{36}H_1H_2.
 \end{aligned} \tag{5.7.10}$$

Здесь мы одновременно учли обычный и четный эффекты Фарадея, линейный магнитооптический эффект и эффект Коттона-Мутона (тензоры  $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_{ijk}$ ,  $q_{ijk}$ ,  $b_{ijkl}$  соответственно).

При переходе от домена  $d^+$  к его кристаллографическому двойнику  $\tilde{d}^+$  изменяют свои знаки на противоположные часть компонент следующих магнитооптических тензоров: эффект Фарадея ( $\alpha_{12}$ ); четный эффект Фарадея ( $\beta_{31}$ ,  $\beta_{24}$ ); линейный магнитооптический эффект ( $q_{13}$ ,  $q_{42}$ ); эффект Коттона-Мутона ( $b_{16}$ ,  $b_{61}$ ,  $b_{45}$ ). При перемагничивании домен  $d^+$  переходит в  $\tilde{d}^+$ . При этом изменяются знаки компонент четного эффекта Фарадея ( $\beta_{31}$ ,  $\beta_{24}$ ,  $\beta_{36}$ ,  $\beta_{14}$ ) и линейного магнитооптического эффекта ( $q_{13}$ ,  $q_{42}$ ,  $q_{63}$ ,  $q_{41}$ ). Наконец, при переходе от домена  $d^+$  к домену  $d^-$ , т.е. при одновременном изменении знаков магнитной и кристаллической структуры, изменяют знаки следующие компоненты эффекта Фарадея ( $\alpha_{12}$ ); четного эффекта Фарадея ( $\beta_{31}$ ,  $\beta_{24}$ ); линейного магнитооптического эффекта ( $q_{13}$ ,  $q_{42}$ ); эффекта Коттона-Мутона ( $b_{16}$ ,  $b_{61}$ ,  $b_{45}$ ). Поэтому в общем случае компоненты  $\tilde{d}$  и  $d$  кристаллического двойника, кроме пьезооптических и упругих свойств, различаются также магнитооптическими (эффект Фарадея, эффект Коттона-Мутона, линейный

магнитооптический эффект, четный эффект Фарадея) явлениями. Антиферромагнитные же домены  $d^+$  и  $d^-$  одной компоненты двойника  $d$  различаются по линейному магнитооптическому эффекту и четному эффекту Фарадея.

В зависимости от ориентации внешнего поля  $\mathbf{H}^0$  и направления  $\mathbf{n}$  распространения света в образце *Ca-Mn-Ge* возможны различные ситуации. Например, при  $\mathbf{n} \parallel \mathbf{H}^0 \parallel [001]$  все четыре типа доменов ( $d^+$ ,  $d^-$ ,  $\tilde{d}^+$ ,  $\tilde{d}^-$ ) различаются по линейному магнитооптическому эффекту. При этом четный эффект Фарадея отсутствует, а эффект Коттона-Мутона дает изотропный вклад, поэтому показатели преломления  $n_{\pm}$  собственных световых волн удовлетворяют соотношению  $1/n_{\pm}^2 = 1/\varepsilon_0 + b_{13}(H^0)^2 \pm H^0 \sqrt{q_{13}^2 + q_{63}^2 + \alpha_{33}^2}$ .

При  $\mathbf{n} \parallel \mathbf{H}^0 \parallel [001]$  вклады в эллиптическое двупреломление будут вносить эффект Фарадея, линейный магнитооптический эффект и эффект Коттона-Мутона. Квадратичный эффект Фарадея снова отсутствует. Но его можно наблюдать, если  $\mathbf{n} \perp \mathbf{H}^0$ .

Сравнительно недавно в *Ca-Mn-Ge*-гранате в поперечной геометрии опыта ( $\mathbf{n} \parallel [001] \perp \mathbf{H}^0$ ) на длине волны  $\lambda = 6328 \text{ \AA}$  при  $T = 6\text{K}$  впервые наблюдался [72] четный эффект Фарадея. Удельное квадратичное вращение плоскости поляризации оказалось равным

$$\rho = \rho_{max} \cos 2\varphi_1, \quad (5.7.11)$$

где  $\rho_{max} = 0.43 \text{ мин/кЭ}^2 \text{ мм}$ ,  $\varphi_1$  – угол между вектором  $\mathbf{H}^0$  и направлением  $\mathbf{P}$ , близким к  $[100]$ .

Нетрудно убедиться, что при  $\mathbf{H}^0 \perp [001]$  и распространении света вдоль  $[001]$  будет проявляться (вместе с эффектом Коттона-Мутона) четное по магнитному полю удельное фарадеевское вращение плоскости поляризации света

$$\rho \sim G_3 = (\beta_{31} \cos 2\varphi + \frac{\beta_{36}}{2} \sin 2\varphi)(H^0)^2, \quad (5.7.12)$$

где  $\varphi$  – угол между направлениями  $[100]$  и  $\mathbf{H}^0$ .

На эксперименте [72] вращение  $\rho$  (5.7.12) исчезало при ориентации вектора магнитного поля  $\mathbf{H}^0$ , близкой к  $[100]$ . Отклонение  $\varphi$  от направления  $[110]$  при этом составило примерно  $4^\circ$  и приписывается погрешностям эксперимента, а полученная зависимость (5.7.11) объясняется тем, что  $|\beta_{36}/\beta_{31}| \ll 1$ .

Однако из (5.7.12) следует синусоидальная ориентационная зависимость  $\rho$  от угла  $2\varphi$  при **любом** соотношении между коэффициентами  $\beta_{31}$  и  $\beta_{36}$ . При этом вращение плоскости поляризации должно отсутствовать не при  $\mathbf{H}^0 \parallel [110]$ , а при

$$2\varphi_1 = \text{arctg}(-2\beta_{31}/\beta_{36}). \quad (5.7.13)$$

На эксперименте [72]  $\varphi_1 \cong 94^\circ$ , что позволяет оценить отношение магнитооптических констант

$$|\beta_{31}/\beta_{36}| \cong 7 \quad (5.7.14)$$

без дополнительных предположений [72] о погрешностях эксперимента.

Так как  $|\beta_{31}/\beta_{36}| \ll 1$ , то в этой геометрии опыта отличие несимметричного тензора  $\beta_{ijk}$  от полностью симметричного по всем индексам не проявляется.

Остановимся на симметрии четного эффекта Фарадея в кристалле *Ca-Mn-Ge*. Так как тензор  $\beta_{ijk}$  симметричен только по перестановке двух индексов  $j$  и  $k$ , то он имеет четыре независимые ненулевые компоненты  $\beta_{12}$ ,  $\beta_{24}$ ,  $\beta_{31}$  и  $\beta_{36}$ . Вектор гирации  $\mathbf{G}^{(2)}$ , ответственный за квадратичное фарадеевское вращение, имеет следующую ориентационную зависимость:

$$\mathbf{G}^{(2)} = \sin\theta \cos\theta \begin{bmatrix} \beta_{14} \sin\varphi - \beta_{24} \cos\varphi; & \beta_{24} \sin\varphi + \beta_{14} \cos\varphi; \\ (\beta_{31} \cos 2\varphi + \beta_{36} \sin\varphi \cos\varphi) \operatorname{tg}\theta \end{bmatrix} (H^0)^2. \quad (5.7.15)$$

от углов  $(\varphi, \theta)$  сферической системы координат. Видим, что при  $\mathbf{H}^0 \parallel [001]$  четный эффект Фарадея отсутствует. Целесообразной для его наблюдения является поперечная геометрия опыта  $\mathbf{H}^0 \perp \mathbf{k} \parallel [001]$ . Интересна также схема, в которой магнитное поле  $\mathbf{H}^0$  расположено в плоскости (010). Тогда вектор  $\mathbf{G}^{(2)}$  обладает следующей угловой зависимостью от угла  $\theta$ :

$$\mathbf{G}^{(2)} = [-\beta_{24}, \beta_{14}, \beta_{31} \operatorname{tg}\theta] \cos\theta \sin\theta (H^0)^2 \quad (5.7.16)$$

Если считать [72], что  $\beta_{ijk}$  симметричен по всем трем индексам  $i, j, k$ , тогда  $\beta_{36} = \beta_{14}$ ,  $\beta_{24} = -2\beta_{31}$ , и четный эффект Фарадея характеризуется не четырьмя, а двумя независимыми компонентами. При этом угловые зависимости (5.7.16) также изменяются. Действительно, если  $\theta = 45^\circ$ , т.е.  $\mathbf{H}^0 \parallel [101]$ , а волновая нормаль  $\mathbf{n}$  световой волны  $\mathbf{n} \parallel [102]$ , то, согласно [72], должно быть  $\mathbf{n} \mathbf{G}^{(2)} = 0$ , и четный эффект Фарадея не должен проявляться. Согласно же (5.7.16) в последней геометрии опыта  $\mathbf{n} \mathbf{G}^{(2)} \neq 0$ . Итак, по ориентационной зависимости (5.7.16) от угла  $\theta$  экспериментально можно установить асимметрию тензора  $\beta_{ijk}$ .

Перейдем теперь к фотомагнитным явлениям, т.е. к возможностям намагничивания и перемагничивания кристалла *Mn-Ca-Ge* светом. В [332, 333] нами был предсказан новый фотомагнитный эффект – намагничивание кристаллов линейно поляризованным светом и даны численные оценки. В [116] проведен его общий термодинамический анализ и показано, что всякому магнитооптическому эффекту соответствует ему обратный фотомагнитный. В частности, явление намагничивания плоскополяризованным излучением является термодинамически обратным линейному магнитооптическому эффекту и описывается одним и тем же тензором  $q$ . Этот вывод, сформулированный нами в [116], подтвержден затем экспериментально в [75]. В [74, 75] было зарегистрировано перемагничивание линейно поляризованным светом антиферромагнитного кристалла *Ca-Mn-Ge* в наклонном магнитном поле  $\mathbf{H}^0 = (H_1, 0, H_3)$ . Можно показать, что магнитный момент  $\mathbf{M}$ , индуцируемый линейно поляризованной световой волной на частоте  $\omega$  с амплитудой  $\mathbf{E}^\omega$ , равен

$$M_k = a q_{ijk} E_i^{-\omega} E_j^{\omega}, \quad (5.7.17)$$

где  $a$  – некоторый коэффициент пропорциональности, а тензор  $q$  имеет следующие отличные от нуля коэффициенты:

$$q_{223} = -q_{113}, \quad q_{231} = q_{312}, \quad q_{123} = q_{131} = -q_{232}. \quad (5.7.18)$$

Видим, что возможны разные варианты перемагничивания.

В [74, 75] удалось получать, визуально наблюдать и управлять полосовой антиферромагнитной доменной структурой с периодом 9 мкм. Сообщается также, что для оптической записи информации транспарант с изображением проектировался на необлученный образец. Кроме того, в этом кристалле было обнаружено явление фотоиндуцированного двупреломления, перспективного для оптической записи информации.

Все четыре типа  $z$ -доменов антиферромагнитного кристалла *Ca-Mn-Ge* обычно оптически неразличимы. Поэтому вопросы визуализации и управления доменной структурой в этом кристалле являются весьма важными. Из проведенного выше анализа ясно, что все рассмотренные магнитооптические явления (эффект Фарадея, четный эффект Фарадея, эффект Коттона-Мутона, линейный магнитооптический эффект), которые приводят к оптической неэквивалентности доменов, можно использовать как для визуализации, так и для переключения доменной структуры. В последнем случае нужно применять магнитные поля достаточной интенсивности.

Обсуждены симметричные аспекты наблюдения и переключения доменной структуры в антиферромагнитном *Ca-Mn-Ge* гранате. Рассмотрены [305] магнитооптические свойства  $z$ -доменов с учетом возможных линейных и квадратичных по внешнему магнитному полю  $H^\circ$  эффектов. Показано [305], что новые магнитооптические явления (линейный магнитооптический эффект и четный эффект Фарадея) позволяют визуализировать антиферромагнитную доменную структуру и различать все четыре типа  $z$ -доменов.

## 6 ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

### 6.1 Отражение и преломление света на границе магнитоупорядоченного кристалла. Метод главных векторов

Пусть на полубесконечный поглощающий магнитный кристалл из изотропной среды падает плоская монохроматическая волна, характеризуемая вектором магнитной напряженности  $\mathbf{H}$ . Требуется вычислить возбуждаемую в кристалле волну  $\mathbf{H}''$ , а также отраженную  $\mathbf{H}'$ . Такого рода граничные задачи важны как для разработки методов определения магнитооптических параметров, так и с точки зрения оптимизации оптических систем записи и обработки информации на магнитные носители [58, 13].

Инвариантный подход к решению данной задачи позволяет получить результаты в компактном виде. Федоров [92] предложил падающую на кристалл волну раскладывать на две такие волны (на два главных вектора), отличающиеся поляризацией, каждая из которых дает только по одной отраженной и одной прошедшей собственной волне в кристалле [16, 92]

$$\mathbf{H} = A_+ \mathbf{h}_+ + A_- \mathbf{h}_-, \quad \mathbf{H}' = A_+ \mathbf{h}'_+ + A_- \mathbf{h}'_-, \quad \mathbf{H}'' = A_+ \mathbf{h}''_+ + A_- \mathbf{h}''_-, \quad (6.1.1)$$

где  $\mathbf{h}''_{\pm}$  – векторы напряженностей полей собственных волн в кристалле,  $\mathbf{h}_{\pm}$  и  $\mathbf{h}'_{\pm}$  – главные векторы поляризации падающей и отраженной волн соответственно.

Выражение для  $\mathbf{h}_{\pm}$  [16] можно несколько упростить и записать в форме

$$2z \mathbf{h}_{\pm} = -[\mathbf{m}, \mathbf{q} \times \mathbf{h}''_{\pm} + \mathbf{m}' \times \mathbf{q} \times \mathbf{e}''_{\pm}]. \quad (6.1.2)$$

Для отраженной волны  $\mathbf{H}'$  главные векторы  $\mathbf{h}'_{\pm}$  получаются из (6.1.2) заменами  $\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{m}'$ ,  $z \rightarrow (-z)$ . Здесь  $z = \mathbf{m} \mathbf{q}$ ,  $\mathbf{q}$  – единичный вектор нормали к границе раздела сред,  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{m}'$  – векторы рефракции падающей и отраженной от кристалла волн,  $\mathbf{e}''_{\pm}$  – векторы напряженностей электрического поля преломленных собственных волн.

Анализ показывает, что поскольку свойства симметрии кристалла при выводе соотношений (6.1.1), (6.1.2) не использовались, то эти результаты применимы для широкого класса сред с обычными граничными условиями, в том числе и для магнитоупорядоченных поглощающих кристаллов, описываемых линейными уравнениями (2.10.1).

В [163] на основе метода главных векторов нами обсуждались закономерности отражения и преломления света на границе изотропной среды с магнитным кристаллом, характеризуемым более простыми уравнениями связи  $\mathbf{E} = (\chi + i\mathbf{G}^{\times})\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ . При этом (6.1.2) сводятся к

$$2z h_{\pm} = [m, (z_{\pm} - z) e_{\pm}'' - q \cdot m_{\pm}'' e_{\pm}''], \quad (6.1.3)$$

где  $z_{\pm} = m_{\pm}'' q$ ;  $h'_{\pm}$  получаются из (6.1.3) заменами  $m \rightarrow m'$ ,  $z \rightarrow (-z)$ .

Пусть плоскость падения света совпадает с плоскостью симметрии тензора  $\chi$ . Тогда из (6.1.3) получаем [163] все известные частные случаи магнитооптического эффекта Керра [6]. Когда вектор гирации  $\mathbf{G}$  расположен перпендикулярно плоскости падения, т.е.  $\mathbf{G} \parallel \mathbf{a} = [mq]$ , то наблюдается экваториальный эффект Керра. Аналогично, при  $\mathbf{G} \parallel \mathbf{q}$  – проявляется полярный, а при  $\mathbf{G} \perp \mathbf{a}$  – меридиональный эффект Керра.

Обычно влияние гиротропии кристалла на изменение поляризации отраженного света при меридиональном эффекте Керра мало, порядка  $\mathbf{G}^2$ . Однако, нами было показано [163], что при падении линейно поляризованного света ( $\mathbf{H} \parallel \mathbf{a}$ ) на кристалл под граничным углом полного внутреннего отражения эллиптичность  $\gamma'$  отраженного света, обусловленная гиротропией, будет максимальной и пропорциональной  $|\mathbf{G}|'^2$  при условии совпадения нормали преломленного света с оптической осью кристалла. При такой геометрии опыта  $\gamma'$  будет максимальной и легко измеримой.

Отметим, что в кристаллах с большой анизотропией узкие лазерные пучки, соответствующие различным собственным волнам, разделяются пространственно. Кроме того, часто нужно получить и исследовать только одну из собственных волн в кристалле. В таких случаях инвариантный метод главных векторов следует предпочесть традиционному, координатному [346].

Итак, с помощью метода главных векторов дано [163] задачи отражения и преломления света на границе с линейным магнитным кристаллом. Найдена геометрия опыта, при которой эллиптичность отраженного света, обусловленная гиротропией, является максимальной.

## 6.2 Отражение и преломление света. Операторный метод

В последние годы, наряду с традиционными координатными методами описания распространения света в кристаллах, все большее распространение получают матричные, инвариантные и операторные методы [15, 16, 21, 93, 95, 96, 193]. В настоящем разделе для решения задачи отражения и преломления света на границе двух линейных кристаллов используется операторный метод описания распространения излучения в слоистых анизотропных средах, разработанный Барковским [193, 97, 98]. Идея метода заключается в том, что рассматриваются несобственные световые волны вида

$$\mathbf{H}(z, t) = \mathbf{H}(z) \exp[i(\mathbf{k}_0 \mathbf{b} r - \omega t)], \quad \mathbf{H}_t(z) = \exp(i\mathbf{k}_0 z N) \mathbf{H}_t(0), \quad (6.2.1)$$

объединяющие две собственные плоские монохроматические волны, которые возникают при отражении и преломлении света и имеют одинаковые тангенциальные составляющие  $\mathbf{b} = -\mathbf{q} \times \mathbf{q} \times \mathbf{m}_i$  своих векторов рефракции  $\mathbf{m}_i = \mathbf{b} + \eta_i \mathbf{q}$ . Здесь

также обозначено  $H_t(z) \equiv -\mathbf{q}^\times \mathbf{q}^\times \mathbf{H}(z)$ . В этом формализме необходимость решения уравнения нормалей 4 степени заменяется на необходимость решения операторного квадратного уравнения

$$N^{-2} - RN^{-1} - S = 0 \quad (6.2.2)$$

относительно нормального тензора показателей преломления  $N^{-1}$ .

В разделе 3.2 мы обсуждали некоторые итерационные методы вычисления  $N^{-1}$ . Сейчас будет предложен еще один, самый эффективный по сходимости. Предварительно путем переопределений

$$x = N^{-1} - R/2, \quad T = R/2, \quad H^2 = S + R^2/4 \quad (6.2.3)$$

уравнение (6.2.2) сведем к упрощенному уравнению

$$x^2 - Tx + xT = H^2 \quad (6.2.4)$$

относительно неизвестного  $x$ .

Перейдем к системе координат, в которой ось  $z$  совпадает с нормалью  $\mathbf{q}$  к границе раздела 2 сред. Тогда тензоры  $x$ ,  $T$  и  $H$  представляют собой  $(2 \times 2)$ -матрицы, которые целесообразно представить в виде 4-векторов вида (3.3.2), разлагая их по спиновым матрицам Паули

$$x = [x_0, \mathbf{x}], \quad T = [T_0, \mathbf{T}], \quad H = [H_0, \mathbf{H}]. \quad (6.2.5)$$

Подставляя (6.2.5) в (6.2.4) и исключая вектор  $\mathbf{x}$ , для скалярного параметра  $x_0$  получаем уравнение

$$\varphi(x_0^2) \equiv x_0^2 = H_0^2 - H_0^2 [\mathbf{HT}]^2 / [(x_0^2 - H^2)(x_0^2 - T^2)], \quad (6.2.6)$$

которое одновременно является эффективным итерационным алгоритмом для вычисления  $x_0^2$ . Оценим его сходимость. Пусть порядок анизотропии равен  $\alpha$ . Тогда  $R \sim H \sim x \sim \alpha$ ,  $x_0 \sim H_0 \sim 1$ . Так как производная  $\varphi'(x_0^2) \sim \alpha^4$ , то, согласно [180], сходимость итерационной формулы (6.2.6) очень велика и пропорциональна  $\alpha^4$ . В качестве нулевого приближения для  $x_0$  естественно взять  $H_0 = x_0^{(0)}$ , уже имеющее малую погрешность порядка  $\alpha^4$ . Тогда уже после одной итерации по (6.2.6) получаем выражение для  $x_0^{(1)}$  с погрешностью порядка  $\sim \alpha^8$ , которое может рассматриваться как практически точное!

Анизотропная (векторная) часть  $\mathbf{x}$  4-вектора  $x = [x_0, \mathbf{x}]$  выражается затем через  $x_0$ :

$$\mathbf{x} = H_0 (x_0 - i \mathbf{T}^\times)^{-1} \mathbf{H}. \quad (6.2.7)$$

Найдя  $x = [x_0, \mathbf{x}]$ , можно вычислить  $N^{-1} = x + R/2$ , а затем выразить [208] тензор поверхностных импедансов  $\gamma$  через  $N^{-1}$  из уравнений (3.2.9)

$$\gamma = I \mu_n^{-1} (N^{-1} - I \mu_n^{-1} \beta_n \mathbf{q}^\times). \quad (6.2.8)$$

Поставленная задача отражения и преломления света на границе раздела 2 линейных гироанизотропных кристаллов имеет наиболее простое решение с помощью операторного формализма:

$$\mathbf{H}_t^{d,r} = D^{d,r} \mathbf{H}_t, \quad D^d = (\gamma^d + \gamma)^{-1}(\gamma - \gamma^r), \quad D^r = D^d - I. \quad (6.2.9)$$

Здесь  $\mathbf{H}_t, \mathbf{H}_t^r, \mathbf{H}_t^d$  – тангенциальные составляющие амплитуд, а  $z, z^r, z^d$  – импедансы падающей, отраженной и преломленной волн соответственно. Соотношения (6.2.9) были первоначально получены в [193] для граничащих негиротропных сред, однако ясно, что они применимы также для линейных падающих сред общего вида.

Полные векторы поляризации полей  $\mathbf{H}(z), \mathbf{E}(z)$  можно вычислить по формулам (3.2.7), (3.2.8) [208] или воспользоваться выражениями (3.1.20), (3.1.21), где  $\mu, \beta, \alpha$  следует заменить на  $\mu_n, \beta_n, \alpha_n$ .

Соотношения (6.2.9), (3.2.7), (3.2.8) совместно с (6.2.1) представляют собой операторное решение поставленной граничной задачи отражения и преломления света на границе двух линейных гироанизотропных поглощающих кристаллов. Их целесообразно применять для расчета полей в средах с низкой симметрией и при матричных расчетах на компьютере.

Исторические же сведения и современное состояние теории и эксперимента по отражению света от различных сред подробно изложены в монографии [346], а также в работах [2, 7, 9, 14, 16, 92, 347, 194, 210, 348] и поэтому нами не приводятся.

Итак, в данном разделе для вычисления тензора показателей преломления  $N$  предложена итерационная формула (6.2.6), обладающая очень быстрой сходимостью порядка  $\alpha^4$ , где  $\alpha$  – анизотропия. Эффективность операторного формализма тензоров  $N$  и  $\gamma$  [193, 207, 208] проиллюстрирована на примере решения (6.2.9) задачи отражения и преломления света на границе двух поглощающих гироанизотропных магнитоупорядоченных кристаллов.

### 6.3 Матрицы Джонса и Мюллера плоскопараллельной пластинки

До сих пор мы рассматривали лишь распространение света в безграничных однородных линейных средах, а в разделах 3.2, 6.1, 6.2 – на границе раздела сред. В кристаллооптике экспериментально чаще всего имеют дело с плоскопараллельными пластинками, вырезанными определенным образом из кристалла, причем световой пучок обычно попадает нормально на пластинку [3, 49]. Поэтому задача отражения и преломления света на кристаллической пластинке имеет важное значение. Ее решение для изотропной пластинки хорошо известно [15]. При наличии анизотропии, гиротропии и поглощения задача существенно усложняется. Координатные методы часто приводят к достаточно громоздким и запутанным соотношениям, поэтому в сложных случаях целесообразнее применять инвариантные (бескоординатные) подходы.

Распространение света в однородном неограниченном кристалле вдоль произвольного направления можно описать двумерным (планарным) оператором  $D$  [16, 349]:

$$\mathbf{H}(z) = D\mathbf{H}(0), \quad D = e^{i\varphi_+} \rho_+ + e^{i\varphi_-} \rho_-, \quad (6.3.1)$$

где  $\rho_{\pm} = \mathbf{h}_{\pm} \cdot \tilde{\mathbf{h}}_{\pm}$  – поляризационные проекторы, а  $\mathbf{h}_{\pm}$  – векторы поляризации собственных волн;  $\varphi_{\pm} = 2\pi n_{\pm} l / \lambda_0$  – набег фаз собственных волн в кристалле на расстоянии  $l$ ,  $n_{\pm}$  – их показатели преломления,  $\lambda_0$  – длина волны в вакууме.

В плоскопараллельной пластинке возникают интерференционные явления вследствие многократного отражения волн на ее поверхностях. Поэтому выражения (6.3.1) для пластинки применимы только приближенно, в пренебрежении многократными отражениями. Однако этот формализм можно обобщить для пластинок.

Рассмотрим плоскопараллельную пластинку, вырезанную из кристалла, оптические свойства которого описываются уравнениями

$$\mathbf{E} = \varepsilon^{-1} \mathbf{D}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H}, \quad (6.3.2)$$

справедливыми для широкого класса поглощающих сред, включая среды с упорядоченной магнитной структурой. Пусть на эту пластинку из изотропной среды падает нормально плоская монохроматическая световая волна с заданным вектором магнитной напряженности  $\mathbf{H}$ . Требуется найти явные выражения для поляризационных характеристик отраженного и прошедшего света через образец.

Согласно [16, 349], векторы отраженной  $\mathbf{H}^r$  и прошедшей  $\mathbf{H}^d$  через такую пластинку волн линейно выражаются через вектор  $\mathbf{H}$  нормально падающего излучения следующим образом:

$$\mathbf{H}^r = D^r \mathbf{H} = (R_+ \rho_+ + R_- \rho_-) \mathbf{H}; \quad (6.3.3)$$

$$\mathbf{H}^d = D^d \mathbf{H} = (D_+ \rho_+ + D_- \rho_-) \mathbf{H}. \quad (6.3.4)$$

Здесь  $R_{\pm}$  и  $D_{\pm}$  – соответственно амплитудные коэффициенты нормального отражения и пропускания собственных плоских монохроматических волн с учетом многократных отражений на ее границах. Они найдены еще в работе [350] путем строгого решения граничной задачи (см. также [351]) с помощью инвариантного метода главных векторов и равны

$$R_{\pm} = r_{\pm} \frac{1 - \exp(2i\varphi_{\pm})}{1 - r_{\pm}^2 \exp(2i\varphi_{\pm})}, \quad D_{\pm} = \frac{(1 - r_{\pm}^2) \exp[i(\varphi_{\pm} - \varphi)]}{1 - r_{\pm}^2 \exp(2i\varphi_{\pm})}, \quad (6.3.5)$$

где  $r_{\pm} = (n_{\pm} - n) / (n_{\pm} + n)$  – известные амплитудные коэффициенты отражения света от полубесконечных сред;  $\varphi_0 = 2\pi n l / \lambda_0$ ,  $n$  – показатель преломления изотропной среды, в которой находится пластинка. Выражения (6.3.3)–(6.3.5) сначала были получены в [350, 351] для немагнитных негиротропных сред, затем распространены на среды с несимметричным тензором диэлектрической проницаемости [349, 352, 135].

При выводе соотношений (6.3.3)–(6.3.5) никаких ограничений на тензор  $\varepsilon^{-1}$  фактически не накладывалось, предполагалось лишь, что  $\mathbf{B}=\mathbf{H}$ . Следовательно, они применимы также для сред с упорядоченной магнитной структурой и оптическими свойствами, удовлетворяющими уравнениям связи (6.3.2).

Выражения (6.3.1) и (6.3.3), (6.3.4) имеют одинаковую структуру. Это обстоятельство позволяет, используя многие результаты и выводы распространения света в безграничных кристаллах, изложенные в разделах 3.3 и 3.6, переформулировать их для плоскопараллельной пластинки. Для этого достаточно ввести эффективные набег фаз  $\varphi_{\pm}^r$  ( $\varphi_{\pm}^d$ ) собственных отраженных (прошедших) волн в пластинке с учетом интерференционных явлений соотношениями [154]

$$R_{\pm} = \exp(i\varphi_{\pm}^r), \quad D_{\pm} = \exp(i\varphi_{\pm}^d). \quad (6.3.6)$$

Теперь матрицу Джонса  $D^r$  для отраженного света от рассматриваемой пластинки можно записать в формах (3.4.3), (3.4.5), (3.4.7). Последнее, наиболее компактное, выражение имеет вид 4-вектора [223]

$$D^r = e^{i\varphi^r} [\cos(\delta^r/2), i \mathbf{p} \sin(\delta^r/2)], \quad (6.3.7)$$

где введены обозначения

$$\varphi^r = (\varphi_+^r + \varphi_-^r)/2, \quad \delta^r = \varphi_+^r - \varphi_-^r, \quad (6.3.8)$$

а единичный комплексный вектор  $\mathbf{p} = \mathbf{N}/(N^2)^{1/2}$  выражается через 4-вектор  $N = [N_0, \mathbf{N}]$  тензора показателей преломления (3.3.2), (3.3.6). Похожий формализм для описания  $(2 \times 2)$ -матриц преобразования света пластинкой использовался также в работах Меркулова [224, 225, 233] и Семина [141, 142].

Перейдем от матриц Джонса к матрицам Мюллера, которые хотя и большей размерности –  $(4 \times 4)$ , но зато являются вещественными. Кроме того, при их использовании объем вычислительной работы для нахождения поляризационных характеристик света после взаимодействия со средой сводится к минимуму.

Для нахождения явного вида матриц Мюллера для пластинок проще всего воспользоваться следующим. После замен

$$\delta = \delta' + i\delta'' \rightarrow \delta^r = \delta'^r + i\delta''^r, \quad \varphi'' \rightarrow \varphi''' \quad (6.3.9)$$

различные представления (3.6.5), (3.6.8), (3.6.9), (3.6.10), (3.6.16) остаются в силе и для матриц Мюллера, описывающих нормальное отражение света от пластинки. Разумеется, после замены индекса  $r$  на индекс  $d$  получим сразу матрицу Мюллера прошедшего излучения.

Предлагаемые выражения для матриц Джонса и Мюллера плоскопараллельной пластинки обобщают многие частные случаи, известные в литературе. Если параметризовать вектор  $\mathbf{p}$ , входящий в (6.3.7), выражением (3.4.13), то получаем выражения для матриц  $D$  и  $M$  плоскопараллельных пластинок из поглощающих гироанизотропных магнетиков, найденные нами ранее в [154].

Если параметризовать вектор  $p$ , входящий в (6.3.7), выражением (3.4.5)

$$p = (ch\beta, ish\beta, sh\alpha) / ch\alpha, \quad (6.3.10)$$

то соотношение (6.3.7) представляет собой одну из возможных форм матриц Джонса  $D$  для плоскопараллельных пластинок из поглощающих гироанизотропных магнетиков, предложенное ранее в [154]. Чтобы перейти к прозрачному кристаллу, достаточно положить в (6.3.10)  $\beta = \alpha'' = 0$ . Тогда выражения (8) и (10) из [154] переходят в соответствующие им соотношения (3) и (4) из [164]. При этом надо только иметь в виду, что в [164] использованы другие представления параметров  $D_{\pm}$  и  $\gamma_0$ , а именно:  $D_-/D_+ = ke^{i\delta}$ ,  $z_0 = tg(\eta_0/2)$ . Поэтому если еще произвести в (8) и (10) из [164] замены  $sh\delta' \rightarrow tg z_0$ ,  $ch\delta' \rightarrow sc z_0$ ,  $sh\delta'' \rightarrow ctg z_k$ ,  $ch\delta'' \rightarrow csc \eta_k$ , то получаем соответствующие выражения (3), (4) работы [164].

Отметим, что связь матриц Джонса и Мюллера обсуждались неоднократно [233, 224, 235, 217, 232, 214]. Выделим из них работы Меркулова [233, 224] и Семина [235, 141, 142] для пластинок из магнитных кристаллов.

В экспериментальных исследованиях, а также в расчетах при конструировании оптических приборов и устройств вместо строгих матриц преобразования  $D$  или  $M$  для пластинок обычно используются более простые матрицы, получаемые для неограниченных сред путем простой суперпозиции собственных волн [217, 230, 234]. Например, в [234, 353], исходя из решения граничной задачи прохождения света при направлениях вдали от оптической оси через поглощающий одноосный кристалл, обладающий естественной оптической активностью, для кристалла была рассчитана матрица Мюллера. При этом двупреломление считалось малым и не учитывались потери на отражение. Максимальная погрешность таких расчетов обычно не должна, согласно [243], превышать 5%. Во многих случаях это действительно так, но не всегда.

В нашей работе [164] для прозрачной пластинки было показано следующее. Сдвиг фаз  $\delta'$  и модуль отношения амплитудных коэффициентов прохождения  $k = k^d = |D_-/D_+| = e^{\delta''}$ , входящие в элементы матриц  $M$  и  $D$ , осциллируют с изменением толщины кристалла вокруг некоторых средних значений. Эти осцилляции, в основном, зависят от отношения показателей преломления  $n_{\pm}$  кристалла к показателю преломления  $n$  изотропной среды и могут быть значительными. Так, при  $n_{\pm}/n = 1.5$   $k$  изменяется в пределах  $1.08 \div 0.92$ , но при  $n_{\pm}/n = 2$  максимальное отклонение  $k$  от единицы составляет уже 20%.

Для не очень тонких пластинок ( $l \gg \lambda$ ) такими осцилляциями можно пренебречь. В таких случаях средние значения  $k$  зависят, в основном, от анизотропии кристалла. При малой оптической анизотропии, а также для срезов, обладающих малой анизотропией, можно приближенно считать  $k \approx 1$  и пользоваться более простыми матрицами Джонса и Мюллера для безграничных сред, пренебрегая интерференционными явлениями в пластинке.

Для отраженного света от прозрачной пластинки  $\partial^{r'} = \partial^{d'}$ . В то же время даже усредненное значение параметра  $k^r = |R_- / R_+|$ , в отличие от  $k^d$ , при условии  $n_+ \rightarrow n$ , либо  $n_- \rightarrow n$  (просветление оптики) может очень сильно отличаться от единицы и тогда учет влияния границ обязателен [164].

В статьях [236, 246] с помощью метода разбиения среды на бесконечно малые по толщине слои и параметризации нескольких магнитооптических эффектов вычислены матрицы  $D$  и  $M$  среды, обладающей одновременно эффектами Фарадея и Коттона-Мутона, явлениями линейного и циркулярного дихроизма, и произведен учет многократных отражений внутри плоскопараллельного образца. Этот подход аналогичен методике Джонса, где были впервые введены так называемые дифференциальные  $N$ -матрицы Джонса  $D_d$  [219]. Такой подход обсуждается в [345], где отмечено, что Джонс первоначально развивал свою трактовку кристаллооптических явлений в отрыве от уравнений связи и электромагнитной теории Максвелла.

В общем случае поглощающая анизотропная гиротропная среда, как уже подчеркивалось [16], должна обладать не линейными или циркулярными, а *эллиптическими* дупреломлением и дихроизмом. Описание в [236, 246] только эффектов линейного и циркулярного дихроизма соответствует частному случаю, когда  $\beta = 0$ , что выполняется, как правило, лишь в кристаллах с достаточно высокой симметрией. Условие  $\beta = 0$  повышает симметрию кристалла и приводит к уменьшению числа независимых компонент  $d_{ik}$  и  $m_{ik}$  матриц Джонса  $D$  и Мюллера  $M$ . Тогда в матрице  $D$  дополнительно  $d_{12} = -d_{21}$ , а собственные волны среды имеют одинаковую эллиптичность и разные направления вращения. Авторы работ [236, 246] ограничиваются только этим случаем. Для матрицы Мюллера, кроме условия  $m_{21} = -m_{12}$ , тогда получаем еще [116]

$$m_{01} = m_{10}, \quad m_{02} = -m_{20}, \quad m_{03} = m_{30}, \quad m_{13} = m_{31}, \quad m_{23} = -m_{32}, \quad m_{00} + m_{22} = m_{11} + m_{33}.$$

Кроме того, учет интерференционных явлений внутри плоскопараллельного образца в [236, 246] произведен недостаточно корректно, поскольку с этой целью авторы вводят коэффициент отражения света  $R$  от плоскости образца, одинаковый для обеих собственных волн.

Приведенные же в настоящем разделе выражения для матриц  $D$  и  $M$  учитывают многократные отражения света в пластинке и являются достаточно общими. Как это часто бывает, фактически они имеют более широкую область применимости, чем первоначально предполагалось. Действительно, если в (6.3.1)–(6.3.4) вместо полного вектора  $\mathbf{H}$  использовать его тангенциальную составляющую  $\mathbf{H}_t$  по отношению к нормали  $\mathbf{q}$  к пластинке, то все соотношения формально остаются в силе и для бианизотропных сред оптические свойства которых описываются уравнениями  $\mathbf{E} = \varepsilon^{-1} \mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  – более общими, чем (6.3.2). Более того, эти же соотношения (кроме (6.3.5)) обобщаются на другие линейные магнитные среды, обладающие естественной оптической активностью. При этом следует иметь в виду, что тогда собственные волны, движущие-

ся в прямом и обратном направлениях в пластинке, вообще говоря, различаются по поляризациям и скоростям. Будем поэтому обозначать индексом  $r$  величины, относящиеся к волнам для отраженного света. Тогда в (6.3.3) следует заменить поляризационные проекторы  $\rho_{\pm}$  на  $\rho_{\pm}^r$ . И, конечно, тогда вместо выражений (6.3.5) для амплитудных коэффициентов отражения  $R_{\pm}$  и пропускания  $D_{\pm}$  будут более сложные соотношения, которые можно найти, решая строго граничную задачу. Остальные же формулы (6.3.5)–(6.3.10) применимы для общего случая линейных гироанизотропных сред.

В данном разделе показано [154, 164-166, 178], что простые инвариантные выражения (6.3.3), (6.3.4) для матриц  $D$  и  $M$ , полученные для безграничных сред, остаются в силе и для линейных кристаллических пластинок при соответствующей (6.3.6) перенормировке коэффициентов отражения и пропускания собственных волн.

## 6.4 Преобразование поляризации света линейной пластинкой

Считая известными компоненты матриц  $M$  и  $D$ , можно выяснить, как изменяются поляризационные характеристики и интенсивность света плоскопараллельной пластинкой в зависимости от оптических параметров падающего на нее излучения. Воспользуемся аппаратом матриц Мюллера  $M$ ; тогда искомые параметры непосредственно выражаются через параметры Стокса прошедшего излучения после их линейной трансформации пластинкой следующим [15] образом  $S' = MS$ :

$$\begin{bmatrix} S'_0 \\ S'_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I' \\ I' p' s'_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{00} & M_{0k} \\ M_{i0} & M_{ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ I p s_k \end{bmatrix}, \quad (6.4.1)$$

где  $M_{00}, M_{0k}, M_{i0}, M_{ik}$  – компоненты  $(4 \times 4)$ -матрицы Мюллера  $M$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ),  $I$  и  $p$  – интенсивность и степень поляризации света на входе пластинки,  $s$  – нормированный ( $s^2 = 1$ ) трехмерный вектор Стокса. Штрихами обозначены те же величины, но для света на выходе пластинки. Считая также заданными параметры  $I, p, S$  падающего излучения, можно вычислить соответствующие параметры прошедшего света. Так, степень поляризации  $p'$  прошедшего излучения равна [154]

$$p' = \left[ 1 - (1 - p^2) L_+ L_- / L^2 \right]^{1/2} \quad (6.4.2)$$

Здесь  $L, L_{\pm}$  – энергетические коэффициенты пропускания пластинкой всей световой волны и собственных волн, описываемых 4-векторами Стокса  $S_{\pm} = [I, s]$  соответственно. Коэффициенты  $L_{\pm}$  характеризуют срез кристалла и не зависят от параметров падающего излучения:

$$L_{\pm} = e^{-2\varphi_{\pm}''} = M_{00} + M_{0k} s_{k\pm}; \quad L_+ L_- = e^{-4\varphi_{\pm}''}. \quad (6.4.3)$$

Общий же коэффициент прохождения света равен [116]

$$L = I' / I = M_{00} + pM_{0k}s_k \quad (6.4.4)$$

и зависит, конечно, также от степени поляризации падающего излучения  $p$  и его поляризации  $s$ .

Рассмотрим интересный случай, когда в кристалле собственные волны ортогональны, т.е.  $\mathbf{h}_+ \mathbf{h}_-^* = 0$ . Это могут быть, например, поглощающие одноосные негиротропные кристаллы [92], либо среды, оптические свойства которых характеризуются одним эрмитовым ( $\varepsilon^+ = \varepsilon$ ) тензором. Условие  $\mathbf{h}_+ \mathbf{h}_-^* = 0$  означает, что в матрице Мюллера (3.6.8)  $p'' = 0$ , а  $p' = p$ , т.е. вектор  $\mathbf{p}$  является вещественным. В этом случае степень поляризации  $p'$  прошедшего света вычисляется по (6.4.2), а энергетический коэффициент пропускания света пластинкой равен [166]

$$L = e^{-2\varphi''} (ch\delta'' - pps\ sh\delta'') \quad (6.4.5)$$

и зависит от четырех параметров Стокса  $S = I[1, ps]$  падающего излучения.

Характерны некоторые предельные случаи [166]:

**а)** Полностью деполаризованный свет, проходя через пластинку, частично поляризуется. Его степень поляризации  $p' = th\delta''$  и обычно мала. **б)** Если  $p = 1$ , то и  $p' = 1$ . **в)** Экстремальное значение  $\mathbf{p}$  достигается при  $s = s_{\pm} = \pm \mathbf{p}$ , т.е. когда вектор Стокса поляризованной части падающего излучения совпадает с вектором Стокса одной из возбуждаемых собственных мод. Тогда для одной волны  $p' = tg2\delta''$ , а для другой  $p' = 0$ .

Анализ формул (6.4.2)–(6.4.5) показывает, что степень поляризации прошедшего света  $p'$  может быть как больше, так и меньше степени поляризации  $p$  падающего. Чем выше коэффициент прохождения  $L$  в зависимости от поляризации  $s$  падающего излучения, тем выше  $p'$  для одного и того же  $p$ . При минимальном коэффициенте прохождения с возрастанием  $p$  величина  $p'$  сначала падает от  $th\delta''$  при  $p = 0$  до нуля при  $p = th\delta''$ , а затем снова начинает возрастать до  $p' = 1$ . **г)** Графики функций  $p' = f(p)$  для  $s = s_+$  и  $s = s_-$  симметричны относительно биссектрисы  $p' = p$ .

Таким образом, для любой кристаллической пластинки, у которой  $\mathbf{h}_+ \mathbf{h}_-^* = 0$ , всегда можно подобрать поляризационные характеристики падающего излучения так ( $p = th\delta''$ ,  $s = \mathbf{p}$ ) [166], чтобы прошедшее излучение стало полностью деполаризованным. Легко показать, что предлагаемый вариант полной деполаризации света является единственно возможным. В принципе полученное условие полной деполаризации прошедшего через пластинку света может быть использовано для создания нового типа деполаризатора.

Вычислив степень поляризации  $p'$ , можно затем рассчитать эллиптичность  $\gamma = tg\eta$  и азимут  $\psi$  поляризованной составляющей света на выходе по формулам [15]

$$tg\ 2\psi = s'_2 / s'_1, \quad sin\ 2\eta = s'_3 / (s'_0 p'_0), \quad (6.4.6)$$

или, выражая через параметры матрицы  $M$  :

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{M_{20} + pM_{2k}S_k}{M_{10} + pM_{1k}S_k}, \quad \sin 2\eta = \frac{M_{30} + pM_{3k}S_k}{p'L}. \quad (6.4.7)$$

Здесь компоненты  $s_k$  вектора Стокса  $\mathbf{s}$  падающего излучения зависят от эллиптичности  $\gamma_0 = \operatorname{tg} \eta_0$  и азимута  $\psi_0$  главной оси эллипса поляризации относительно выбранной системы координат  $(x, y)$  в фазовой плоскости волны и равны [15]

$$s_k = (\cos 2z_0 \cos 2\psi_0, \cos 2z_0 \sin 2\psi_0, \sin 2z_0), \quad (6.4.8)$$

а  $p'$  и  $L$  берутся из (6.4.2)–(6.4.5). Если подставить (6.4.8) и компоненты матрицы Мюллера в (6.4.6), (6.4.7), то получим зависимости поляризационных характеристик прошедшего света  $(\psi, \eta)$  от параметров падающего излучения на пластинку из поглощающего магнитного кристалла при нормальном падении на нее частично эллиптически поляризованного света.

На практике наибольший интерес представляют собой азимутальные зависимости величин  $\operatorname{tg} 2\psi$  и  $\sin 2\eta$  от  $\psi_0$ . Подставляя (6.4.8) в (6.4.6), (6.4.7), находим общие формулы

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{A_1 \cos 2\psi_0 + B_1 \sin 2\psi_0 + C_1}{D_1 \cos 2\psi_0 + E_1 \sin 2\psi_0 + F_1}, \quad (6.4.9)$$

$$\sin 2\eta = \frac{A \cos 2\psi_0 + B \sin 2\psi_0 + C}{(D \cos 2\psi_0 + E \sin 2\psi_0 + F)p'}, \quad (6.4.10)$$

характеризующие в явном виде зависимости азимута  $\psi$  и эллиптичности  $\gamma = \operatorname{tg} \eta$  от азимута  $\psi_0$  для поляризованной составляющей света, прошедшего через пластинку из поглощающего магнитоупорядоченного кристалла при нормальном падении на нее частично поляризованного.

Здесь обозначены, для краткости, величины

$$A_1 = M_{21} \cos 2z_0, \quad B_1 = M_{22} \cos 2z_0, \quad C_1 = M_{23} \sin 2z_0 + M_{20}/p, \quad (6.4.11)$$

$$D_1 = M_{11} \cos 2z_0, \quad E_1 = M_{12} \cos 2z_0, \quad F_1 = M_{13} \sin 2z_0 + M_{10}/p,$$

$$A = M_{30} \cos 2z_0, \quad B = M_{32} \cos 2z_0, \quad C = M_{33} \sin 2z_0 + M_{30}/p, \quad (6.4.12)$$

$$D = M_{01} \cos 2z_0, \quad E = M_{02} \cos 2z_0, \quad F = M_{03} \sin 2z_0 + M_{00}/p,$$

зависящие от других параметров  $p, \eta_0$  падающего излучения и матрицы  $M$ . Соотношения (6.4.9)–(6.4.12) выражают также зависимости  $\psi$  и  $\eta$  от  $\eta_0$  и  $p$ .

Отметим также, что зависимость угла поворота  $(\psi - \psi_0)$  эллипса поляризации прошедшего света от азимута  $\psi_0$  падающего обсуждалась для ортоферритов М. Абе и др. [317]. Меркулов [225] рассматривал полярные диаграммы и симметрию поляризационных зависимостей функций  $\operatorname{tg} 2(\psi - \psi_0)$  и  $\sin 2\eta$  от азимута  $\psi_0$  для магнитных кристаллов, описываемых несимметричным тензором  $\varepsilon^{-1}$ .

Для оптически активных поглощающих кристаллов эти же вопросы исследовались в [355, 21] и на этой основе был предложен метод измерения оптических параметров таких сред.

Условия экстремальной зависимости эллиптичности прошедшего света от азимута  $\psi_0$  падающего на линейную кристаллическую пластинку сводятся к уравнению [165]

$$(BF + CE)\cos 2\psi_0 + (CD - AF)\sin 2\eta_0 + BD - AE = 0. \quad (6.4.13)$$

Отсюда можно сделать вывод, что, вообще говоря, существуют два неортогональных азимута, соответствующих экстремальной эллиптичности прошедшего света, не равные  $0, \pi/2$ . Азимуты становятся ортогональными лишь при  $BD - AE = 0$ , т.е. при условии  $M_{31}M_{02} - M_{32}M_{01} = 0$ , связывающем компоненты матрицы Мюллера по пропусканию пластинки.

Условия экстремального поворота плоскости поляризации прошедшего света в зависимости от азимута падающей волны сводятся к выражению

$$\partial(\operatorname{tg} 2\psi)/\partial(\sin 2\psi_0) = 1 + \operatorname{tg}^2 2\psi_0. \quad (6.4.14)$$

Если подставить (6.4.9) в (6.4.14), то получается полное уравнение четвертой степени относительно  $\operatorname{tg} \psi_0$ . Это означает, что, в общем случае, возможно наличие до четырех азимутов падающей волны, соответствующих экстремальным углам поворота, что соответствует результатам [356, 249].

Представляют интерес еще две возможности, когда поворот главных осей эллипса поляризации волны осуществляется на  $90^\circ$ , либо совсем отсутствует. Они оба сводятся к условию  $\operatorname{tg} 2\psi = \operatorname{tg} 2\psi_0$ . Следовательно, возможно существование до четырех азимутов падающей волны, соответствующих либо неизменности осей эллипса поляризации, либо повороту их на  $90^\circ$ .

Аналогично исследуются зависимости величин  $\sin 2\eta$  и  $\operatorname{tg}(\psi - \psi_0)$  от эллиптичности падающей волны  $\gamma_0$ . Например, выражения (6.4.9) и (6.4.10) относительно  $\gamma_0$  представляют собой рациональные функции, в числителе и знаменателе которых – полные квадратные трехчлены. Если проделать теперь все расчеты, то оказывается, что существуют два значения эллиптичности падающей волны, соответствующие выходной экстремальной (эллиптической) поляризации, и два  $\gamma_0$ , для которых свет на выходе пластинки линейно поляризован.

В гироанизотропных (магнитных) средах, в отличие от изотропных, вращение плоскости поляризации при распространении света в них, т.е. эффект Фарадея начинает зависеть от ориентации плоскости поляризации падающего поляризованного излучения относительно кристаллографических осей. Такая зависимость была названа в [356] ориентационной, а сам эффект Фарадея – ориентационным эффектом Фарадея, который экспериментально и теоретически исследовался в ферритах-гранатах [356, 249] для ряда направлений. Совместное проявление анизотропии и магнитной гиротропии (эффекта Фарадея), а также естественной оптической активности в пластинках исследовалось неоднократно.

Вместе с тем, в таких работах, как правило, используются те или иные упрощающие предположения. Так, большинство авторов не учитывает влияние многократных отражений волн на поверхностях пластинки [247, 356, 249].

Представленные здесь результаты (6.4.9)–(6.4.12) позволяют провести анализ преобразования поляризации света пластинкой в общем случае. Не расписывая детально эти соотношения, отметим только, что из них получаются выражения, обобщающие соответствующие формулы, предложенные для описания эффекта Фарадея в анизотропных поглощающих средах с линейным дихроизмом [357] и для фарадеевского вращения в поглощающем ортоферрите вдоль кристаллографической оси [358], а также результаты исследования нормального отражения и прохождения полностью – [165] и частично [166] поляризованного излучения через плоскопараллельную пластинку из прозрачного магнитоупорядоченного кристалла.

Для инвариантного описания светового пучка было предложено [16] использовать тензор когерентности. Этот подход развит затем в работах [349, 352], где, в частности, был предложен инвариантный алгоритм для проведения поляризационных расчетов параметрически управляемых прозрачных и поглощающих неограниченных кристаллов, характеризуемых комплексным несимметричным тензором диэлектрической проницаемости. Применяемый нами подход, базирующийся на описании световой волны с помощью параметров Стокса, ближе к традиционному и описан в работах [164-166, 154].

В качестве примера остановимся на классическом эффекте Фарадея, который наблюдается при распространении света вдоль оптической оси кристалла. Будем предполагать также, что падающая нормально на пластинку плоская волна поляризована эллиптически и частично. Так как собственные циркулярные волны ортогональны, то  $\mathbf{p}$  – вещественный вектор. Без ограничения общности можно считать, что  $\psi_0 = 0$ . При этом из (6.4.9), (6.4.10), (6.4.5) следует, что

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\eta &= (p \sin 2\psi_0 \operatorname{ch} \delta'' - sh \delta'') / (p \cos 2\eta_0), \\ L &= (e^{-2\varphi''} \operatorname{ch} \delta'' - p \sin 2\eta_0 sh \delta''), \quad \psi = -\delta / 2. \end{aligned} \quad (6.4.15)$$

Понятно, что примененный подход справедлив также и для отраженного света от пластинки при заменах  $D_{\pm} \rightarrow R_{\pm}$ . При этом в отсутствие диссипации энергии, согласно (6.3.5), сдвиг фаз  $\delta'$  одинаков для отраженного и прошедшего света. Это позволяет сформулировать следующий интересный результат.

При распространении света вдоль оптической оси прозрачного магнитоупорядоченного кристалла, т.е. при классическом эффекте Фарадея, поворот эллипса поляризации как для прошедшего, так и для отраженного света одинаков, не зависит от степени поляризации и эллиптичности падающего излучения и равен половине сдвига фаз  $\psi = |\delta / 2|$ , приобретаемой собственными волнами в пластинке [165, 166].

В более общих случаях пластинка может быть вырезана из линейного кристалла, обладающего анизотропией, гиротропией (естественной и магнитной) и поглощением. К тому же световой пучок может падать на пластинку наклонно.

В таких ситуациях можно пользоваться операторными методами [16, 193, 98], о которых речь шла в разделах 3.1, 3.2.

Пусть в изотропной среде находится плоскопараллельная пластинка толщиной  $l$  из линейного кристалла. На пластинку наклонно падает поляризованная плоская монохроматическая световая волна вида

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(z) \exp[i\omega(\mathbf{br}/c - t)]. \quad (6.4.16)$$

Вследствие многократных отражений и преломлений на обеих поверхностях пластинки установится некий стационарный режим. Как прошедшее, так и отраженное от пластинки излучение можно характеризовать волнами типа (6.4.16). Векторы поляризации падающей, отраженной и прошедшей через пластинку волн обозначим соответственно  $\mathbf{H}(z)$ ,  $\mathbf{H}^r(z)$ ,  $\mathbf{H}^d(z)$ . Ось  $z$  направим по нормали  $\mathbf{q}$  к пластинке,  $z = \mathbf{q}\mathbf{r}$ . Существенно, что все эти три волны имеют вид (6.4.16).

Пользуясь формализмом тензоров нормальной рефракции  $N$  и поверхностных импедансов  $\gamma$ , согласно работам [193, 229], можно записать, что тангенциальные составляющие векторов прошедшей  $\mathbf{H}_\tau^d$  и отраженной  $\mathbf{H}_\tau^r$  световых волн от пластинки равны

$$\mathbf{H}_\tau^d = W_{11}^{-1} \mathbf{H}_\tau^d, \quad \mathbf{H}_\tau^r = W_{21} \mathbf{H}_\tau^d, \quad (6.4.17)$$

где необходимые компоненты  $W_{11}$  и  $W_{21}$  блочной матрицы  $W_{ik}$  в соответствии с [193, 229] можно представить в виде [208]

$$\begin{bmatrix} W_{11} \\ W_{21} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I + \gamma_0^{-1} \gamma; & I + \gamma_0^{-1} \gamma^r \\ I - \gamma_0^{-1} \gamma; & I - \gamma_0^{-1} \gamma^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-ik_0 N l} (\gamma - \gamma^r)^{-1} (\gamma_0 - \gamma^r) \\ e^{-ik_0 N^r l} (\gamma - \gamma^r)^{-1} (\gamma - \gamma_0) \end{bmatrix}. \quad (6.4.18)$$

Здесь  $N$ ,  $N^r$ ,  $\gamma$ ,  $\gamma^r$  – тензоры нормальной рефракции и поверхностных импедансов волн в пластинке в прямом  $z$  и противоположном ( $-z$ ) направлениях соответственно;  $\gamma_0$  – импеданс падающей волны. Они определяются соотношениями (3.2.6), (3.2.11), (3.2.12).

Выражения (6.4.7), (6.4.18) для тензорных амплитудных коэффициентов отражения и пропускания пластинки при  $\gamma^r = -\gamma$  эквивалентны формулам (33) из [193]. Для нормального падения все упрощается и (6.4.17), (6.4.18) переходят в (6.3.3), (6.3.4).

Считая оптические тензорные и геометрические параметры пластинки  $\varepsilon^{-1}$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $l$ ,  $\mathbf{q}$  заданными, предварительно вычислив  $\gamma$ ,  $\gamma^r$ ,  $N$ ,  $N^r$ , можно по формулам (6.4.17), (6.4.18) рассчитать амплитудные тензорные коэффициенты отражения и прохождения для тангенциальных составляющих векторов  $\mathbf{H}_\tau^r$  и  $\mathbf{H}_\tau^d$ . Искомые полные векторные характеристики  $\mathbf{H}_\tau^r(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{H}_\tau^d(\mathbf{r}, t)$  электро-

магнитного поля можно восстановить, пользуясь соотношениями (3.2.7) и (6.4.16).

Выражения (6.4.17), (6.4.18) достаточно компактны и отличаются от соответствующих известных выражений для изотропных пластинок тем, что входящие в них величины  $\gamma_0$ ,  $\gamma$ ,  $\gamma'$ ,  $N$ ,  $N'$  являются тензорными, а не скалярными параметрами.

Такой операторный формализм с успехом применяется также для расчета полей в многослойных гироанизотропных средах [135].

Итак, найдены и проанализированы [164-166, 154, 116] явные зависимости характеристик света на выходе кристаллической линейной пластинки от поляризационных параметров падающего нормально излучения и оптических свойств пластинки. Приведено также решение [208] граничной задачи при наклонном падении света на пластинку операторным методом.

## **6.5 Применение методов отражательной фотометрической эллипсометрии для определения оптических постоянных поглощающих гироанизотропных кристаллов**

До сих пор мы рассматривали прямые задачи кристаллооптики: по известным оптическим параметрам кристалла и заданному направлению в нем определять оптические его свойства. Наряду с этим практически весьма важны обратные задачи: с помощью оптических измерений вычислять оптические постоянные кристаллов. Такие обратные задачи значительно сложнее и пока еще далеки до полного решения. В этом разделе обсудим возможности методов отражательной фотометрической эллипсометрии для определения оптических постоянных поглощающих гироанизотропных магнитоупорядоченных кристаллов, следуя работам [167, 169, 170].

Методы исследования оптических параметров прозрачных негиротропных кристаллов разработаны довольно подробно [15, 92, 347, 346, 359, 360]. Хуже обстоят дела с определением оптических констант поглощающих кристаллов, в особенности низкосимметричных и гиротропных. Для последних предлагаются, как правило, лишь частные методики измерений отдельных оптических величин, причем ориентация главных кристаллографических осей обычно считается заданной [247, 266, 22]. Различные подходы к измерениям оптических констант кристаллов, применяемые в настоящее время, базируются, главным образом, на измерениях пропускания, а не отражения света. Однако наличие диссипации энергии приводит к тому, что, наряду с методами, основанными на измерениях пропускания света, становятся все более необходимыми, (а при сильном поглощении и практически единственными возможными) методы отражательной фотометрии [92, 359, 360, 346].

Отражательная фотометрическая эллипсометрия, в особенности в геометрии нормального отражения света, используется, на наш взгляд, незаслуженно

слабо. В связи с этим в данном разделе подробно обсуждаются возможности и достоинства геометрии нормального отражения.

Впервые общий метод измерений оптических постоянных поглощающих негиротропных кристаллов с помощью поляризационных измерений отраженного света от одного произвольно ориентированного участка был предложен Федоровым [92]. Практическая его реализация осуществлена применительно к одноосным поглощающим кристаллам в [361].

В литературе предложены [359, 360, 346] несколько фотометрических методов определения оптических констант вещества по параметрам отраженного света. При этом для получения достаточной информации измерения часто приходится проводить при нескольких углах падения света на образец. Однако применение методов, использующих только одну отражающую поверхность, при переходе к низкосимметричным и поглощающим кристаллам резко усложняет [92, 359, 360] как расчетные формулы, так и проведение самого эксперимента. Это приводит к необходимости поиска альтернативных оптических методов.

Дополнительное использование других отражающих граней кристалла существенно расширяет объем получаемой информации. При этом одновременно отпадает необходимость в обязательных измерениях отражения света под различными углами.

В [362] было показано, что, измеряя поляризационные характеристики отраженного нормально света от трех взаимно перпендикулярных плоскостей образца, можно рассчитать диэлектрические постоянные прозрачного двухосного кристалла. Позже аналогичные этому эллипсометрические методы были предложены для поглощающих негиротропных [363], гиротропных [362] и других линейных [205, 364] сред.

Установки с геометрией нормального (а не косоугольного) падения света на поверхность кристалла при эллипсометрических измерениях имеют ряд преимуществ: а) проведение эксперимента и анализ полученных результатов упрощаются; б) влияние переходного слоя на поверхность образца сказывается в наименьшей степени; в) установка слабочувствительна к погрешностям угла падения.

Несложные расчетные формулы получаются, если для измерений применять кристаллический образец, вырезанный в форме кубика или параллелепипеда [362, 363, 204]. Следует отметить, однако, что использование такой формы кристалла имеет и свои темные стороны, ограничивая возможности отражательной фотометрии. В частности, в тонких плоскопараллельных пластинках за счет отражений от верхней и нижней граней неизбежно возникает искажающее влияние интерференционных явлений. Поскольку в расчетах [362-364, 204, 205] такая интерференция не учитывалась, нужны дополнительные меры по ее устранению или учету. Кроме того, желательно использовать естественные кристаллографические грани или сколы, образующиеся по плоскостям спайности кристаллов. Однако ориентация таких поверхностей (в особенности для кристаллов низших сингоний) может быть самой разнообразной.

Нетрудно видеть, что жесткое ограничивающее условие взаимной перпендикулярности отражающих поверхностей не является обязательным. Поэтому в [167] нами была предложена методика определения оптических параметров прозрачных гироанізотропных (магнитоупорядоченных) кристаллов по измерениям матриц нормального отражения света от трех *некомпланарных* произвольных поверхностей образца. Использование косых отражающих граней расширяет экспериментальные возможности, повышает точность измерений и упрощает расчетные формулы, так как позволяет вообще исключить интерференционные явления внутри образца. Позже этот подход был нами обобщен [169, 170] на поглощающие гироанізотропные магнитоупорядоченные среды. Изложим его.

Оптические свойства большинства магнитных кристаллов можно описывать [54, 55, 9] одним тензором обратной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon^{-1}$ , который в общем случае является комплексным неэрмитовым и характеризует анизотропию, магнитную гиротропию и поглощение.

Пусть из изотропной окружающей среды на некоторую отражающую поверхность исследуемого кристалла нормально падает поляризованная плоская монохроматическая световая волна. В кристалле возникают две собственные волны, характеризующиеся векторами напряженностей магнитного поля  $\mathbf{h}_{\pm}$  и удовлетворяющие известному [92] волновому уравнению

$$\alpha \mathbf{h}_{\pm} = n_{\pm}^{-2} \mathbf{h}_{\pm}, \quad (6.5.1)$$

где планарный тензор  $\alpha$  выражен через поляризационные проекторы  $\rho_{\pm}$ :

$$\alpha = -\mathbf{n}^{\times} \varepsilon^{-1} \mathbf{n}^{\times} = n_{+}^{-2} \rho_{+} + n_{-}^{-2} \rho_{-}. \quad (6.5.2)$$

Здесь  $\mathbf{n}^{\times}$  – антисимметричный тензор второго ранга, дуальный вектору нормали  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n}^2 = 1$ . Тензоры-диады  $\rho_{\pm} = \mathbf{h}_{\pm} \cdot \mathbf{h}_{\pm}^{\sim}$  характеризуют [16, 349] поляризационные характеристики собственных волн для данного направления  $\mathbf{n}$ .

С другой стороны, компоненты вектора магнитного поля  $\mathbf{H}$  поляризованного излучения, нормально падающего на кристалл, при отражении испытывают линейное преобразование

$$\mathbf{H}^r = D^r \mathbf{H}, \quad (6.5.3)$$

характеризуемое оператором  $D^r$ : [349]

$$D^r = D_{+}^r \rho_{+} + D_{-}^r \rho_{-}, \quad D_{\pm}^r = (n_{\pm} - n)/(n_{\pm} + n). \quad (6.5.4)$$

Здесь  $D_{\pm}^r$  – известные амплитудные коэффициенты нормального отражения собственных волн мод от полубесконечного кристалла;  $n_{\pm}$ ,  $n$  – показатели преломления световых волн в кристалле и во внешней среде соответственно.

Выберем систему координат так, чтобы ось  $z$  была направлена по нормали  $\mathbf{n}$  к отражающей грани кристалла. Тогда в этом базисе оператор  $D^r$ , описываю-

щий нормальное отражение света от образца, представляет собой комплексную  $(2 \times 2)$ -матрицу Джонса  $D_{ij}^r$ , а выражение (6.5.3) принимает матричный вид [217]

$$\begin{bmatrix} H_x^r \\ H_y^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^r & D_{12}^r \\ D_{21}^r & D_{22}^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix}, \quad (6.5.5)$$

где  $(H_x^r, H_y^r)$  и  $(H_x, H_y)$  - компоненты векторов отраженного и падающего излучения соответственно.

Измерения матрицы  $\alpha$  (6.5.2) непосредственно провести нельзя, однако компоненты матрицы Джонса  $D_{ij}^r$  для нормального отражения света от кристалла измерить можно. В этой связи обратим внимание на то, что матрицы  $D^r$  и  $\alpha$ , содержащие информацию об оптических свойствах кристалла вдоль направления  $\mathbf{n}$ , согласно (6.5.2) и (6.5.4), изоморфны по своей структуре.

Нетрудно поэтому выразить [167]  $\alpha$  через  $D^r$ :

$$\alpha = \frac{4D^r (|D^r| - I) + I(D_c^r (I - |D^r|)^2 - 4|D^r|)}{(D_c^r + I + |D^r|)^2}. \quad (6.5.6)$$

Здесь  $D_c^r$  - след матрицы  $D_c$ ;  $I = -\mathbf{n}^x \mathbf{n}^x$ ,  $|D^r| = \det D^r$ .

Таким образом, если измерить матрицу Джонса  $D^r$  для какой-либо отражающей грани, то по (6.5.5) можно найти матрицу  $\alpha$  (6.5.2), компоненты которой  $\alpha_{ij}$  являются четырьмя линейными уравнениями относительно неизвестных оптических параметров  $\varepsilon_{mn}^{-1}$ . Поскольку постоянных  $\varepsilon_{mn}^{-1}$  - девять, то необходимо использовать дополнительные отражающие грани кристалла. Остановимся на этом подробнее.

Пусть ориентация трех произвольных некопланарных отражающих граней (или срезов)  $a$ ,  $b$ ,  $c$  кристалла задана их нормальными  $\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3, \mathbf{c}_3$ , направленными внутрь образца. Введем три правые системы координат, характеризуемые тройками ортонормированных векторов  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ ,  $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ ,  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ .

Для грани  $a$  компоненты матрицы  $\alpha$

$$\alpha_{ij} = \mathbf{a}_i \alpha \mathbf{a}_j \quad (6.5.7)$$

непосредственно представляют собой 4 искомые компоненты тензора  $\varepsilon^{-1}$ , записанные в базисе  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$  [167]:

$$\alpha_{11} = \varepsilon_{22}^{-1}, \quad \alpha_{22} = \varepsilon_{11}^{-1}, \quad \alpha_{21} = -\varepsilon_{12}^{-1}, \quad \alpha_{12} = -\varepsilon_{21}^{-1}. \quad (6.5.8)$$

Аналогично этому матрицы  $\beta$  и  $\gamma$ , характеризующие распространение света в кристалле вдоль направлений  $\mathbf{b}_3$  и  $\mathbf{c}_3$ , соответственно равны [167]

$$\beta_{ij} = \mathbf{b}_i \alpha \mathbf{b}_j, \quad \gamma_{mn} = \mathbf{c}_m \alpha \mathbf{c}_n. \quad (6.5.9)$$

Разлагая векторы  $c_i$  и  $b_i$  по базису  $(a_1, a_2, a_3)$  и подставляя их в (6.5.9), находим, что соотношения (6.5.9) также являются линейными комбинациями компонент  $\varepsilon_{mn}^{-1}$ . В итоге выражения (6.5.7) и (6.5.9) представляют собой алгебраическую систему линейных уравнений относительно искомым компонент  $\varepsilon_{mn}^{-1}$  ( $m, n = 1, 2, 3$ ).

Следовательно, если измерить матрицы Джонса  $D^r$  нормального отражения от трех некопланарных граней  $a, b, c$  кристаллического образца, то по формуле (6.5.6) их можно преобразовать в соответствующие матрицы распространения  $\alpha, \beta, \gamma$ . В итоге получим систему 12 линейных уравнений относительно 9 неизвестных  $\varepsilon_{mn}^{-1}$ . Из физических соображений ясно, что эта система должна быть, тем не менее, совместной и иметь единственное решение. Решая ее, можно, в принципе, вычислить все девять искомым комплексных компонент  $\varepsilon_{mn}^{-1}$ . "Избыточные" уравнения и иную оптическую информацию о кристалле, известную из других источников, также целесообразно использовать для минимизации погрешностей измерений.

Таким образом, задачу измерения оптических констант поглощающего ги-роанизотропного кристалла можно свести к задаче измерений матриц Джонса нормального отражения света.

Обсудим поэтому теперь возможности измерений матриц нормального отражения  $D^r$  и на их основе оптических параметров поглощающих сред. Вообще говоря, компоненты (2x2)-матрицы Джонса могут быть экспериментально измерены различными эллипсометрическими методами. В общем случае достаточно не более десяти независимых измерений интенсивности поляризованного излучения, нормально отраженного от образца и прошедшего через анализатор [217]. Вследствие слабости анизотропии и гиротропии применение отражательной фотометрии или рефлексометрии [346] требует прецизионных измерений, которые в настоящее время проводятся. К существенному повышению точности измерений приводит, как известно, применение различных модуляционных методик. Так, Р. М. Аззамом [365] описан простой Фурье-фотополяри-метр с вращающимся поляризатором и анализатором для измерения матриц Джонса. Далее этим же автором рассматривается [366], [367] схема использования фотоэллипсометрических измерений с нормальным падением пучка для измерения матриц отражения от поверхности среды с произвольной анизотропией. Параметры матрицы отражения здесь определяются методом Фурье-анализа сигнала модуляции интенсивности отраженного пучка.

Эти и некоторые другие методы позволяют вычислить компоненты матрицы отражения с точностью до постоянного фазового множителя  $e^{i\varphi}$ . Этого оказывается достаточно [167] только для прозрачных сред. При наличии же поглощения необходимо знать абсолютную фазу отраженной световой волны. Возможности измерения последней хотя и сложны, но также существуют. Назовем прежде всего методы Фурье-спектроскопии, которые хотя и сложны технически, зато существенно повышают объем поступающей информации, давая

сведения не только об амплитуде, но и о фазе волны [346, 368, 369]. Другой подход к получению фазовой информации основан на применении дисперсионных соотношений Крамерса-Кронига [346, 370]. Выведены интегральные соотношения и правила сумм для нормальной отражательной способности [371, 372].

Проще всего, по-видимому, провести соответствующие измерения компонент матриц  $\alpha$  нормального отражения в воздухе и в иммерсионной жидкости и по этим данным рассчитать абсолютную фазу матрицы Джонса  $D^r$  при отражении воздух – кристалл. Так, авторы таблиц [373] считают, что "наиболее перспективным и простым, который может быть быстро внедрен в практику минералогических исследований, является метод определения  $n$  и  $k$  по результатам измерения отражательной способности в двух средах, например в воздухе ( $R_b$ ) и в кедровом масле ( $R_u$ )". Производятся [373] микроскопы-спектрофотометры, с помощью которых можно измерить коэффициент отражения в монохроматическом свете в видимом области спектра в воздухе и иммерсионном масле. А в [374] описаны системы для прецизионного измерения абсолютных значений отражения света в воздухе и иммерсии при нормальном отражении света от анизотропных минералов.

Определив матрицу отражения  $D^r$  в воздухе (с точностью до постоянного фазового множителя), мы, тем самым, определяем поляризационные характеристики  $\rho_{\pm}$  и модули амплитудных коэффициентов отражения  $D_{\pm}^r$  (6.5.4) двух собственных световых волн в кристалле. По измеренным же величинам  $|D_{\pm}^r|$  в двух средах (воздухе и иммерсии) однозначно вычисляются действительная и мнимая части комплексных показателей преломления  $n_{\pm}$ , и, тем самым, однозначно фиксируется матрица  $D^r$ .

Разумеется, точность измерений зависит от выбора отражающих поверхностей. Для ее повышения следует выбирать отражающие грани так, чтобы слабые эффекты (например, гиротропии или кругового дихроизма) проявлялись максимальным образом и в минимальной степени маскировались более сильными. Так, параметры гиротропии целесообразно измерять вдоль оптических осей и т.д. Если гиротропия обусловлена магнитным упорядочением ( $G = 10^{-4} \div 10^{-2}$ ), то измерение матриц Джонса нужно проводить с достаточно высокой точностью. Поэтому целесообразно измерения проводить в несколько этапов. Сначала получаем грубые значения компонент  $\varepsilon_{mn}^{-1}$ , анализируем результаты, выбираем оптимальные срезы для измерения слабых эффектов, измерения повторяем и т.д.

Ни один метод не является универсальным. Поэтому предлагаемая методика использования техники отражательной эллипсометрии может также применяться на первом этапе исследований, как предварительная и не требующая информации об ориентации кристалла, Затем можно перейти к другим, частным и более точным методикам, использующим конкретные особенности измеряемого кристалла.

Представляется также целесообразным дополнительно использовать известную из других источников оптическую информации о кристалле. Тогда, минимизируя погрешности методом наименьших квадратов, можно повысить точность определения измеряемых оптических констант.

Таким образом, изложенная нами в работах [167, 169, 170] методика (принципиальная возможность) измерения оптических параметров тензора обратной диэлектрической проницаемости прозрачных и поглощающих гироанизотропных (магнитоупорядоченных) кристаллов содержит следующие этапы:

а) с помощью техники отражательной фотометрической эллипсометрии производятся измерения матриц Джонса нормального отражения минимум от трех некопланарных произвольно ориентированных поверхностей кристаллического образца в воздухе и иммерсионной жидкости;

б) по найденным экспериментальным данным, в соответствии с (6.5.4), вычисляются абсолютные значения компонент матриц нормального отражения  $D_{ij}^r$  на границе воздух – кристалл;

г) измеренные матрицы  $D^r$  преобразуются по формуле (6.5.6) в более простые матрицы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  распространения света (6.5.2) в неограниченном кристалле;

д) путем решения полученной системы линейных уравнений находятся все девять искомым комплексных оптических параметров кристалла.

Итак, предложена [167, 169, 170] принципиальная схема измерения всех девяти комплексных параметров тензора  $\varepsilon^{-1}$  поглощающих магнитоупорядоченных кристаллов, не требующая предварительной ориентации образца. Она сводится к измерению матриц Джонса нормального отражения в воздухе и иммерсии от минимум трех произвольных некопланарных отражающих плоскостей кристалла с помощью техники отражательной фотометрической эллипсометрии.

## **6.6. Прохождение света через систему поляризатор – кристаллическая пластинка – анализатор и определение оптических параметров**

Многие задачи кристаллооптики требуют знания интенсивности света после прохождения его через анизотропную гиротропную пластинку и анализатор [15, 308]. Такова, в частности, принципиальная схема амплитудного модулятора света, а также эллипсометра [308, 210]. Практически во всей соответствующей литературе, однако, явные общие выражения для интенсивности найти трудно. Так в работах [375, 349, 376] поляризатор – линейен, а анализатор берется линейным [375, 349, 376] или циркулярным [349]. В [18] приводится выражение для системы с эллиптическим поляризатором при по-прежнему линейном анализаторе. Кроме того, во всех отмеченных работах собственные, линейные или эллиптические, волны кристалла считаются ортогональными в смысле  $\mathbf{h}_+^* \mathbf{h}_- = 0$ .

Для естественно оптически активных немагнитных сред в [140, 377] найдены формулы, описывающие интенсивность света на выходе анализатора для эллиптических [377] и линейных [140] поляризатора и анализатора.

Однако уже оптимизация характеристик модуляторов на гиротропных магнитных кристаллах [378] требует рассмотрения не только линейных – , но и эллиптических поляризатора и анализатора. Кроме того, в целом ряде случаев следует учитывать многократное отражение света на поверхностях пластинки [379, 350, 351]. Так, в обзоре [91] обсуждались управляемые транспаранты на магнитных кристаллах. Контрастность пленок ферритов-гранатов при записи информации на них была в два раза меньше теоретической и, по мнению авторов [91], возможная причина расхождения – в неучете потерь на отражение света на границах раздела.

Рассмотрим вопрос об интенсивности света, пропускаемого системой поляризатор – кристаллическая пластинка – анализатор с более общей точки зрения. Пластинку из кристалла с линейными оптическими свойствами всегда можно описать планарной матрицей пропускания  $D^d$  типа (6.3.1)

$$D^d = e^{i\varphi} (e^{i\delta} \rho_+ + e^{-i\delta} \rho_-), \quad (6.6.1)$$

где  $\delta = \delta' + i\delta'' = \varphi_+ - \varphi_-$  – сдвиг фаз между собственными волнами на выходе пластинки с учетом их многократных отражений,  $\varphi = \varphi' + i\varphi''$  – средний набег фазы на толщине пластинки  $l$ . Важно, что оператор  $D^d$  для пластинки может быть представлен в простой форме (6.6.1) даже в тех случаях, когда  $\rho_{\pm} \neq \rho_{\pm}'$  (например, для кристаллов с естественной оптической активностью). Хотя тогда, конечно, соотношения (6.3.5) не имеют места и должны быть заменены более сложными.

Если характеризовать эллиптические поляризатор и анализатор комплексными векторами напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}_p$  и  $\mathbf{H}_a$  соответственно

$$\mathbf{H}_i = (\mathbf{a}_i + i\gamma_i \mathbf{b}_i) / (1 + \gamma_i^2)^{1/2}; \quad \mathbf{a}_i^2 = \mathbf{b}_i^2 = 1, \quad (6.6.2)$$

то интенсивность света  $I$  после анализатора равна

$$I = |\mathbf{H}_a^* D^d \mathbf{H}_a|^2. \quad (6.6.3)$$

Если теперь подставить (6.6.1) и (6.6.2) в (6.6.3), то после несложных, но громоздких преобразований можно получить явную зависимость интенсивности света  $I$  от параметров пластинки, поляризатора и анализатора. Для пластинки из прозрачного магнитоупорядоченного кристалла ( $\mathbf{E} = \varepsilon^{-1} \mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ ,  $\varepsilon = \varepsilon^+$ ) такая зависимость приведена нами в [162].

Выражение (6.6.3) можно преобразовать к виду [154]

$$I = \tilde{S}_a M S_p, \quad (6.6.4)$$

более удобному для практического использования. Здесь  $M$  – матрица Мюллера пластинки;  $S_p$  – 4-вектор Стокса, пропускаемый поляризатором;  $\tilde{S}_a$  – транспонированный 4-вектор Стокса излучения после анализатора. Формула (6.6.4) является более общей, чем (6.6.3). Она пригодна для деполяризирующих пластинок, а также для неидеальных поляризатора и анализатора, т.е. таких, которые пропускают частично поляризованное излучение. Отметим здесь, что часто [210] сами поляризатор и анализатор описываются не векторами Стокса, а матрицами Мюллера. Для описания интенсивности света, проходящего через систему поляризатор – пластинка (недеполяризирующий образец) – анализатор в интересной работе [380] был использован формализм, основанный на параметризации матриц Мюллера с помощью комплексного трехмерного вектора  $q$ . Это позволило получить результат в общей компактной форме. К сожалению, этот формализм не годится для деполяризирующих образцов. Поэтому мы применяем формализм (6.6.4), который пригоден и для деполяризирующих сред.

Далее, ради упрощения, будем полагать, что поляризатор и анализатор являются идеальными эллиптическими. Тогда их нормированные по интенсивности 4-векторы Стокса имеют вид

$$s_{p,a} = (\cos 2\eta_{p,a} \cos 2\psi_{p,a}; \cos 2\eta_{p,a} \sin 2\psi_{p,a}; \sin 2\eta_{p,a}). \quad (6.6.5)$$

Параметры  $\eta_{p,a}$  характеризуют, как обычно [15], эллиптичности  $\gamma_{p,a} = \operatorname{tg} \eta_{p,a}$  волн, пропускаемых поляризатором и анализатором. Углы между главными осями  $a_{p,a}$  пропускания и выделенной осью  $x$  системы координат в плоскости пластинки обозначены соответственно  $\psi_{p,a}$ .

Практически наиболее важна ориентационная зависимость интенсивности света  $I$  на выходе системы от азимутальных углов  $\psi_p$  и  $\psi_a$  поляризатора и анализатора. Подставив (6.6.5) в (6.6.4), находим

$$I = a_0 + a_1 \cos 2\psi_p + a_2 \sin 2\psi_p + a_3 \cos 2\psi_a + a_4 \sin 2\psi_a + a_5 \cos 2(\psi_p + \psi_a) + a_6 \cos 2(\psi_p - \psi_a) + a_7 \sin 2(\psi_p + \psi_a) + a_8 \sin 2(\psi_p - \psi_a), \quad (6.6.6)$$

где коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_8$  равны:

$$\begin{aligned} a_0 &= M_{00} + M_{03} \sin 2\zeta_p + M_{30} \sin 2\zeta_a + M_{33} \sin 2\zeta_p \sin 2\zeta_a, \\ a_{1,2} &= (M_{01,02} + M_{31,32} \sin 2\zeta_a) \cos 2\zeta_p, \quad a_{3,4} = (M_{10,20} + M_{13,23} \sin 2\zeta_p) \cos 2\zeta_a, \\ a_{6,5} &= (M_{11} \pm M_{22}) \cos 2\zeta_a \cos 2\zeta_p / 2, \quad a_{8,7} = (M_{12} \pm M_{21}) \cos 2\zeta_a \cos 2\zeta_p / 2. \end{aligned} \quad (6.6.7)$$

Выражения (6.6.5)-(6.6.7) описывают интенсивность света, пропускаемого оптической схемой поляризатор – оптическое устройство – анализатор. Для различных линейных оптических схем и приборов изменяются только значения матрицы Мюллера  $M$ . Формулы компонент ее можно взять из (3.6.8).

Часто в кристаллах собственные волны ортогональны в смысле  $\mathbf{h}_+^* \mathbf{h}_- = 0$ . Это могут быть, например, линейно поляризованные волны в поглощающих негиротропных кристаллах средних сингоний и эллиптически поляризованные волны в прозрачных магнитоупорядоченных средах. Тогда в (3.6.8) вектор  $\mathbf{p} = N / (N^2)^{1/2}$  является вещественным. Если далее ось  $z$  системы координат направить по нормали к пластинке, а оси  $x$  и  $y$  – вдоль главных направлений пластинки, то вектор  $\mathbf{p}$  имеет вид:

$$\mathbf{p} = (\cos 2\eta, 0, \sin 2\eta), \quad (6.6.8)$$

причем 3-векторы Стокса собственных мод кристалла  $\mathbf{s}_\pm = \pm \mathbf{p}$ , а их эллиптичности  $\gamma_\pm = \pm tg \eta$  (3.6.8). Поэтому для пластинки с ортогональными ( $\mathbf{h}_+^* \mathbf{h}_- = 0$ ) собственными модами компоненты  $M_{ik}$  определяются соотношениями (3.6.8) и тем самым параметры  $a_0, a_1, \dots, a_8$  в (6.6.7) существенно упрощаются.

Найденные явные выражения (6.6.6)–(6.6.8), (3.6.8) для интенсивности света  $I$ , пропускаемого системой поляризатор – кристалл – анализатор, представляются полезными и могут быть использованы, например, при оптимизации высокочастотных фарадеевских модуляторов на кристаллах ферритов-гранатов [378, 381], в теории эллипсометрии анизотропных сред [382, 383, 210, 348], для расчета оптических систем записи, обработки и визуализации информации на магнитных кристаллах [49, 91, 58].

Из (6.6.6)–(6.6.8) вытекают различные частные случаи, найденные ранее без учета многократных отражений в пластинке путем простого сложения собственных мод. Для этого в (6.6.1)–(6.6.8) нужно пренебречь интерференционными явлениями в пластинке и поэтому взять  $D^d$  из (34.3), где положить

$$\delta = \omega(n_+ - n_-)l/c, \quad 2\varphi = \omega(n_+'' - n_-'')l/c. \quad (6.6.9)$$

Тогда при  $\eta_a = 0$  получим формулы [14]; при  $\eta_a = \eta_p = 0$  – соотношения [375]. Если еще дополнительно считать собственные волны циркулярными или линейными, то имеем результаты [349], либо [22] соответственно.

Из (6.6.1)–(6.6.9) в разных приближениях можно перейти также к выражениям (в других обозначениях) для интенсивности света, пропускаемого прозрачной [140] или поглощающей [376, 21, 377] двупреломляющей пластинкой из естественно оптически активного кристалла, помещенного между линейными или эллиптическими поляризатором и анализатором.

Выражения для интенсивности могут быть использованы в эллипсометрии гироанизотропных сред с целью определения их оптических параметров. Например, в [355] ориентационную зависимость пропускания системы линейный поляризатор – кристалл – линейный анализатор предлагается использовать для одновременного измерения двупреломления и дихроизма поглощающих оптически активных кристаллов с линейными собственными волнами.

Далее, в [365] Аззам предложил схему Фурье-фотополяриметра, в котором исследуемый кристаллический образец помещается между вращающимися син-

хронно с различными скоростями линейными поляризатором и анализатором. С помощью Фурье-анализа спектра сигнала на выходе фотополяриметра можно определить 9 компонент подматрицы полной  $(3 \times 3)$ -матрицы Мюллера  $M$  системы. В случае недеполяризующих образцов рассмотренная методика позволяет, в принципе, измерить абсолютные величины и относительные фазы всех компонент матрицы Джонса образца.

Подходы [355, 365] для измерения оптических констант представляются нам перспективными. Действительно, если вращать пластинку, а еще лучше – поляризатор и анализатор с различными угловыми скоростями  $\omega_p$  и  $\omega_a$ , то с помощью Фурье-анализа легко измерить все коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_8$  в (6.6.6). Варьируя эллиптичности поляризатора и анализатора, в принципе можно, согласно (6.6.7), найти все 16 компонент матрицы Мюллера  $M$ . Тем самым устраняется недостаток методики Аззама [365], которая позволяет найти только 9 из 16 компонент  $M_{ik}$ . Для недеполяризующих оптических пластин по найденной матрице  $M$  далее можно, как известно [210, 217], с точностью до постоянного фазового множителя, вычислить ей соответствующую матрицу Джонса. Измерив же  $M$  для трех некопланарных срезов кристалла, можно, как мы уже говорили ранее, вычислить затем неизвестные компоненты тензоров оптических свойств кристалла

В данном разделе для интенсивности света, проходящего через систему поляризатор – кристаллическая пластинка – анализатор, установлены [162] явные поляризационные, энергетические и азимутальные зависимости и на этой основе показана принципиальная возможность измерения всех 16 компонент матрицы Мюллера пластинки.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе изложены основы последовательной феноменологической теории кристаллооптических явлений в средах с упорядоченной магнитной структурой с учетом анизотропии, гиротропии и поглощения.

Сформулируем основные результаты и выводы.

- Проведен критический анализ понимания и использования принципа симметрии кинетических коэффициентов в магнитной кристаллофизике и предложена его уточненная формулировка применительно к материальным линейным уравнениям связи электродинамики магнетиков.

- Для линейных магнитных кристаллических сред с пространственной и временной дисперсией получен тензор энергии-импульса Минковского и сформулированы законы сохранения энергии и импульса.

- Найдены и исследованы общие инвариантные выражения для поляризации собственных плоских монохроматических световых волн в поглощающих магнитоупорядоченных кристаллах различной симметрии.

- Исследованы условия существования сингулярных оптических направлений и предсказаны возможности существования конусов новых типов сингулярных осей (эллиптические и линейные оси). Установлены закономерности преобразования поляризации суммарной (собственной и Фойгта) волны вдоль сингулярных эллиптических направлений по мере ее распространения в кристалле. Анализ экспериментальных данных по марганцевому ферриту подтвердил, что в нем на длине волны  $\lambda = 475$  нм круговой конус линейных осей действительно существует.

- Найдена и исследована поляризация собственных волн в поглощающих магнетиках с естественной и магнитной гиротропией и дана классификация основных кристаллооптических явлений в таких кристаллах, основанная на свойствах симметрии материальных оптических тензоров.

- На этой основе проведена оптическая классификация поглощающих магнитоупорядоченных кристаллов 132 классов магнитной симметрии по числу и характеру сингулярных оптических осей.

- В  $\varepsilon$ -изотропных кристаллах нами была отмечена возможность взаимной компенсации естественной и магнитной гиротропии. Предсказан также поперечный эффект Фарадея, обусловленный антисимметричной частью тензора диэлектрической проницаемости. Эти явления получили экспериментальное подтверждение.

- Предложено несколько эффективных итерационных методик для решения уравнения нормалей в различных линейных кристаллах, обладающих устойчивой быстрой сходимостью  $\sim \alpha$  и  $\sim \alpha^2$ .

- Показано, что симметрия оптических свойств направлений в кристаллах определяется, в первую очередь, симметрией оптических тензоров, а не симметрией самого направления, и поэтому зачастую значительно выше последней. Установлены оптические свойства направлений для всех 122 шубниковских

классов магнитной симметрии и выяснено, что общее число групп последних равно не 10, как считалось ранее, а 32.

- Эффективность операторного формализма тензоров  $N$  и  $\gamma$  проиллюстрирована на примере решения задачи отражения и преломления света на границе двух поглощающих гироанизотропных магнитоупорядоченных кристаллов. Предложена итерационная методика расчета тензора  $N$ , обладающая обязательной очень быстрой сходимостью порядка  $\alpha^4$ , где  $\alpha$  – анизотропия.

- С помощью 4-вектора показателей преломления  $N$  установлена структура, произведена параметризация, найдены ограничения и взаимосвязь между дифференциальными и интегральными матрицами Джонса и Мюллера для различных линейных кристаллических систем. На этой основе заново произведена классификация оптических явлений в безграничных кристаллах и показана ошибочность ряда классических представлений Джонса и некоторых других авторов об условиях анизотропии, гиротропии, двупреломления, дихроизма и прозрачности кристаллических сред.

- Установлена структура, найдены ограничения и произведена параметризация матриц Мюллера  $M$  произвольных линейных оптических систем. Показано, что в общем случае эти матрицы параметризуются с помощью 16 параметров, в частных случаях их число уменьшается до 15, 12 или 7. Последний вариант соответствует недеполяризующим оптическим средам. Показано, что девять ограничений-неравенств Клоуда на компоненты матриц  $M$  физически реализуемых оптических объектов можно свести к трем явным неравенствам. Предложенная на этой основе методика поляризационной фильтрации оптического сигнала является наиболее радикальной при обработке экспериментальных данных и, наряду с другими, может успешно использоваться.

- Для кристаллов ферритов-гранатов изучена деформация оптической индикатрисы для произвольных направлений  $n$ . Показано, что эти кристаллы могут оставаться одноосными при любой ориентации магнитного момента в плоскостях симметрии, что подтверждается анализом экспериментальных данных.

- Для более полного и точного симметричного описания многоподрешеточных магнетиков (коллинеарных в обменном приближении) дополнительно введены явно 2 новые симметричные антиоперации обмена подрешетками  $I^{(-)}$  и  $I^{(*)}$ . Выяснено, что группы симметрии многоподрешеточных магнетиков и тензоров в них естественно классифицируются по неприводимым представлениям абелевой группы кратной антисимметрии 16 порядка. На этой основе предложена методика нахождения вида матриц (правил отбора) для тензоров оптических и других макроскопических свойств исследуемых кристаллов путем несложной редукции этих задач к уже решенным соответствующим задачам немагнитных сред.

- Для тензоров нелинейных оптических восприимчивостей в магнитоупорядоченных поглощающих кристаллах с частотной и пространственной дисперсией предложены частотно-перестановочные соотношения, которые характеризуют их симметричные свойства и являются обобщением линейного принципа Онзагера на нелинейные оптические явления:

У тензоров Фурье-компонент нелинейных оптических восприимчивостей в анизотропных поглощающих магнитоупорядоченных средах с частотной и пространственной дисперсией можно одновременно переставлять декартовы индексы и соответствующие им частоты. При перестановке же индекса, соответствующего результирующей частоте, следует дополнительно менять знак магнитной структуры и знаки частот и поглощения при непереставляемых индексах тензора на противоположные.

- Показано, что из найденных частотно-перестановочных соотношений следуют, как частные случаи, известные ранее результаты для частично-диссипативных и прозрачных магнитных и немагнитных сред. Отмечено также, что правило Клейнмана не может выполняться в гиротропных средах.

- На основе подхода магнитной симметрии предложены возможности наблюдения и изучения новых магнитооптических явлений – магнитогирации и четного эффекта Фарадея, не имеющих аналогов в оптике немагнитных сред.

- Показано, что только в пьезомагнетиках 6б классов возможно невзаимное вращение плоскости поляризации, пропорциональное квадрату магнитного поля – четный эффект Фарадея. Установлена его симметрия и предложены схемы, где это явление проявляется в "чистом" виде. Нами было предсказано также, что четный эффект Фарадея может быть использован для изучения и визуализации антиферромагнитной доменной магнитной структуры. Позже это явление и соответствующие доменные структуры затем визуально наблюдались и исследовались экспериментально в кристаллах  $CoF_2$ ,  $FeF_2$ ,  $Ca-Mn-Ge$  граната и др.

- Сформулированы условия существования и наблюдения нового магнитооптического эффекта обратимого вращения плоскости поляризации, пропорционального магнитному полю – магнитогирации. Показано, что последняя возможна только в кристаллах 6б определенных магнитных классов. Выяснено, что проще всего исследовать спонтанную магнитогирацию при переключении доменной структуры магнитоэлектриков внешними воздействиями.

- Установлено, что каждому магнитооптическому явлению, линейному по внешнему магнитному полю  $H^\circ$ , соответствует термодинамически обратное явление намагничивания вещества светом, что позволяет оценить их величины. Предсказаны два новых фотомангнитных эффекта намагничивания кристаллов линейно поляризованным излучением, термодинамически обратные относительно известных явлений – линейного магнитооптического эффекта и магнитопространственной дисперсии, и возможные в пьезомагнитных либо нецентросимметричных средах соответственно. Первое из них затем экспериментально исследовалось. Показано также, что в энантиоморфных средах любые процессы, инвариантные относительно обращения времени (диссипация энергии, процессы переноса массы, тепла, заряда и т.д.) могут приводить к намагничиванию последних.

- Обсуждены условия наблюдения и переключения доменной структуры в антиферромагнитном  $Ca-Mn-Ge$  гранате с учетом возможных линейных и квадратичных по внешнему магнитному полю эффектов  $H^\circ$ . Показано, что новые магнитооптические явления (линейный магнитооптический эффект и четный

эффект Фарадея) позволяют визуализировать антиферромагнитную доменную структуру и различать все четыре типа  $z$ -доменов.

- Исследовано влияние магнитного упорядочения и магнитного поля на генерацию второй оптической гармоники. Показано, что в магнетиках, обладающих центром антиинверсии, вторая гармоника симметрично разрешена. В частности, было предсказано, что при магнитном фазовом переходе в феррите висмута генерация второй гармоники вдоль главной оси кристалла должна усиливаться как за счет возникновения магнитной структуры, так и за счет внешнего магнитного поля. И действительно, позже эти явления экспериментально наблюдались в отраженном свете в этом же кристалле.

- Показано, что в сегнетомагнитных кристаллах  $Ni-I$  борацита, изменяя поляризацию излучения, а также переориентируя доменную структуру в образцах внешними воздействиями, можно добиться изменения интенсивности второй гармоники в отраженном свете на десятки процентов, что позволяет разделить вклады в это явление от электрической и магнитной структур и измерить соответствующие магнитооптические коэффициенты.

- Найдено, что матрицы Джонса и Мюллера для плоскопараллельной кристаллической пластинки можно получить из соответствующих матриц для неограниченных сред путем простой перенормировки амплитудных коэффициентов отражения и пропускания собственных волн. Получены и исследованы также азимутальные зависимости для поляризационных характеристик света после взаимодействия его с пластинкой.

- Установлено, что для измерений оптических параметров гироанизотропных сред в принципе достаточно использовать полученные азимутальные зависимости поляризационных характеристик света, прошедшего или отраженного от кристалла. Показано, что измеряя интенсивность света, прошедшего через кристаллическую пластинку, помещенную между вращающимися эллиптическими поляризатором и анализатором, можно, вообще говоря, вычислить все компоненты матрицы Мюллера. Предлагаемая схема обобщает схему Аззама, которая позволяет измерить только 9 из 16 компонент.

- Предложена принципиальная схема измерения всех 9 комплексных параметров тензора  $\varepsilon^{-1}$  поглощающих магнитоупорядоченных кристаллов, не требующая предварительной ориентации образца. Она сводится к измерению матриц Джонса нормального отражения в воздухе и иммерсии от минимум трех произвольных некопланарных отражающих плоскостей кристалла с помощью техники отражательной фотометрической эллипсометрии.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Faraday, M.** Magnetisation of light and illumination of the lines of magnetic force / **M. Faraday** // *Phil. Mag.* – 1846.– V.29.– P. 153–167.
2. **Voigt, W.** Magneto-optics / Ed. by **W. Voigt** // *Handbuch der Electricität und Magnetismus.*– Leipzig.– 1920. Bd.4.–S. 393.
3. **Coldhammer, D. A.** Das Kerr'sche magneto-optische Phänomen und die magnetische Circularpolarisation nach der electricischen Lichttheorie / **D. A. Coldhammer** // *Ann. Phys.*– 1882.– В.46, №5.– S. 71–98.
4. **Лорентц, Г. А.** Теория электронов. / **Г. А. Лорентц.** – М.: ГИТТЛ, 1956.– 471 с.
5. **Drude, P.** Uber magneto-optische Erscheinungen / **P. Drude** // *Ann. Phys.*–1892.–В.46, №7.– S. 353–422.
6. **Соколов, А. В.** О магнитооптических явлениях в ферромагнетиках / **А. В. Соколов** // *УФН.*– 1953.– Т.50, №2.– С. 161–196.
7. **Вонсовский, С. В.** Магнетизм. / **С. В. Вонсовский.** – М.: Наука, 1971.– 1032 с.
8. **Ландау, Л. Д.** Электродинамика сплошных сред. / **Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.**– М.: ГИТТЛ, 1957.–532 с.; 2 изд., М.: Наука, 1982.– 620 с.
9. **Кринчик, Г. С.** Физика магнитных явлений. / **Г. С. Кринчик.** – М.: Изд-во МГУ, 1985.– 336 с.
10. **Веневцев, Ю. Н.** Сегнетомагнетики. / **Ю. Н. Веневцев, В. В. Гагулин, В. Н. Любимов.**– М.: Наука, 1982.– 224 с.
11. **Смоленский, Г. А.** Сегнетомагнетики / **Г. А. Смоленский, И. Е. Чупис** // *УФН.*– 1982.– Т.137, №3.– С. 415–448.
12. **Zvezdin, A. K.** Modern magneto-optics and magneto-optical materials / **A. K. Zvezdin, V. A. Kotov.** – Bristol: Institute of physics publishing.– 1997.– 386 p.
13. *Magneto-Optics* / Ed. by **S. Sugano, N. Kojima.** – Berlin.: Springer, 2000.– 330 p.
14. **Szivessy, G.** Kristallooptik // Ed. by **G. Szivessy.**– *Handbuch der Physik.* Berlin: Geiger und Scheel, 1928.– Bd.20, S. 635–954.
15. **Борн, М.** Основы оптики. / **М. Борн, Э. Вольф.** – М.: Наука, 1973.– 719 с.
16. **Федоров, Ф. И.** Теория гиротропии. / **Ф. И. Федоров.** – Мн.: Наука и техника, 1976.– 456 с.
17. *Electromagnetics of bi-anisotropic materials* / **A. N. Serdyukov.** [et al.]. – Gordon and Breach Science Publishers, 2001.
18. **Кизель, В. А.** Гиротропия кристаллов / **В. А. Кизель, В. И. Бурков.** – М.: Наука, 1980.– 304 с.
19. **Агранович, В. М.** Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. / **В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург.** – М.: Наука, 1979.– 432 с.
20. **Влох, О. Г.** Явления пространственной дисперсии в параметрической кристаллооптике. / **Влох О. Г.** – Львов: Вища школа, 1984.– 155 с.
21. **Гречушников, Б. Н.** Кристаллооптика поглощающих и гиротропных сред / **Б. Н. Гречушников, А. Ф. Константинова** // *Проблемы кристаллографии;* под ред. Б. В. Вайнштейна, А. Л. Чернова.– М.: Наука, 1987.– С. 290–309.
22. Оптические свойства кристаллов / **А. Ф. Константинова** [и др.]. – Мн.: Навука і тэхніка, 1995.– 302 с.
23. **Туров, Е.А.** Физические свойства магнитоупорядоченных кристаллов / **Е.А. Туров.**– М.: Изд-во АН СССР. 1963.– 322 с.
24. Симметрия и физические свойства антиферромагнетиков / **Е. А. Туров** [и др.] – М.: Физматлит, 2001.– 560 с.
25. **Изюмов, Ю. А.** Фазовые переходы и симметрия кристаллов / **Ю. А. Изюмов, В. Н. Сыромятников.**– М.: Наука, 1984.– 247 с.
26. **Шубников, А. В.** Симметрия и антисимметрия конечных фигур / **А. В. Шубников.** – М.: Изд-во АН СССР, 1951.– 172 с.

27. **Шубников, А. В.** Симметрия в науке и искусстве / **А. В. Шубников, В. А. Копчик.** – М.: Наука, 1972.– 339 с.
28. **Сиротин, Ю. М.** Основы кристаллофизики / **Ю. М. Сиротин, М. П. Шаскольская.** – М.: Наука, 1975.– 680 с.
29. **Вайнштейн, Б. К.** Современная кристаллография. Т.1. Симметрия кристаллов. Методы структурной кристаллографии / **Б. К. Вайнштейн.**– М.: Наука, 1979.– 384 с.
30. **Janovec, V.** Crystallography of the ferromagnetoelectric switching and twinning / **V. Janovec and L. A. Shuvalov** // Magnetoelectric interaction in crystals; ed. by **E. Freeman.** – London.– 1975.– P. 215–220.
31. **Шувалов, Л. А.** Физические свойства кристаллов / **Л. А. Шувалов, А. А. Урусовская, И. С. Желудев** // Современная кристаллография; под ред. **Б. В. Вайнштейна, А. Л. Чернова, Л.А. Шувалова.** – Т.IV.– М.: Наука, 1981.– 496 с.
32. **Желудев, И. С.** Физика кристаллов и симметрия / **И. С. Желудев.** – М.: Наука, 1987.– 188 с.
33. **Инденбом, В. Л.** Связь групп антисимметрии и цветной симметрии с одномерными представлениями обычных групп симметрии. Изоморфизм шубниковских и фёдоровских групп / **В. Л. Инденбом** // Кристаллография.– 1959.– Т.4, №4.– С. 619–621.
34. **Инденбом, В. Л.** Неприводимые представления магнитных групп и учет магнитной симметрии / **В. Л. Инденбом** // Кристаллография.– 1960.– Т.5, №4.– С. 513–516.
35. **Заморзаев, А. М.** Теория простой и кратной антисимметрии / **А. М. Заморзаев.** – Кишинев: Штиинца, 1976.– 283 с.
36. **Заморзаев, А. М.** Цветная симметрия, ее обобщения и приложения / **А. М. Заморзаев, Э. И. Галярский, А. Ф. Палистрант.**– Кишинев: Штиинца, 1978.– 275 с.
37. **Birss, R. R.** Symmetry and Magnetism / **R. R. Birss.**– Amsterdam: North–Holland Publ. Comp.– 1964.– 252 p.
38. **Туров, Е. А.** Гальвано- и термомагнитные эффекты в антиферромагнетиках и ферромагнетиках / **Е. А. Туров и В. Г. Шавров** // Изв. АН СССР. Сер. физическая.– 1963.– Т.27, №2.– С. 1487–1495.
39. Кинетические и оптические эффекты антиферромагнитного упорядочения / **К. В. Власов** [и др.] // Динамические и кинетические свойства магнетиков; под ред. **К. В. Власова.** – М.: Наука, 1986.– С. 37–68.
40. **Schmid, H.** On a magnetoelectric classification of materials / **H. Schmid** // Int. J. Magn.– 1973.– V.4, №4.– P. 337–361.
41. **Андреев, А. Ф.** Симметрия и макроскопическая динамика магнетиков / **А. Ф. Андреев, В. И. Марченко** // УФН.– 1980.– Т.130, №1.– С. 33–63.
42. **Барьяхтар, В. Г.** Обменная симметрия магнитоупорядоченных кристаллов / **В. Г. Барьяхтар, Д. А. Яблонский** // ФНТ.– 1980.– Т.6, №3.– С. 345–376.
43. **Дзялошинский, И. Е.** Термодинамическая теория "слабого" ферромагнетизма антиферромагнетиков / **И. Е. Дзялошинский** // ЖЭТФ.– 1957.– Т.32, №6.– С. 1547–1562.
44. **Дзялошинский, И. Е.** О магнитном строении фторидов переходных металлов / **И. Е. Дзялошинский** // ЖЭТФ.– 1957.– Т.33, №6.– С. 1454–1456.
45. **Дзялошинский, И. Е.** Нелинейные эффекты в антиферромагнетиках. "Скрытый" антиферромагнетизм / **И. Е. Дзялошинский, В. И. Манько** // ЖЭТФ.–1964.– Т. 46, №4.– С. 1352–1358.
46. **Дубовик, В. М.** Макроскопическая симметрия и микроскопическая природа параметров порядка при токовом и спин-токовом упорядочении в кристаллах / **В. М. Дубовик, С. С. Кротов, В. В. Тугушев** // Кристаллография.– 1987.– Т.32, №3. С. 540–549.
47. **Мицек, А. И.** Пьезомагнетизм в антиферромагнетиках и ферромагнетиках / **А. И. Мицек, В. Г. Шавров** // ФТТ.– 1964.– Т.6, №1.– С. 210–218.
48. **Звездин, А. К.** Интегральная магнитооптика / **А. К. Звездин, В. А. Котов** // Зарубежная радиоэлектроника.– 1976.– №11.– С. 77–88.

49. **Звездин, А. К.** Магнитооптика тонких пленок / **А. К. Звездин, В. А. Котов.**– М.: Наука, 1988.– 190 с.
50. **Еременко, В. В.** Магнитооптика и спектроскопия антиферромагнетиков / **В. А. Еременко** [и др.] – Киев: Наукова думка, 1989.– 260 с.
51. **Писарев, Р. В.** Оптическая гиротропия и двупреломление магнитоупорядоченных кристаллов / **Р. В. Писарев** // ЖЭТФ.– 1970.– Т.58, №4.– С. 1421–1427.
52. **Писарев, Р. В.** Магнитное упорядочение и оптические явления в кристаллах / **Г.А.Смоленский** [и др.] // Физика магнитных явлений.– Л.: Наука, 1974. – С. 356–451.
53. **Писарев, Р. В.** Кристаллооптика магнитоупорядоченных сред / **Р. В. Писарев** // Материалы VII зимней школы по физике полупроводников.– Л.– 1975.– С. 142–168.
54. **Смоленский, Г. А.** Двойное лучепреломление света в магнитоупорядоченных кристаллах / **Г. А. Смоленский, Р. В. Писарев, И. Г. Синий** // УФН.–1975.– Т.116, №2.– С. 231–270.
55. **Смоленский, Г. А.** Ферриты и их техническое применение . **Г. А. Смоленский, В. В. Леманов.**– Л.: Наука, 1975.– 219 с.
56. **Меркулов, В. С.** Магнитная симметрия и линейное по полю двупреломление света / **В. С. Меркулов** // Кристаллография.– 1983.– Т.28, №3.– С. 421–427.
57. **Прохоров, А. М.** Оптические явления в тонкопленочных магнитных волноводах и их техническое использование / **А. М. Прохоров, Г. А. Смоленский, А. Н. Агеев** // УФН.– 1984.– Т.143, №1.– С. 33–72.
58. **Рандошкин, В. В.** Прикладная магнитооптика / **В. В. Рандошкин, А. Я. Червоненкис.**– М.: Энергоатомиздат.– 1990.– 319 с.
59. **Белов, Д. В.** Магнитоэлектрический эффект в спин-флоразе  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  и проблема определения магнитной структуры / **Д. В. Белов** [и др.] // Письма в ЖЭТФ.– 1993.– Т.58, №8.– С. 603–607.
60. **Гриднев, В. Н.** Эффекты пространственной дисперсии в магнитооптике / **В. Н. Гриднев** [и др.] // ФТТ.– 1998.– Т.40, №5.– С. 946–948.
61. **Гриднев, В. Н.** Нечетное по намагниченности невзаимное отражение света от магнитоэлектрика-ферримангнетика  $\text{LiF}_5\text{O}_8$  / **В. Н. Гриднев** [и др.] // Письма в ЖЭТФ.– 1997.–Т.65, №1.–С. 65–70.
62. **Кричевцов, Б. Б.** Невзаимное двупреломление света в борацитах  $\text{R}_3\text{V}_7\text{O}_{13}\text{X}$  ( $\text{R}=\text{Co}, \text{Cu}, \text{Ni}, \text{X}=\text{I}, \text{Br}$ ) / **Б. Б. Кричевцов** // ФТТ.– 2001.– Т.43, №1.– С. 75–79.
63. **Кричевцов, Б. Б.** Невзаимный линейный дихроизм в борците  $\text{R}_3\text{V}_7\text{O}_{13}\text{I}$  / **Б. Б. Кричевцов** // Письма в ЖЭТФ.– 2001.– Т.74, № 3.– С. 177–181.
64. **Кричевцов, Б. Б.** Гигантский линейный магнитоэлектрический эффект в пленках ферритов–гранатов // **Б. Б. Кричевцов, В. В. Павлов, Р. В. Писарев** // Письма в ЖЭТФ.– 1989.– Т.49, № 7.– С. 466–469.
65. **Pisarev, R. V.** Nonlinear optical spectroscopy of magnetoelectric and piezomagnetic crystals / **R. V. Pisarev, M. Fiebig, D. Frohlich** // Ferroelectrics. –1997.– V.204.– P.1–21.
66. **Krichevstov, V. V.** Magnetoelectric spectroscopy of electronic transitions in antiferromagnetic  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  / **V. V. Krichevstov** [et al.] // Phys.Rev. Lett.– 1996. – V.76, №24.– P. 4628–4631.
67. **Усачёв, П. А.** Оптические свойства ортоферрита тулия  $\text{TmFeO}_3$  / **Усачёв П. А.** [и др.] // ФТТ.– 2005.– Т.47, №12.– С.2200–2206.
68. **Калашникова, А. М.** Электронная структура гексагональных манганитов  $\text{RMnO}_3$  / **А. М. Калашникова, Р. В. Писарев** // Письма в ЖЭТФ.– 2003.– Т.78, № 3.– С.175–179.
69. **Калашникова, А. М.** Оптические и магнитооптические исследования мультиферроика  $\text{GaFeO}_3$  с высокой температурой Кюри / **А. М. Калашникова** [и др.] // Письма в ЖЭТФ.– 2005.– Т.81, №9.– С. 568–573.
70. **Leute, S.** APS Determination of the Magnetic Symmetry of Hexagonal Manganites by Second Harmonic Generation / **S. Leute** [et al.] // Phys. Rev. Lett. 2000.–V.84, №24.– P. 5620–5623.

71. **Krichevstov, V. B.** Spontaneous non-reciprocal reflection of light from antiferromagnetic  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  / **V. B. Krichevstov** [et al.] // Journ. Phys.: Condens. Matter.–1993.– V.5, №4.– P. 8233–8240.
72. **Kharchenko, N. F.** Quadratic magnetic rotation of polarization plane of light in antiferromagnetic  $\text{CaMnGe}$  garnet / **N. F. Kharchenko** [et al.] // ФНТ.–1994.– Т.20, №4.– С. 371–374.
73. **Kharchenko, N. F.** Quadratic in field contribution to the magnetization of antiferromagnetic  $\text{CoF}_2$  / **N. F. Kharchenko, R. Szymczak, M. Baron** // J. Magn. Magn.Mater.–1995.– V.140–144, №1.– P. 161–162.
74. **Харченко, Н. Ф.** Образование полосовых антиферромагнитных доменов в  $\text{Ca-Mn-Ge}$  гранате, помещенном в область интерференции ортогонально поляризованных световых пучков / **Н. Ф. Харченко, В. А. Бедарев** // Письма в ЖЭТФ.– 1992.– Т.56, №7,8.– С. 360–363.
75. **Харченко, Н. Ф.** Влияние линейной поляризации света на перемагничивание антиферромагнитного кристалла  $\text{Ca-Mn-Ge}$  граната / **Н. Ф. Харченко, В. А. Бедарев** // ФНТ.– 1993.– Т.19, №1.– С. 72–78.
76. **Zvezdin, A. K.** Magnetoelectric interaction and magnetic field control of electric polarization in multiferroics / **Zvezdin A. K.** [et al.] // J. Magn. Magn. Mater.– 2006.– V.300–303.– P. 224–228.
77. **Fiebig, M.** Magnetoelectric effects in multiferroic manganites / **M. Fiebig** [et al.] // J. Magn. Magn. Mater.– 2005.– V.290–291.– P. 883–890.
78. **Fiebig, M.** Second harmonic generation of magneto-dipole type in the centrosymmetric antiferromagnets  $\text{NiO}$  and  $\text{KNiF}_3$  / **M. Fiebig** [et al.] // J. Magn. Magn. Mater.– 2003.– V.256–259.– P. 110–113.
79. **Fiebig, M.** Structure and interaction of domain walls in  $\text{YMnO}_3$  / **M. Fiebig** [et al.] // J. Magn. Magn. Mater.– 2004.– V.272–276.– P. 353–354.
80. **Fiebig, M.** Ultrafast and magnetoelectric phase transitions in antiferromagnets / **M. Fiebig** [et al.] // J. Magn. Magn. Mater.– 2006.– V.300–303.– P. e242 – e269.
81. **Goltsev, A.V.** Structure and interaction of antiferromagnetic domain walls in hexagonal  $\text{YMnO}_3$  / **A.V. Goltsev** [et al.] // Phys. Rev. Letters.– 2003.– V.90, №17.– P. 177204–177207.
82. **Fiebig, M.** Second harmonic generation and magnetic-dipole-electric-dipole interference in antiferromagnetic  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  / **M. Fiebig** [et al.] // Phys. Rev. Letters.– 1994.– V.73, №17.– P. 2127–2130.
83. **Krotov, S. S.** Magnetoelectric and individual toroidal ordering in  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  / **S. S. Krotov** [et al.] // J. Magn. Magn. Mater.– 2001.– V.226–230.– P. 963–964.
84. **Kharchenko, N. F.** The linear magneto optical effect as a manifestation of a higher-order magnetoelectric effect / **N. F. Kharchenko** // Ferroelectrics.– 1994.– V.162, №.1–4.– P. 173–189.
85. **Калашникова, А. М.** Линейная и нелинейная оптическая спектроскопия гадолиниевого ферробората  $\text{GdFeO}_3(\text{BO}_3)_4$  / **А. М. Калашникова** [и др.] // Письма в ЖЭТФ.– 2004.– Т.80, №5.–С. 339–343.
86. **Меркулов, В. С.** К магнитооптике ортоферритов при спиновой переориентации / **В. С. Меркулов, В. В. Федотова** // ФТТ.– 2006.– Т.48, №5.– С. 841–844.
87. **Ахмадуллин, И.Ш.** Магнитное двулучепреломление света в гематите / **И. Ш. Ахмадуллин, В. А. Голенищев-Кутузов, С.А. Мигачев** // ФТТ.– 2002.– Т.44, №2.–С. 321–324.
88. **Jung, J. H.** Optical magnetoelectric effect in the polar  $\text{GaFeO}_3$  ferrimagnet / **J. H. Jung** [et al.] // Phys. Rev.Lett.–2004.–V.93.– P. 037403.
89. **Kida, N.** Enhanced optical magnetoelectric effect in patterned polar ferrimagnet / **N. Kida, J. Kanefa, J. P. He.** // Phys.Rev.Lett.–2006.– V.96.– P. 167202.
90. **Звездин, А. К.** Фазовые переходы и гигантский магнитоэлектрический эффект в мультиферроиках / **А. К. Звездин., А. П. Пятаков** // УФН.– 2004.– Т.174, №4.– С. 465–470.
91. **Балбашов, А. М.** Управляемые транспаранты на магнитных кристаллах / **А. М. Балбашов** [и др.] // Квант. электроника.– 1977.– Т.4, №9.– С. 1933–1943.

92. **Федоров, Ф.И.** Оптика анизотропных сред / **Ф.И. Федоров.**– Мн.: Изд-во АН БССР, 1958.– 380 с.
93. **Федоров, Ф. И.** Теория упругих волн в кристаллах / **Ф.И. Федоров.**– М.: Наука, 1965.– 386 с.
94. **Федоров, Ф. И.** Группа Лоренца / **Ф.И. Федоров.**– М.: Наука, 1979.– 384 с.
95. **Бокуть, Б. В.** О форме уравнений связи в оптически активных кристаллах / **Б. В. Бокуть, А. Н. Сердюков, Ф. И. Федоров** // *Опт. и спектр.*– 1974.– Т.37, №2.– С. 288–293.
96. **Сердюков, А. Н.** К феноменологической теории оптических и акустических свойств кристаллов / **А. Н. Сердюков** // *Кристаллография.*– 1976.– Т.21, №2.– С. 275–282.
97. **Барковский, Л. М.** Поляризованные волны в сложных средах / **Л. М. Барковский, А. Н. Фурс.**– Минск: БГУ.– 2002.– 224с.
98. **Барковский, Л.М.** Операторные методы описания оптических полей в сложных средах / **Л. М. Барковский, А. Н. Фурс.**– Минск: Беларуская навука.– 2003.– 286с.
99. **Onsager, L.** Reciprocal relations in irreversible processes. I / **L. Onsager** // *Phys.*– 1931.– V.37, №3.– P. 405–417.
100. **Onsager, L.** Reciprocal relations in irreversible processes. II / **L. Onsager** // *Phys. Rev.* – 1931.– V.38, №12.– P. 2265–2279.
101. **Casimir, H.B.G.** On Onsager's principle of microscopic reversibility / **H.B.G. Casimir** // *Rev. Mod. Phys.*– 1945.– V.17, №2-3.– P. 343–350.
102. **Pantulu, P. V.** Magnetic symmetry and transport properties of crystals / **P. V. Pantulu and E. Sudarshan** // *J. Phys.*– 1979.– V.3, №3.– P. 604–609.
103. **Pantulu, P. V.** Magnetic symmetry and Onsager relation / **P. V. Pantulu and E. Sudarshan** // *Proc. Indian Acad. Sci.*– 1969.– V.A 69, №5.– P. 279–283.
104. **Cracknell, A. P.** Symmetry properties of the transport coefficients of magnetic crystals / **A. P. Cracknell** // *Phys. Rev. B.* –1973.– V.7, №5.– P. 2145–2154.
105. **Rado, G.** Reciprocity relations for susceptibilities and fields in magnetoelectric anti-ferromagnets / **G. Rado** // *Phys. Rev. B.*– 1973. – V.8, №11.– P. 5239–5242.
106. **Pourghazi, A.** Symmetry and antisymmetry restrictions on the form of transport tensors for magnetic crystals / **A. Pourghazi, G. A. Saunders and V. C. Akgöz** // *Phil.Mag.*– 1976.– V.33, №5.– P. 781–784.
107. **Pourghazi, A.** Time inversion symmetry and transport properties of solids / **A. Pourghazi, G. A. Saunders** // *Phys. Lett.*– 1977.– V.62A, №7.– P. 521–522.
108. **Portigal, D. L.** Intrinsic magneto-optical effects in magnetic crystals / **D. L. Portigal** // *Phys. Rev. B.*– 1978.– V.18, №7.– P. 3637–3644.
109. **Birss, R. R.** Space-time symmetry restrictions on transport coefficients / **R. R. Birss and D. Fletcher** // *J. Magn. and Magn.*– 1990.– V.15.– 18, Part II.– P. 915–916.
110. **Butzal, H. D.** Time reversal and magnetic reversal in crystal physics / **H. D. Butzal and R. R. Birss** // *Physica.* 1982.– V.114A, №1–3.– P. 518–521.
111. **Malinovsky, S.** Some consequences of the new interpretation of Onsager theorems the tensors of Ettingshausen, Nernst and Righi–Leduc in the case of weak magnetic field  $\vec{H} \cdot (\vec{H} \rightarrow 0)$  / **S. Malinovsky** // *Acta phys. pol.*– 1987.– V.A71, №4.– P. 521–526.
112. **Malinovsky, S.** The Onsager relations in the case of strong magnetic fields. Part I / **S. Malinovsky** // *Acta phys. pol.*– 1987.– V.A71, №4.– P. 527–536.
113. **Тавгер, Б. А.** О магнитной симметрии кристаллов / **Б. А. Тавгер, В. М. Зайцев** // *ЖЭТФ.*– 1956.– Т.30, №3.– С. 564–568.
114. **Kleiner, W. H.** Space–time symmetry of transport coefficients / **W. H. Kleiner** // *Phys. Rev.*– 1966.– V.142, №2.– P. 318–326; *Ibid.*, II. Two theories compared / **W. H. Kleiner** // – 1967.– V.153, №3.– P. 726–727.
115. **Kleiner, W. N.** Space–time symmetry of transport coefficients. III. Thermogalvanomagnetic coefficients / **W. H. Kleiner** // *Phys. Rev.*– 1969.– V.182, №3.– P. 705–709.
116. **Гиргель, С. С.** Кристаллооптика магнитоупорядоченных сред: дисс. д-ра физ.-мат. наук: 01.04.18 / **С. С. Гиргель.**– Гомель, ГГУ, 1991.– 311с.

117. **Brown, W. F.** Possibility of visual observation of antiferromagnetic domains . **W. F. Jr. Brown, S. Shtrikman, and D. Treves.** // *J. Appl. Phys.*– 1963.– V.34, №4 (Part 2).– P. 1233–1234.
118. **Hornreich, R. M.** Theory of gyrotropic birefringence / **R. M. Hornreich, S. Shtrikman** // *Phys. Rev.*– 1968.– V.171, №3.– P. 1065–1074.
119. **Bhagavantam, S.** Birefringence and optical activity in magnetic crystals / **S. Bhagavantam** // *Mat. Res. Bull.*– 1969.– V.4, №8.– P. 477–487.
120. **Гиргель, С. С.** О принципе Онзагера в кристаллофизике магнитных сред / **С. С. Гиргель, Т. В. Демидова** // *Ковариантные методы в теоретической физике. Оптика и акустика: сб. научн. тр.* / – Мн.: ИФ АН БССР. 1986.– С. 118–122.
121. **Chandrasekhar, P.** On optical properties of crystals / **P. Chandrasekhar and T. P. Srinivasan** // *J. Phys. C.*– 1973.– V.6.– P.1085–1090.
122. **Белый, В. Н.** О линейном воздействии магнитного поля на оптическую активность / **В. Н. Белый, А. Н. Сердюков** // *Кристаллография.*– 1974.– Т.19, № 6.– С. 1279–1280.
123. **Бокуть, Б. В.** К феноменологической теории поглощающих оптически активных сред / **Б. В. Бокуть, А. Н. Сердюков, В. В. Шепелевич** // *Опт. и спектр.*– 1974.– Т.37, №1.– С. 120–124.
124. **Kurss, H.** Dispersion relations, stored energy and group velocity for anisotropic electromagnetic media / **H. Kurss** // *Quart. Appl. Math.*– 1968.– V.28, №3.– P. 373–387.
125. **Полевой, В. Г.** О четырехмерной групповой скорости / **В. Г. Полевой, С. М. Рытов** // *УФН.*– 1978.– Т.125, №34.– С. 549–565.
126. **Voigt, W.** Theoretisches und Experimentelles zur Aufklärung des optischen Verhaltens aktiver Kristallen / **W. Voigt** // *Ann.Phys.*– 1905.– Bd.18, №14.– S. 645–695.
127. **Туров, Е. А.** Материальные уравнения электродинамики / **Е. А. Туров.**– М.: Наука, 1983.– 158 с.
128. **Агеев, А. Н.** О магнитной проницаемости на оптических частотах / **А. Н. Агеев** [и др.] // *ФТТ.*– 1983.– Т. 25, №2.– С. 478–481.
129. **Любимов, В. Н.** Кристаллооптика с учетом магнитоэлектрического эффекта / **В. Н. Любимов** // *Докл. АН СССР.*– 1968.– Т. 181, №4.– С. 858–861.
130. **Борн, М.** Оптика / **М. Борн.**– Харьков – Киев: ГНТИУ.– 1937.– 795 с.
131. **Gibbs, J. W.** On electromagnetic theory of natural activity / **J. W. Gibbs** // *Amer. J. Sci.*– 1882.– V.III.– P. 460–468.
132. **Försterling, K.** Lehrbuch der Optik / **K. Försterling.**– Leipzig: Hirrel, 1906.
133. **Försterling, K.** Reflection des Lichtes an natürlich activen Körpern / **K. Försterling** // *Ann. d. Phys.*– 1909.– Bd.29, №9.– P. 809–832.
134. **Александров, В. Н.** Сохранение энергии в теории оптической активности / **В. Н. Александров** // *Кристаллография.*– 1970.– Т.15, №9.– С. 996–1001.
135. **Барковский, Л. М.** Френелевские операторы отражения и пропускания для плоско-слоистых гироанизотропных сред / **Л. М. Барковский, Г. Н. Борздов, А. В. Лавриненко** // *Изв. АН БССР. Сер. физ.–мат. наук.*– 1986, №2.– С. 79–85.
136. **Birss, R. R.** The propagation of electromagnetic waves in magnetoelectric crystals / **R. R. Birss and Shrubbsall.** // *Phil. Mag.*– 1967.– V.15, №136.– P. 687–700.
137. **Fuchs, R.** Wave propagation in a magnetoelectric medium / **R. Fuchs** // *Phil. Mag.*– 1965.– V.11, №111.– P. 647–649.
138. **Kong, A. J.** Theorems of bianisotropic media / **A. J. Kong** // *Proc. IEEE.*–1972.– V.60, №9.– P. 1036–1046.
139. **Le Korre, Y.** Théorie tensorielle du pouvoir rotatoire magnétique / **Y. Le Korre** // *J. de Rhy. et Radium.*– 1957.– V.18, №5.– P.312–317.
140. **Борздов, Г. Н.** Общая формула пропускания для системы поляризатор – оптически активный кристалл – анализатор / **Г. Н. Борздов** // *Изв. АН БССР. Сер. физ.- мат. наук.*– 1977.– №3.– С. 85–90.

141. **Семин, Г. С.** Структура матриц Мюллера естественно гиротропных анизотропных кристаллов / **Г. С. Семин** // Дифракция и распространение электромагнитных волн: сб. научн. тр. /– М.: МФТИ, 1984.– С. 22–32.
142. **Семин, Г. С.** Теоретико–групповая классификация процессов преобразования поляризации в естественно гиротропных поглощающих кристаллах / **Г. С. Семин** // Оптика анизотропных сред: междуведомственный сб. /– М.: МФТИ, 1985. – С. 71–79.
143. **Трифонов, А. С.** Магнитная проницаемость прозрачного магнитодиэлектрика на оптических частотах – эксперимент / **А. С. Трифонов** [и др.] // Письма в ЖЭТФ.– 1986.– Т. 44, № 10.– С. 459–461.
144. **Post, E. J.** Formal structure of electromagnetism / **E. J. Post.** – Amsterdam: Nort Hort Holland Publ. Co., 1962.– 204 p.
145. **Гиргель, С. С.** Плотность потока энергии, импульс и тензор натяжений Максвелла в прозрачных линейных магнитоупорядоченных кристаллах / **С. С. Гиргель** // Ковариантные методы в оптике и акустике: сб. научн. тр. / Мн.: ИФ АН Беларуси. 1996.– С.38–43.
146. **Musha, T.** Electrodynamics of anisotropic media with space time and dispersion / **T. Musha** // Proc. IEEE.– V.60, №12.– P.1475–1485.
147. **Гершман, Б. Н.** Несколько замечаний о распространении электромагнитных волн в анизотропной диспергирующей среде / **Б. Н. Гершман, В. Л. Гинзбург** // Изв. вузов. Радиофизика.– 1962.– Т.5, №1.– С. 31–46.
148. **Бредов, М. М.** Классическая электродинамика / **М. М. Бредов, В. В. Румянцев, И. Н. Топтыгин.**– М. : Наука, 1985.– 399 с.
149. **Герценштейн, М. Е.** Энергетические соотношения в пространственно-диспергирующих средах / **М. Е. Герценштейн** // ЖЭТФ.– 1954.– Т.26, №6.– С. 680–683.
150. **Бокуть, Б. В.** О поляризации электромагнитных волн в гиротропных кристаллах / **Б. В. Бокуть, С. С. Гиргель** // Кристаллография.– 1976.– Т.21, №2.– С. 264–268.
151. **Бокуть, Б. В.** Поляризация электромагнитных волн в прозрачных магнитоупорядоченных кристаллах / **Б. В. Бокуть, С. С. Гиргель** // Кристаллография.– 1976.– Т.21, №2.– С. 269–274.
152. **Бокуть, Б. В.** Введение в оптику магнитоупорядоченных и нелинейных кристаллов / **Б. В. Бокуть, С. С. Гиргель** // Основы теоретической кристаллооптики. Ч.IV (учеб. пособие) / – Гомель: ГГУ, 1984.– 70 с.
153. **Бокуть, Б. В.** Поляризация электромагнитных волн в поглощающих магнитоупорядоченных кристаллах / **Б. В. Бокуть, С. С. Гиргель** // Кристаллография.– 1980.– Т.25, №1.– С. 22–27.
154. **Бокуть, Б. В.** Матрицы Джонса и Мюллера для поглощающих магнитоупорядоченных кристаллов / **Б. В. Бокуть, С. С. Гиргель** // Ж. прикл. спектр.– 1981.– Т.35, №4.– С. 714–720.
155. **Томильчик, Л. М.** Оптика поглощающих магнитных кристаллов. I. Поляризация однородных плоских волн / **Л. М. Томильчик, Ф. И. Федоров** // Опт. и спектр.– 1958.– Т.5, № 4.– С. 462–468.
156. **Хапалюк, А. П.** Круговые оптические оси в поглощающих кристаллах / **А. П. Хапалюк** // Кристаллография.– 1962.– Т.7, №5.– С. 724–729.
157. **Барковский, Л. М.** О тензоре показателей преломления в кристаллооптике / **Л. М. Барковский** // Кристаллография.– 1976.– Т.21, №3.– С. 445–449.
158. **Гиргель, С. С.** Поляризация электромагнитных волн в поглощающих магнитоупорядоченных средах средней и высшей категорий / **С. С. Гиргель** // Опт. и спектр.– 1982.– Т.53, №19.– С. 361–364.
159. **Малаховский, А. В.** Магнитооптический резонанс в марганцевом феррите в видимой области спектра / **А. В. Малаховский, И. С. Эдельман, Г. Г. Васильев** // ФТТ.– 1972.– Т.14, №.3.– С. 799–801.

160. **Малаховский, А. В.** Тензор диэлектрической проницаемости марганцевого феррита в видимой области спектра / **А. В. Малаховский, И. С. Эдельман, Г. Г. Васильев** // ФТТ.– 1972.– Т.14, №6.– С. 1698–1703.
161. **Гиргель, С. С.** Сингулярные направления в поглощающих магнитоупорядоченных кристаллах ромбической сингонии / **С. С. Гиргель, С. В. Сочнев** // Опт. и спектр.– 1984.– Т.57, №4.– С. 643–646.
162. **Гиргель, С. С.** Прохождение света через систему поляризатор – кристаллическая пластинка – анализатор / **С. С. Гиргель** // Опт. и спектр.– 1979.– Т.46, №4.– С. 819–821.
163. **Гиргель, С.С.** Отражение и преломление света на границе магнитоупорядоченного кристалла / **С. С. Гиргель** // Кристаллография.– 1980.– Т.25, №2.– С. 380–382.
164. **Гиргель, С. С.** Матрицы Джонса и Мюллера плоскопараллельной пластинки из прозрачного магнитоупорядоченного кристалла / **С. С. Гиргель** // Ж. прикл. спектр.– 1980.– Т.32, №3.– С. 532–535.
165. **Бокуть, Б. В.** Преобразование поляризации света плоскопараллельной пластинкой из магнитоупорядоченного кристалла при нормальном падении / **Б. В. Бокуть, С. С. Гиргель** // Опт. и спектр.– 1980.– Т.49, №5.– С. 920–924.
166. **Бокуть, Б. В.** Взаимодействие частично поляризованного света с магнитоупорядоченной пластинкой / **Б. В. Бокуть, С. С. Гиргель** // Опт. и спектр.– 1980.– Т.49, №6.– С. 1164–1167.
167. **Бокуть, Б. В.** Метод определения оптических параметров прозрачных гироанизотропных кристаллов / **Бокуть Б. В., С. С. Гиргель** // Докл. АН БССР.– 1981.– Т.25, №6.– С. 507–509.
168. **Гиргель, С. С.** Преобразование частоты электромагнитных волн в кристаллах с центросимметричной парамагнитной фазой / **С. С. Гиргель, Т. В. Демидова** // Опт. и спектр.– 1987.– Т. 63, №1.– С. 101–104.
169. **Бокуть, Б. В.** Применение методов отражательной фотометрической эллипсометрии для определения оптических постоянных поглощающих гироанизотропных кристаллов / **Б. В. Бокуть, С. С. Гиргель** // Опт. и спектр.– 1987.– Т.63, №4.– С. 935–938.
170. **Бокуть, Б. В.** Метод определения оптических параметров поглощающих гироанизотропных кристаллов на основе отражательной фотометрической эллипсометрии / **Б. В. Бокуть, С. С. Гиргель** // Тезисы докладов 3-го Всесоюзного семинара "Новые поляризационные методы и приборы для исследования напряженно-деформированного состояния и анализа состава и молекулярной структуры вещества" /– Л.: ГОИ.– 1988.– С. 45–46.
171. **Гончаренко, А. М.** О линейной поляризации света в поглощающих кристаллах низших сингоний / **А. М. Гончаренко** // Докл. АН БССР.– 1961.– Т.5, №12.– С. 545–547.
172. **Гиргель, С. С.** Сингулярные оптические оси в низкосимметричных кристаллах / **С. С. Гиргель** // Весці АН БССР. Сер. фіз.–мат. н.– 1995.– №4.– С. 20–23.
173. **Бокуть, Б. В.** О распространении света вдоль сингулярных эллиптических направлений поглощающих гиротропных кристаллов / **Бокуть Б. В., С. С. Гиргель** // Ж. прикл. спектр.– 1982.– Т.26, № 4.– С. 666–669.
174. **Шамбуров, В. А.** Об изменении параметров поляризации волн Фохта / **В. А. Шамбуров, Е. А. Евдищенко** // Ковариантные методы в теоретической физике. Оптика и акустика: сб. научн. тр. /– Мн.: ИФ АН БССР.– 1981.– С. 105–113.
175. **Girgel, S. S.** Biorthogonal relations for electromagnetic eigenwaves in bianisotropic media / **S. S. Girgel** // Proc. 3<sup>rd</sup> International Workshop on Chiral, Bi-isotropic and Bi-anisotropic Media. France /– 1994.– P. 319–321.
176. **Федоров, Ф. И.** Новая ковариантная форма уравнений нормалей для двухосных кристаллов / **Ф. И. Федоров** // Ж. прикл. спектр.– 1982.– Т.37, №6.– С. 941–949.
177. **Бокуть, Б. В.** Новые формы уравнения нормалей для бианизотропных сред / **Бокуть Б. В., С. С. Гиргель** // Ж. прикл. спектр.– 1987.– Т.46, №3.– С. 470–473.

178. **Бокуть, Б. В.** Электромагнитные волны в магнитоупорядоченных кристаллах, обладающих естественной оптической активностью / **Бокуть Б. В., С. С. Гиргель** // Опт. и спектр.– 1980.– Т.49, №4.–С. 738–741.
179. **Гиргель, С. С.** Показатели преломления и векторы рефракции собственных волн в оптически активных магнитоупорядоченных кристаллах / **С. С. Гиргель** // Опт. и спектр.– 1986.– Т. 60, №4.– С. 777–780.
180. **Трауб, Дж.** Итерационные методы решения уравнений / **Дж. Трауб.** – М.: Мир, 1985.– 263 с.
181. Magneto-electrical interaction phenomena in crystal / Ed. by **A. J. Freeman, H. Schmid.** – London: Gordon and Breach, 1975.– 228 p.
182. **Толедано, Ж. К.** Теория Ландау фазовых переходов / **Ж. К. Толедано, П. Толедано.**–М.: Мир.–1994.– 463 с.
183. **Шмид Г.** Двойникование и секториальный рост в кристаллах борацитов никеля, выращенных транспортными реакциями / **Г. Шмид** // Рост кристаллов.– М.: Наука.– 1967.– Т.VII, Ч.1.– С. 32–65.
184. **Kobayashi, J.** Optical activity of ferroelectric  $\text{Cu}_3\text{B}_7\text{O}_{13}\text{Cl}$  / **J. Kobayashi, Y. Uesu, H. Kumomi** // Phase Transit.– 1984.– V.4, №4.– P. 255–262.
185. **Pisarev, R. V.** Optical phenomena in  $\text{BaMnF}_4$  near its phase–transition temperatures / **R. V. Pisarev** [et al.] // Phys. Rev. B.– 1983.– V.28, №5.– P. 2677–2685.
186. **Бурков, В. И.** Гиротропия кристалла  $\text{CeCuCl}_3$  / **В. И. Бурков** [и др.] // Кристаллография.– 1979.– Т.24, №2.– С. 297–301.
187. **Ию, К.** Observation of the intrinsic magneto–optical effect of the antiferromagnetic ordered state / **K. Iio, T. Hoshio, K. Nagata** // J. Magn. Magn. Mater.– 1983.– V.31-34, №2.– P. 579–588.
188. **Маркелов, В. А.** Экспериментальное наблюдение нового невязимного магнитооптического эффекта / **В. А. Маркелов, М. А. Новиков, А. А. Туркин** // Письма в ЖЭТФ.– 1977.– Т.25, №9.– С. 404–407.
189. **Новиков М. А.** Невязимные оптические эффекты во внешнем магнитном поле // Кристаллография.– 1979.– Т.24, №4.– С. 666–671.
190. **Бубис, Е. А.** Анизотропия невязимного магнитооптического эффекта в кристаллах / **Е. А. Бубис, М. А. Новиков** // ЖТФ.– 1982. – Т.52, № 2.– С. 399–400.
191. **O'Dell, T.H.** Electric field induced Faraday rotation in chromic oxide / **T. H. O'Dell and E. A. D. White** // Phil. Mag.– 1970. V. 22, №177.– P.649–653.
192. **Кричевцов, Б. Б.** Невязимные оптические явления в антиферромагнетике  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  в электрических и магнитных полях / **Б. Б. Кричевцов, В. В. Павлов, Р. В. Писарев** // ЖЭТФ.– 1988.– Т.94, № 2.– С. 284–295.
193. **Борздов, Г. Н.** Тензорный импеданс и преобразование световых пучков системами анизотропных слоев. II. Косое падение / **Г. Н. Борздов, Л. М. Барковский, В. И. Лаврукович** // Ж. прикл. спектр.– 1976.– Т.25, №3.– С. 526–531.
194. **Ерицян, О. С.** Оптические задачи электродинамики гиротропных сред / **О. С. Ерицян** // УФН.– 1982.– Т.138, №4.– С. 645–674.
195. **O'Dell.** The electrodynamic of magneto-electrical media / **O'Dell.**– Amsterdam: North-Holland.– 1970.– 304 p.
196. **Гиргель, С. С.** Световые волны в оптически активных средах с эффектом Фарадея / **С. С. Гиргель, В. В. Свиридова, А. Н. Сердюков** // Волны и дифракция.– 90. Т.2.– М.: Физ. Общ-во СССР.– 1990.– С. 78–81.
197. **Гиргель, С. С.** Световые волны в оптически активных средах с эффектом Фарадея / **С. С. Гиргель, В. В. Свиридова, А. Н. Сердюков** // Кристаллография.– 1991.– Т.36, №6.– С. 1572–1573.
198. **Бокуть, Б. В.** Об определении параметров оптической активности двуосных кристаллов / **Б. В. Бокуть** // Кристаллография.– 1970.– Т.15, №3.– С. 486–489.

199. Гиргель, С. С. Эффект Фарадея в одноосных кристаллах в  $\varepsilon$ -изотропной точке / С. С. Гиргель, Ф. А. Лопашин, А. Н. Сердюков // Кристаллография.– 1976.– Т.21, №3.– С. 450–453.

200. Зильберштейн, А. Х. Влияние магнитного поля на оптические свойства одноосных кристаллов с инверсией двупреломления / А. Х. Зильберштейн // Оптика анизотропных сред: междуведомственный сб. /– М.: МФТИ, 1987.– С. 41–43.

201. Зильберштейн, А. Х. Поперечный эффект Фарадея в одноосных немагнитных кристаллах с  $\varepsilon$ -изотропной точкой / А. Х. Зильберштейн, Л. Е. Соловьев, М. О. Чайка // Опт. и спектр.– 1991.– Т.70, №1.– С. 82–85.

202. Бокуть Б.В., Гиргель С.С. Определение векторов рефракции из уравнения нормалей для линейных анизотропных и гиротропных сред / Б.В. Бокуть, С.С. Гиргель // Ковариантные методы в теоретической физике. Оптика и акустика: сб. научн. тр. / – Мн.: ИФ АН БССР. 1986.– С. 30–32.

203. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн и Е. Корн – М.: Наука, 1973.– 831 с.

204. Федоров, Ф. И. Обратная задача отражения для однородных поглощающих монокристаллов / Ф. И. Федоров [и др.] // Кристаллография.– 1985.– Т.30, №4.– С. 629–635.

205. Ханг, Фо Тхи Нгуен. Тензоры нормальной рефракции в оптике магнитных материалов / Фо Тхи Нгуен Ханг // Вестник БГУ. Сер. I.– 1987.– №2.– С. 13–17.

206. Барковский, Л. М. Импеданс плоской электромагнитной волны в оптически активных средах / Л. М. Барковский, Г. Н. Борздов, Ф. И. Федоров // Докл. АН БССР.– 1975.– Т.19, №4.– С. 305–308.

207. Гиргель, С. С. Тензоры показателей преломления и импедансов в линейных средах. I. Нормальное падение / С. С. Гиргель // Гомель: ГГУ. –Деп. в ВИНТИ 16.12.1987. №8812–В87.– 17 с. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук.– 1987.

208. Гиргель, С. С. Тензоры показателей преломления и импедансов в линейных средах. II. Наклонное падение / С. С. Гиргель // Гомель: ГГУ.– Деп. в ВИНТИ 16.12.1987.– №8811–В87.– 12 с. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук.– 1987.

209. Jones, R. C. A new calculus for the treatment of optical systems. VII. Properties of the N-Matrices / R. C. Jones // J. Opt. Soc. Amer.– 1948.– V.38, №8.– P. 671–680.

210. Аззам, Р. М. А. Эллипсометрия и поляризованный свет / Р. М. А. Аззам, Н. М. Башара // М.: Мир, 1981.– 583 с.

211. Баранова, Н. Б. Новые электрооптические и магнитооптические эффекты в жидкостях / Н. Б. Баранова, Ю. В. Богданов, Б. Я. Зельдович // УФН.– 1977.– Т.123, №2.– С. 349–360.

212. Takenaka, H. A. Unified formalism for polarization optics by using group theory. I (Theory) / H. Takenaka // Jap. J. Appl. Phys.– 1973.– V.12, №2.– P. 226–231; Ibid., II (Generator representation) / H. Takenaka.– №11.– P. 1729–1731.

213. Takenaka, H. A unified formalism for polarization optics by using group theory / H. Takenaka // Nouv. rev. d'opt.–1973.– V.4, №1.– P.37–41. Ibid., General birefringence and general dichroism / H. Takenaka. – №2.– P. 105–107.

214. Cloude, S. R. Group theory and polarization algebra / S. R. Cloude // Optik.– 1986.– V.75, №1.– P. 26–36.

215. Schmieder, R.W. Stokes–algebra formalism / R. W. Schmieder // J. Opt. Soc. Amer.– 1969.– V.59, №3.– P. 297–302.

216. Whitney, C. Pauli–algebraic operators in polarization optics / C. Whitney // J. Opt. Soc. Amer.– 1971.– V.61, №9.– P. 1207–1213.

217. Джерард, А. Введение в матричную оптику / А. Джерард, Дж. М. Берч – М.: Мир, 1978.– 341 с.

218. Azzam, R. M. A. Propagation of partially polarized light through anisotropic media with or without depolarization: A differential 4 4 matrix calculus / R. M. A. Azzam // J. Opt. Soc. Amer.– 1978.– V.68, №12.– P. 1756–1767.

219. **Jones, R.C.** A new calculus for the treatment of optical systems. VIII. Electromagnetic theory / **R.C. Jones** // *J. Opt. Soc. Amer.*– 1956.– V.46, №2.– P. 121–131.
220. **Jensen, H. P.** Optical calculi / **H. P. Jensen** // *Spectrosc. Lett.*– 1977.– V.10, №6.– P. 471–481.
221. **Kubo, H.** Vector representation of behavior of polarized light in a weakly inhomogeneous medium with birefringence and dichroism. I. / **H. Kubo, R. Nagata** // *J. Opt. Soc. Amer.*– 1983.– V.73, №12.– P.1719 – 1724; *Ibid.*, II / **H. Kubo, R. Nagata**. – 1985.– V.2, №1.– P. 30–34.
222. **Меркулов, В. С.** О прохождении света через пластинку из магнитоупорядоченного кристалла / **В. С. Меркулов** // *Опт. и спектр.*– 1984.–Т.57, №6.– С. 1038–1041.
223. **Бокуть, Б. В.** Матрицы Джонса и Мюллера для линейных однородных сред / **Б. В. Бокуть, С. С. Гиргель** // *Оптика анизотропных сред: междуведомственный сб.* /– М.: МФТИ, 1987.– С. 74–77.
224. **Меркулов, В. С.** Матрицы Джонса и Мюллера среды с произвольным тензором диэлектрической проницаемости / **В. С. Меркулов** // *Ж. прикл. спектр.*– 1983.– Т.39, № 4.– С. 681–683.
225. **Меркулов, В. С.** Симметрия поляризационно–оптических свойств кристаллических пластинок / **В. С. Меркулов** // *Кристаллография.*– 1985.– Т.30, №2.– С. 325–329.
226. **Желудев, И. С.** Симметрия направлений в кристаллах / **И. С. Желудев** // *Кристаллография.*– 1971.– Т.16, №2.– С. 273–278.
227. **Гиргель, С. С.** Симметрия оптических свойств направлений в кристаллах / **С. С. Гиргель, Т. В. Демидова** // *Кристаллография.*– 1991.– Т.36, №5.– С. 1280–1281.
228. **Гиргель С. С.** Оптические свойства направлений в магнитоупорядоченных кристаллах / **С. С. Гиргель, Т. В. Демидова** // *Кристаллография.*– 1998.– Т.43, №5.– С. 782–785.
229. **Барковский, Л. М.** Тензорный импеданс и преобразование световых пучков системами анизотропных слоев. I. Нормальное падение / **Л. М. Барковский и Г. Н. Борздов** // *Опт. и спектр.*– 1975.– Т.39, №1.– С. 150–154.
230. **Розенберг, Г.В.** Вектор – параметр Стокса / **Г.В. Розенберг** // *УФН.*– 1955.– Т.16, №1.– С. 77–110.
231. **Хюлст, Ван де Г.** Рассеяние света малыми частицами / **Ван де Хюлст Г.**– М.: ИЛ, 1961.– 636 с.
232. **Barakat, R.** Bilinear constraints between elements of the 4x4 Mueller–Jones transfer matrix of polarization theory / **R. Barakat** // *Opt. Commun.*– 1981.– V.38, №3.– P. 159–161.
233. **Меркулов, В. С.** О связи между матрицами Джонса и Мюллера / **В. С. Меркулов** // *Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.*– 1987.– №3.– С. 111–113.
234. **Гречушников Б. Н., Константинова А. Ф.** Матрицы Мюллера для оптически активных кристаллов // *Кристаллография.*– 1971.– Т.16, №2.– С. 448–449.
235. **Семин, Г. С.** Векторная параметризация матриц Мюллера однородной анизотропной недеполяризующей среды / **Семин Г. С** // *Оптика твердого тела.*– М.: МФТИ, 1983.– С. 7–18.
236. **Тронько, В. Д.** Магнитооптически активные среды, обладающие линейным и круговым дихроизмом. / **В. Д. Тронько, В. А. Павлов** // *Кристаллография.*– 1974.– Т.19, №4.– С. 692 – 700.
237. **Гиргель, С. С.** Ограничения на матрицы Мюллера деполаризующих оптических систем / **С. С. Гиргель** // *Докл. АН БССР.*– 1990.– Т.34, № 1.– С. 34–36.
238. **Химмельблау, Д.** Прикладное нелинейное программирование / **Д. Химмельблау.** – М.: Мир, 1976.– 288 с.
239. **Колесниченко, Б. Н.** Оптимизация схем измерения матриц рассеяния света / **Б. Н. Колесниченко, В. В. Марьенко** // *Опт. и спектр.*– 1996.– Т.80, №6.– С. 966–969.
240. **Изогова, В. Ф.** Использование соотношений между элементами матриц Мюллера для отдельных свойств объектов и достоверности эксперимента / **В. Ф. Изогова, И. А. Максимова, С. В. Романов** // *Опт. и спектр.*– 1996.– Т.80, №5.– С. 838–844.

241. **Cloude, S. R.** Conidictions for physical realisibility of matrix operators in polarimetry / **S. R. Cloude** // Proc. SPIE, 1990.– V.1166.– P. 177–185.
242. **Гиргель, С. С.** Структура матриц Мюллера деполяризующих оптических систем / **С. С. Гиргель** // Кристаллография.– 1991.– Т.36, №6.– С. 1570–1571.
243. **Girgel, S. S.** Polarization analysis of depolarizing optical systems / **S. S. Girgel, V. A. Emelyanov, N. N. Fedosenko** // Proc. SPIE.– 1994.– V.2265.– P. 349–353.
244. **Гангмахер, Ф. Р.** Теория матриц / **Ф. Р. Гангмахер.** – М.: Наука, 1988.– 548 с.
245. **Писарев, Р. В.** Поворот и деформация оптической индикатрисы кристаллов при вращении намагниченности / **Р. В. Писарев** // ФТТ.– 1975.– Т. 17, № 5.– С. 1396–1404.
246. **Тронько, В. Д.** Магнитооптически активные среды, обладающие линейным и круговым дихроизмом. Матрицы Джонса / **В. Д. Тронько, В. А. Павлов** // Кристаллография.– 1975.– Т.20, №3.– С. 477–484.
247. **Tabor, W. J.** Electromagnetic propagation though possessing both Faraday rotation and birefringence: experiments with ytterbium orthoferrite / **W. J. Tabor, F. S. Chen** // J. Appl. Phys.– 1969.– V.40, №7.– P. 2760–2765.
248. **Писарев, Р.В.** Магнитное двулучепреломление в ферритах–гранатах / **Р.В. Писарев** [и др.] // ЖЭТФ.–1971.– Т.60, №6.– С. 2188 – 2202.
249. **Лисовский, Ф. В.** Магнитооптический модулятор со скрещенными управляющим и подмагничивающим полями / **Ф. В. Лисовский, О. С. Маркелова** // Радиотехника и электроника.– 1975.– Т.20, №8.– С.1651–1655.
250. **Бокуть, Б. В.** Оптические оси в ферритах–гранатах с учетом неколлинеарности подрешеток / **Б. В. Бокуть, С. С. Гиргель** // Кристаллография.– 1976.– Т.21, №3.– С. 454–458.
251. **Гиргель, С. С.** К расчету направлений оптических осей в кристаллах ферритов–гранатов / **С. С. Гиргель, С. В. Сочнев** // Докл. АН БССР.– 1984.– Т.28, №11.– С. 992–994.
252. **Харченко, Н. Ф.** Линейный магнитооптический эффект и визуальное наблюдение антиферромагнитных доменов в орторомбическом кристалле DyFeO<sub>3</sub> / **Н. Ф. Харченко, С. Л. Гнатченко** // ФНТ.– 1981.– Т.7, №4.– С. 475–493.
253. **Smith, G. F.** The crystallographic property tensors of orders I to 8 / **G. F. Smith** // Ann. New York Acad. Sci.– 1970.– V175, №5.– P. 57–106.
252. **Гиргель, С. С.** О феноменологической тензорной кристаллофизике двухподрешеточных магнетиков / **С. С. Гиргель** // Докл. АН БССР.– 1985.– Т.29, №5.– С. 424–426.
253. **Гиргель, С. С.** Симметрия и оптические свойства двухподрешеточных магнетиков / **С. С. Гиргель** // Гомель: ГГУ.– Деп. в ВИНТИ 24 апр. 1985, №2755–85.– 11 с. / Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.– 1986.– №2.– С. 122.
254. **Girgel, S. S.** Tensor symmetry of the macroscopic physical properties of two–sublattice magnets / **S. S. Girgel** // “Group-Theoretical Methods in Physics. Third Yurmala Seminar, Yurmala, USSR, 22 - 24 May, 1985.– VNU Science Press, Utrecht, the Netherlands.– 1986. V.II.– P. 403–408.
255. **Макаров, Е. Л.** Материальные тензоры, совместимые с симметрией двухподрешеточных магнетиков / **Е. Л. Макаров, А. А. Костюрин, Г. С. Криничик** // Кристаллография.– 1985.– Т. 30, №3. – С.424–430.
256. **Харченко, Н. Ф.** Магнитооптические исследования индуцированного продольным полем неколлинеарного состояния антиферромагнитного фторида кобальта / **Н. Ф. Харченко, В. В. Еременко, Л. И. Белый** // ЖЭТФ.– 1982.– Т.82, №3.– С. 827–843.
257. **Харченко, Н. Ф.** Визуальное наблюдение 180-градусных антиферромагнитных доменов / **Н. Ф. Харченко, В. В. Еременко, Л. И. Белый** // Письма в ЖЭТФ.– 1979.– Т.29, №7.– С. 432–435.
258. **Rado, G. T.** Magnetoelectric effects in antiferromagnetics / **G. T. Rado, V. J. Folen** // J. Appl. Phys.– 1962.– V.33, №3.– P. 1126–1132.
259. **Шавров, В. Г.** О магнитоэлектрическом эффекте / **В. Г. Шавров** // ЖЭТФ.– 1965.– Т.48, №5.– С. 1419–1426.

260. **Кричевцов, Б. Б.** Анизотропия линейных и квадратичных магнитооптических эффектов в ортоферрите  $\text{YFeO}_3$  / **Б. Б. Кричевцов, Р. В. Писарев, М. М. Рувинштейн** // ФТТ.– 1980.– Т.22, №7.– С. 2128–2134.

261. **Харченко, Н. Ф.** Билинейное по ферро- и антиферромагнитным векторам двуупреломление света в карбонате кобальта / **Н. Ф. Харченко, В. В. Еременко, О. П. Тутакينا** // Письма в ЖЭТФ.– 1978.– Т.27, №7.– С. 466–470.

262. **Кричевцов, Б. Б.** Изотропное и анизотропное магнитное преломление света в кубических антиферромагнетиках  $\text{KNiF}_3$  и  $\text{RbMnF}_3$  / **Б. Б. Кричевцов** [и др.] // ЖЭТФ.– 1984.– Т.86, №6.– С. 2262–2273.

263. **Боровик-Романов, А. С.** Магнитное двуупреломление света в антиферромагнитных фторидах переходных металлов / **А. С. Боровик-Романов** // ЖЭТФ.– 1973.– Т.64, №5.– С. 1762–1765.

264. **Меркулов, В. С.** Магнитное линейное двулучепреломление в гематите в окрестности температуры Морина / **В. С. Меркулов** // ЖЭТФ.– 1981.– Т.80, №1.– С. 161–170.

265. **Кринчик, Г. С.** Магнитооптические свойства слабых ферромагнетиков / **Г. С. Кринчик, В. Е. Зубов** // Письма в ЖЭТФ.– 1974.– Т.20, №5.– С. 307–312.

266. **Tabor, W. J.** Visible and infrared Faraday rotation and birefringence of single-crystal rare-earth orthoferrites / **W. J. Tabor, A. W. Anderson, and Van Uitert L. G.** // J. Appl. Phys.– 1970.– V. 41, №7.– P. 3018–3021.

267. **Зенков, А. В.** Анизотропия эффекта Фарадея в слабом ферромагнетике  $\text{YFeO}_3$  / **А. В. Зенков** [и др.] // ЖЭТФ.– 1989.– Т.96, №4.– С. 1397–1405.

268. **Барьяхтар, В. Г.** Рассеяние света на магнонах и магнитооптические эффекты в многоподрешеточных магнетиках / **В. Г. Барьяхтар, Ю. Г. Пашкевич, В. Л. Соболев** // ЖЭТФ.– 1983.– Т. 85, №5.– С. 1625–1637.

269. **Fink-Finowicki, J.** The influence of crystal symmetry on magneto-optical effects in orthoferrites / **J. Fink-Finowicki** // Physica.– 1983.– V.115 B, №2.– P. 225–228.

270. **Kielich S.** Optical phenomena in magnetized crystals and isotropic bodies / **S. Kielich and R. Zawodny** // Acta phys. pol.– 1973.– V.A 43, №4.– P. 579–602.

271. **Kielich, S.** On new non-linear magneto-optical phenomena in crystals and liquids / **S. Kielich and R. Zawodny** // Optica Acta.– 1973.– V.20. №11.– P. 867–877.

272. **Барковский, Л. М.** О псевдотензорах четвертого ранга в кристаллах / **Л. М. Барковский** // Вестник БГУ. Сер. I.– 1970.– №2.– С. 42–44.

273. **Гиргель, С.С.** Симметрия и правила отбора для тензоров макроскопических свойств многоподрешеточных магнетиков / **С.С. Гиргель, А.Н. Сердюков** // Международная конференция "Пространственные группы симметрии и их современное развитие (к 100-летию вывода федоровских групп)", 14 – 18 мая 1991 г. Ленинград. СССР. Тезисы докладов.– М.– 1991.– С. 88.

274. **Санников, Д. Г.** О возможности фазового перехода с возникновением спонтанного тороидного момента в борацидах никеля / **Д. Г. Санников, И. С. Желудев** // ФТТ.– 1985.– Т.27, №5.– С. 1369–1372.

275. **Yamaguchi, T.** Magnetic symmetry of rare-earth orthoferrites / **T. Yamaguchi, K. Tsushima** // Phys. Rev. B.– 1973.– V.8, №11.– P. 5187–5198.

276. **Боровик-Романов, А. С.** Магнитное двуупреломление света в антиферромагнитных  $\text{MoCO}_3$ ,  $\text{CoCO}_3$ ,  $\text{CsMnF}_3$  / **А. С. Боровик-Романов** [и др.] // ЖЭТФ.– 1974.– Т.66, №2.– С. 782–791.

277. **Боровик-Романов, А. С.** Изучение высокочастотной ветви антиферромагнитного резонанса в  $\text{CsMnF}_3$  / **А. С. Боровик-Романов, Б. Д. Котюжанский, Л. А. Прозорова** // ЖЭТФ.– 1970.– Т.58, №6.– С. 1911–1918.

278. **Ахманов, С. А.** Проблемы нелинейной оптики / **С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов.**– М. : Изд-во ВИНТИ.– 1965.– 283 с.

279. **Pershan, P. S.** Nonlinear optical properties of solids: energy consideration / **P. S. Pershan** // Phys. Rev.–1963.–V.130, №3.– P. 919–929.

280. **Бломберген, Н.** Нелинейная оптика / **Н. Бломберген.** – М.: Мир. 1966.– 424 с.
281. **Шен, И. Р.** Принципы нелинейной оптики/ **И. Р. Шен.** – М.: Наука, 1989.– 558 с.
282. **Бокуть, Б. В.** Частотно–перестановочные соотношения для тензоров нелинейных оптических восприимчивостей / **Б. В. Бокуть, С. С. Гиргель** // Ковариантные методы в теоретической физике. Оптика и акустика: сб. научн. тр. / – Мн.: ИФ АН БССР.– 1991.– С. 60–63.
283. **Bloembergen, N.** Some remarks on the symmetry properties of non-linear optical susceptibilities / **N. Bloembergen** // Physics of the solid state. Ed. by Balakrishna S. et al.– London and New York: Academic Press.– 1969.– P. 277–287.
284. **Клышко, Д. Н.** Физические основы квантовой электроники / **Д. Н. Клышко.**– М.: Наука. 1986.– 293 с.
285. **Armstrong, J. A.** Interactions between light waves in a nonlinear dielectric / **J. A. Armstrong** [et al.] // Phys. Rev.– 1962.– V. 127, №6.– P. 1918–1939.
286. **Butcher, P. N.** The non-linear constitutive relation in solids at optical frequencies: II. / **P. N. Butcher, T. P. Mc Lean** // Proc. Phys. Soc.– 1964.– V. 83, №4.– P. 579–589.
287. **Ефремов, Г. Ф.** Соотношения симметрии для тензора кросс-восприимчивости / **Г. Ф. Ефремов** // ЖЭТФ.– 1966.– Т.51, №1.– С. 156–164.
288. **Chmela, P.** Relation of permutation symmetry of the tensor of nonlinear susceptibility to the conservation laws photon number in nonlinear quadratic nondissipative and partially dissipative media / **P. Chmela** // Czech. J. Phys.– 1973.– V.23, №7.– P. 719–729.
289. **Апанасевич, П. А.** Основы теории взаимодействия света с веществом / **П. А. Апанасевич.**– Мн.: Наука и техника, 1977.– 495 с.
290. **Ефремов, Г. Ф.** Соотношения симметрии для нелинейных восприимчивостей в средах с поглощением / **Г. Ф. Ефремов, М. А. Новиков** // Тезисы докладов XII Всесоюзной конференции по когерентной и нелинейной оптике. Часть II.– Москва. 26 - 29 августа 1985г.– М.:, 1985.– С. 803–804.
291. **Гиргель, С. С.** Свойства симметрии тензоров нелинейных оптических восприимчивостей анизотропных магнитных сред / **С. С. Гиргель, Т. В. Демидова** // Оптика анизотропных сред: междуведомственный сб. /– М.: МФТИ, 1987.– С. 53–55.
292. **Филиппов, Д. А.** Свойства симметрии нелинейных восприимчивостей диссипативной системы с центром инверсии / **Д. А. Филиппов** // Прикладные вопросы физики твердого тела.– Новгород, 1987.– Деп. в ВИНТИ.– № 8516-В 87.– С. 76–87.
293. **Kleinman, D. A.** Non-linear dielectric polarization in optical media / **D. A. Kleinman** // Phys. Rev.– 1962.– V. 126, №6.– P. 1977–1979.
294. **Писарев, Р. В.** Линейное и квадратичное по магнитному полю двупреломление света в  $\text{CoF}_2$  / **Р. В. Писарев, Б. Б. Кричевцов** // Письма в ЖЭТФ.– 1979.– Т.5, №5.– С. 312–316.
295. **Еременко, В. В.** Линейный магнитооптический эффект в тетрагональном антиферромагнитном гранате  $\text{Ca}_3\text{Mn}_2\text{Ge}_3\text{O}_{13}$  / **В. В. Еременко** [и др.] // Acta phys. pol.– 1985.– V.A68, №3.– P. 419–424.
296. **Гнатченко, С. Л.** Спонтанные фазовые переходы и оптическая анизотропия в марганец–германиевом гранате  $\text{Ca}_3\text{Mn}_2\text{Ge}_3\text{O}_{13}$  / **С. Л. Гнатченко** [и др.] // ЖЭТФ.– 1986.– Т.90, №1.– С. 179–191.
297. **Запасский, В. С.** Нечетные магнитооптические эффекты в кубических кристаллах в геометрии Фохта / **В. С. Запасский** // ФТТ.– 1977.– Т.19, №4.– С. 964–969.
298. **Гиргель, С. С.** Четный эффект Фарадея в магнитоупорядоченных кристаллах / **С. С. Гиргель** // Докл. АН БССР.– 1982.– Т.26, №10.– С. 890–892.
299. **Гиргель, С. С.** Четный по магнитному полю эффект Фарадея / **С. С. Гиргель** // Кристаллография.– 1994.– Т.39, №5, С. 918–919.
300. **Харченко, Н. Ф.** Квадратичное магнитное вращение плоскости поляризации света в антиферромагнетике  $\text{CoF}_2$  / **Н. Ф. Харченко, А. В. Бибик, В. В. Еременко** // Письма в ЖЭТФ.– 1985.– Т.42, № 11.– С. 447–449.

301. **Eremenko, V.V.** Quadratic magnetic rotation of the polarization plane of light in anti-ferromagnets / **V.V. Eremenko** [et al.] // Abst. Intern. Symp. Magneto-optics, Kyoto, 1987.– Kyoto, 1987.– P. 27–28.

302. **Харченко, Н. Ф.** Магнитный циркулярный дихроизм в антиферромагнитном фториде кобальта / **Н. Ф. Харченко** [и др.] // ЖЭТФ.– 1988.– Т.94, №5.– С. 340–349.

303. **Shtrikman, S.** Non-linearity of the susceptibility in weak ferromagnets and antiferromagnets / **S. Shtrikman, D. Treves** // Proc. Intern. Conf. on Magn. Nottingham.– 1964. P. 486–497.

304. **Gorodetsky, G.** Second-order susceptibility term in orthoferrites at room temperature / **G. Gorodetsky, D. Treves** // Phys. Rev.– 1964.– V.135, №1A.– P. A97–A101.

305. **Гиргель, С. С.** Магнитооптические свойства антиферромагнитного Ca-Mn-Ge граната: симметричные аспекты / **С. С. Гиргель, Л. Р. Рахунок** // Кристаллография.– 1997.– Т.42, №2, С. 309–312.

306. **Цернике, Ф.** Прикладная нелинейная оптика / **Ф. Цернике, Дж. Мидвинтер**.– М.: Мир, 1976.– 261 с.

307. **Тавгер, Б. А.** Симметрия пьезомагнетизма антиферромагнетиков / **Б. А. Тавгер** // Кристаллография.– 1958.– Т.3, №3.– С. 342–345.

308. **Запасский, В. С.** Методы высокочувствительных поляриметрических измерений / **В. С. Запасский** // Ж. прикл. спектр.– 1982.– Т.37, №2.– С. 181–196.

309. **Галактионова, Н. М.** О возможности создания сверхчувствительного лазерного измерителя искусственной анизотропии и фарадеевского вращения / **Н. М. Галактионова** [и др.] // Письма в ЖЭТФ.– 1973.– Т.18, №8.– С. 507–510.

310. **Бибик, А. В.** Перемагничивание нецентроантисимметричных антиферромагнитных кристаллов фторидов кобальта и железа / **А. В. Бибик, Н. Ф. Харченко, С. В. Петров** // ФНТ.– 1989.– Т.15, №12.– С. 1280–1289.

311. **Локтев, В. М.** Спиновая конфигурация и четный эффект Фарадея в  $\text{CoF}_2$  в поперечном магнитном поле / **В. М. Локтев, С. В. Островский** // Докл. АН УССР.– 1987.– №6.– С. 49–52.

312. **Локтев, В. М.** О природе четного эффекта Фарадея в  $\text{CoF}_2$  / **В. М. Локтев, В. С. Островский**.– Киев, 1986.– 7с.– (Препринт / АН УССР. ИТФ; №87 Р).

313. **Lines, M. E.** Magnetic properties of  $\text{CoF}_2$  / **M. E. Lines** // Phys. Rev.– 1965.– V.137A, №3.– P. 982–993.

314. **Бажан, А. Н.** Слабый ферромагнетизм в  $\text{CoF}_2$  и  $\text{NiF}_2$  / **А. Н. Бажан, Ч. Базан** // ЖЭТФ.– 1975.– Т.69, №5.– С. 1768–1780.

315. **Боровик-Романов А. С.** Пьезомагнетизм в антиферромагнитных фторидах кобальта и марганца / **А. С. Боровик-Романов** // ЖЭТФ.– 1960.– Т.38, №4.– С. 1088–1098.

316. **Шапиро, В. Г.** Ориентационная зависимость антиферромагнитного резонанса в  $\text{CoF}_2$  / **В. Г. Шапиро, В. И. Ожогин, К. Гуртовой** // Изв. АН СССР. Сер. физическая.– 1972.– Т.36, №7.– С. 1589–1561.

317. **Abe, M.** A method of measuring Faraday rotation and dichroism in orthoferrites / **M. Abe, T. Kimura and S. Nomura** // Jap. J. Appl. Phys.– 1975.– V. 14, №10.– P. 1507–1510.

318. **Четкин, М. В.** Влияние линейного дихроизма на эффект Фарадея в ортоферритах / **М. В. Четкин, Л. Д. Шевчук, Н. Н. Ермилова** // Кристаллография.– 1979.– Т.24, №2.– С. 386–389.

319. **Gorodetsky, G.** Linear effects of the magnetic field on the magnetic susceptibility in antiferromagnetic  $\text{DyFeO}_3$  / **G. Gorodetsky, B. Sharon and S. Shrikman** // Sol. St. Commun.– 1967.– V.5, №9.– P. 739–741.

320. **Влох, О. Г.** Магнитогирация. Симметричные аспекты и экспериментальное обнаружение / **О. Г. Влох** // УФЖ.– 1981.– Т.26, №10.– С. 1623–1626.

321. **Бокуть, Б. В.** Магнитогирация / **Б. В. Бокуть, С. С. Гиргель** // Докл. АН БССР. – 1983.– Т. 27, № 8.– С. 694–695.

322. **Ивченко, Е. Л.** Магнитоиндуцированная пространственная дисперсия кристаллов в экситонной области спектра / **Е. Л. Ивченко** [и др.] // Письма в ЖЭТФ.– 1983. – Т.37, №3.– С. 137–139..
323. **Влох, О. Г.** Магнитополяризационная псевдогирация / **О. Г. Влох, В. А. Сергатюк** // Докл. АН СССР.– 1986.– Т.291, №4.– С. 832–835.
324. **Ахмедиев, Н. Н.** Пространственная дисперсия и новые магнитооптические эффекты в магнитоупорядоченных кристаллах / **Н. Н. Ахмедиев, А. К. Звездин** // Письма в ЖЭТФ.– 1983.– Т.38, №4.– С. 167–169.
325. **Ascher, E.** Some properties of ferromagnetoelectric nickel–iodine boracite,  $\text{Ni}_3\text{B}_7\text{O}_{13}\text{I}$  / **E. Ascher** [et al.] // J. Appl. Phys.– 1966.– V.37, №3.– P. 1404–1405.
326. **Питаевский, Л. П.** Электрические силы в прозрачной среде с дисперсией / **Л. П. Питаевский** // ЖЭТФ.– 1960.– Т.39, №5.– С. 1450–1458.
327. **Pershan, P. S.** Theoretical discussion of the inverse Faraday effect, Raman scattering, and related phenomena / **P. S. Pershan, J. P. Van der Ziel, L. D. Malstrom** // Phys. Rev. – 1966.– V.143, №2. –P. 574–583.
328. **Генкин, Г. М.** Поперечное намагничивание ферромагнетика оптическим излучением / **Г. М. Генкин, И. Д. Токман** // ФТТ.– 1980.– Т.22, №4.– С. 1271–1274.
329. **Зон Б. А.** Обратный эффект Коттона-Мутона в магнитоупорядоченных кристаллах / **Б. А. Зон, В. Я. Купершмидт** // ФТТ.– 1983.– Т.25, №4.– С. 1231–1233.
330. **Зон, Б. А.** Антифотоферромагнитные явления в двухподрешеточных магнитных кристаллах / **Б. А. Зон, В. Я. Купершмидт** // ФТТ.– 1987.– Т.29, №10.– С. 3170–3172.
331. **Балбашов, А.М.** Светоиндуцированное измерение намагниченности монокристаллических  $\text{Vi}$ -содержащих пленок ферритов-гранатов / **Балбашов А.М.** [и др.] // ЖЭТФ.– 1988.– Т.94, №5.– С. 304 – 314.
332. **Бокуть, Б. В.** Намагничивание кристалла линейно поляризованным излучением / **Б. В. Бокуть, С. С. Гиргель** // Тезисы докладов XII Международной конференции по когерентной и нелинейной оптике. Минск, 6–9 сентября 1988. Ч. III.– Минск, 1988.– С. 144–145.
333. **Бокуть, Б. В.** Новые фотомагнитные явления намагничивания кристаллов поляризованным светом / **Б. В. Бокуть, С. С. Гиргель** // Тезисы XVIII Всесоюзной конференции по физике магнитных явлений. Калинин, 3–6 октября 1988.– Калинин, 1988.– С. 159–160.
334. **Portigal, D. L.** Magneto-spatial dispersion effects on the propagation of the electromagnetic radiation in crystals / **D. L. Portigal, E. Burstain** // J. Phys. and Chem. Solids.– 1971.– V.32, №3.– P. 603–608.
335. **Гоголин, А .С.** Магнитоиндуцированное двупреломление в кубических кристаллах / **А .С. Гоголин, В. А. Цветков, Е. Г. Цицишвили** // ЖЭТФ.– 1984.– Т.87, №3.– С. 1038–1045.
336. **Bloembergen, N.** Optical second harmonic generation in reflection from media with inversion symmetry / **N. Bloembergen** [et al.] // Phys. Rev.– 1968.– V.174, №3.– P. 813–822.
337. **Агранович, В. М.** К теории генерации второй гармоники при отражении света от сред с центром инверсии / **В. М. Агранович, С. А. Дарманян** // Письма в ЖЭТФ.– 1982.– Т.35, №2.– С. 68–70.
338. **Kielich, S.** DC magnetic field-induced second harmonic generation of laser beam / **S. Kielich and R. Zawodny** // Opt. Commun.– 1971.– V.4, №2.– P. 132–134.
339. **Kielich, S.** Linear and nonlinear magneto-optical effects in material with dispersion and magnetic ordering / **S. Kielich and R. Zawodny** // Physica. B+C.– 1977.– V.89.– P. 122–125.
340. **Келих, С.** Молекулярная нелинейная оптика / **С. Келих.** Пер. с польск.–М.: Наука, 1981.– 671 с.
341. **Ахмедиев, Н. Н.** Нелинейная оптическая восприимчивость магнитоупорядоченных кристаллов / **Н. Н. Ахмедиев** [и др.] // ФТТ.– 1985.– Т.27, №4.– С. 1075–1078.
342. **Есиков, Д. А.** Эффект Фарадея при генерации второй гармоники в гиротропной среде / **Д. А. Есиков.** – М.: МГУ.– 1988.– В 88. Деп. в ВИНТИ, № 4551.

343. **Агальцов, А. М.** Температурная зависимость второй оптической гармоники в сегнетомагнетике феррита висмута / **А. М. Агальцов** [и др.] // Краткие сообщ. по физ.– 1989.– №5.– С. 37–39.
344. **Акципетров, О. А.** Генерация второй гармоники в гиротропных средах: нелинейный эффект Фарадея в редкоземельных ферритах-гранатах / **О. А. Акципетров** [и др.] // Тезисы докладов XIII Междунар. конференции по когерентной и нелинейной оптике (Минск, 6–9 сентября 1988 г.). Часть II.– Мн.: 1988.–С. 142–143.
345. **Delfino, M.** Approximate nonlinear optical susceptibility of cubic borates / **M. Delfino, P. S. Gentile** // J. Appl. Phys.– 1980. – V.51, №4. – P. 2264–2266.
346. **Кизель, В. А.** Отражение света / **В. А. Кизель**.– М.: Наука, 1973.– 351 с.
347. **Федоров, Ф. И.** Отражение и преломление света прозрачными кристаллами / **Ф. И. Федоров, В. В. Филиппов**.– Мн.: Наука и техника, 1976.– 222 с.
348. **Горшков, М. М.** Эллипсометрия / **М. М. Горшков**.– М.: Сов. радио, 1974.– 200 с.
349. **Барковский, Л. М.** Параметрическое преобразование света в кристаллах / **Л. М. Барковский** // Кристаллография.– 1977.– Т.22. №1.– С. 21–26.
350. **Гончаренко, А. М.** Оптические свойства кристаллических пластинок / **А. М. Гончаренко, Ф. И. Федоров** // Опт. и спектр.– 1963.– Т. 14, №1.– С. 94–96.
351. **Хапалюк, А. П.** Прохождение света через анизотропную пластинку при нормальном падении / **А. П. Хапалюк** // Кристаллография.– 1962.– Т.7, №4.– С. 581–588.
352. **Барковский, Л. М.** К расчету световых поляризационных состояний в гироанизотропных кристаллах / **Л. М. Барковский** // Опт. и спектр.– 1979.– Т.46, №5.– С. 938–944.
353. **Константинова, А. Ф.** Распространение света в поглощающих активных кристаллах / **А. Ф. Константинова, Б. Н. Гречушников** // Кристаллография.– 1973.– Т.18, №3.– С. 470–473.
354. **Барковский, Л.М.** Спектральные разложения операторов показателей преломления в кристаллах / **Л.М. Барковский** // Ж. прикл. спектр.–1979.– Т.30. № I.– С. 113–123.
355. **Константинова, А. Ф.** Исследование ориентационной зависимости пропускания системы поляризатор - кристалл - анализатор / **А. Ф. Константинова** [и др.] // Кристаллография.– 1990.– Т.35, №2.– С. 429–432.
356. **Аваева, И. Г.** Ориентационная зависимость эффекта Фарадея в кубических магнитных кристаллах / **И. Г. Аваева, Ф. В. Лисовский, В. И. Шаповалов** // Микроэлектроника.– 1973.– Т.2, №4.– С. 337–343.
357. **Donovan, V.** The theory of Faraday effect an anisotropic semiconductors / **V. Donovan and J. Webster** // Proc. Phys. Soc.– 1962.– V.79, №1.– P. 46–57.
358. **Jastrzebski, L.** Influence of dichroism on Faraday rotation in  $YFeO_3$  / **L. Jastrzebski** // Phys. stat. sol(a).– 1974.– V.21, №1.– P. 57–68.
359. **Меланхолин, Н. М.** Методы исследования оптических свойств кристаллов / **Н. М. Меланхолин**. – М.: Наука, 1970.– 156 с.
360. **Грум-Гржимайло, С. В.** Приборы и методы для оптического исследования кристаллов / **С. В. Грум-Гржимайло**.– М.: Наука, 1972.– 127 с.
361. **Пахомов, А. Г.** Определение показателей преломления и коэффициентов поглощения одноосных кристаллов методом эллипсометрии / **А. Г. Пахомов, В. А. Яковлев, А. Ф. Константинова** // Журн. техн. физ.– 1981.– Т.51, №5.– С. 1013–1015.
362. **Bonnel, M. V.** Determiration des constantes optiques d'um cristal anisotrope biaxe transparent á partir de mesures en réflexion normale / **M. V. Bonnel** // C.R. Acad. Sci. Paris. – 1974.– В 278, №14.– P. 647 – 650.
363. **Emslie, A. G.** Determination of the complex dielectric tensor of triclinic crystals: theory / **A. G. Emslie, J. R. Aronson** // J. Opt. Soc. Amer.– 1983.– V.73, №7.– P. 916–919.
364. **Барковский, Л. М.** Обратная задача отражения для магнитоэлектрических и оптически активных кристаллов средних сингоний / **Л. М. Барковский, Фо Тхи Нгуен Ханг** // Вестник БГУ. Сер. I.– 1988.– №1. –С. 5–8.

365. **Azzam, R. M. A.** A simple Fourier photopolarimeter with polarizer and analyzer for measuring Jones and Mueller matrices / **R. M. A. Azzam** // *Opt. Commun.*– 1978.– V.25, №2.– P. 137–140.
366. **Azzam, R. M. A.** Perpendicular-incidence photometric ellipsometry (pipe) of surfaces with arbitrary anisotropy / **R. M. A. Azzam** // *J. Opt. (Paris)*.– 1981.– V.12, №5.– P. 317–321.
367. **Azzam, R. M. A.** Measurement of the ratio of complex principal reflection coefficients of optically isotropic and anisotropic surfaces using birefringence-modulation return-path ellipsometry / **R. M. A. Azzam** // *Optik*.– 1981.– V. 58, №4.– P. 251–257.
368. **Беннет, Х. Е.** Измерение абсолютного значения фазы при измерениях отражения / **Х. Е. Беннет, Дж. М. Беннет** // *Физика магнитных пленок*.– Т.4.– М.: Мир, 1970.– С. 107-122.
369. **Белл, Р. Дж.** Введение в Фурье-спектроскопию / **Р. Дж. Белл**. – М.: Мир, 1975.– 380 с.
370. **Альперович, Л. А.** Определение оптических постоянных веществ в широкой спектральной области / **Л. А. Альперович**.– Душанбе: Дониш.– 1979.– 146 с.
371. **Furua, K.** Superconvergent sum rules for the normal reflectivity / **K. Furua, A. Villani, A. H. Zimmerman** // *J. Phys. C*.– 1977.– V.10, №16.– P. 3189 – 3198.
372. **King, F. W.** Dispersion relation and sum rules for the normal reflectance of conductors and insulators / **F. W. King** // *J. Chem. Phys.*– 1979.– V. 71, №11.– P. 4726–4738.
373. **Клейнбок, В. Е.** Таблицы для определения показателей преломления и поглощения непрозрачных минералов по их отражательной способности / **В. Е. Клейнбок, Н. И. Шумская**.– Л.: Недра.– 1973.– 158 с.
374. **Вяльсов, А. Н.** Оптические методы диагностики рудных минералов / **А. Н. Вяльсов**.– М.: Недра, 1976.– 200 с.
375. **Лисовский, Ф. В.** Магнитооптический модулятор со скрещенными управляющим и подмагничивающим полями / **Ф. В. Лисовский, О. С. Маркелова** // *Радиотехника и электроника*.– 1975.– Т.20, №8.– С. 1651–1655.
376. **Константинова, А. Ф.** Интерференция света в двупреломляющих кристаллах, обладающих оптической активностью и поглощением / **А. Ф. Константинова, А. И. Окорочков, Е. М. Урюкин** // *Кристаллография*.– 1982.– Т.27, №5.– С. 1002–1004.
377. **Бокуть, Б. В.** Поглощающий гиротропный кристалл в системе произвольно ориентированных эллиптических поляризаторов / **Б. В. Бокуть, Г. С. Митюрин, В. В. Шепелевич** // *Кристаллография*.– 1985.– Т.30, №3.– С. 431–436.
378. **Мелищук, И. С.** Высокочастотные фарадеевские модуляторы на феррогранатах / **И. С. Мелищук и В. Д. Тронько** // *Опт. и спектр*.– 1976.– Т.41, №3.– С. 475–481.
379. **Holmes, D. A.** Exact theory of retardation plates / **D. A. Holmes** // *J. Opt. Soc. Amer.*– 1961.– V.54, №9.– P. 1115–1120.
380. **Семин, Г. С.** Использование векторной параметризации матриц Мюллера для анализа работы оптических поляризационных устройств / **Г. С. Семин** // *Оптика анизотропных сред: междуведомственный сб.* /– М.: МФТИ, 1983.– С. 130–142.
381. **Спорик, В. В.** Прохождение светового излучения через оптически активную среду, обладающую двупреломлением / **В. В. Спорик, В. Д. Тронько, В. И. Цимбаревич** // *ФТТ*.– 1974.– Т.16, №5.– С. 1517–1519.
382. **Свиташев, К. К.** Общее выражение для интенсивности рабочего светового пучка на выходе идеального эллипсометра / **К. К. Свиташев и Е. С. Филатова** // *Опт. и спектр*.– 1976.– Т. 40, №6.– С. 1064–1068.
383. **Семененко, А. И.** Эллипсометрия анизотропных сред / **А. И. Семененко, Ф. С. Миронов** // *ФТТ*.– 1976.– Т.18, №11.– С. 3511–3513.
384. **Aizu, K.** Possible species of ferromagnetic, ferroelectric, and ferroelastic crystals / **K. Aizu** // *Phys. Rev. B*.– 1970.– V. 2.– P. 754–772.

**ПРИЛОЖЕНИЕ А**  
**МАТРИЦЫ ПСЕВДОТЕНЗОРОВ ЧЕТВЕРТОГО РАНГА,**  
**СИММЕТРИЧНЫХ ПО ДВУМ ИНДЕКСАМ**  
**(справочное)**

Приведены матрицы псевдотензоров 4 ранга, симметричных по паре индексов ( $\alpha_{(i,j)rs} = \alpha_{(j,i)rs}$ ) для точечных классов немагнитных групп. В остальных классах все компоненты тождественно равны нулю. Для удобства матрицы некоторых классов приведены для различных ориентаций координатных осей. В скобках указаны также общее число ненулевых компонент и число независимых инвариантов.

Переход от тензорных  $\alpha_{(i,j)rs}$  ( $i, j, r, s = 1, 2, 3, 4$ ) обозначений к сокращенным матричным  $\alpha_{\rho, \mu}$  осуществляется по следующим правилам. Пара индексов  $rs$  заменяется одним индексом  $\mu$  по рецепту: 11→1, 22→2, 33→3, 23→4, 13→5, 12→6, 32→7, 31→8, 21→9. Сокращения же пар симметричных индексов  $(i, j) \rightarrow \rho$  стандартные: 11→1, 22→2, 33→3, 23→4, 32→4, 13→5, 31→5, 12→6, 21→6.

Вместо компонент  $\alpha_{\rho\mu}$  выписаны просто их индексы  $\rho\mu$ . Для компактности используются также следующие сокращения: 66\*=(11-12)/2; 61\*=(26-16)/2.

1.  $C_1 = I$  (84; 54)

$$\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 \\ 32 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 39 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 & 49 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 & 57 & 58 & 59 \\ 61 & 62 & 63 & 64 & 65 & 66 & 67 & 68 & 69 \end{bmatrix}$$

2.  $C_2 = 2_z$  (41; 28)

$$\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 19 \\ 21 & 22 & 23 & 0 & 0 & 26 & 0 & 0 & 29 \\ 31 & 32 & 33 & 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & 39 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 45 & 0 & 47 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 54 & 55 & 0 & 57 & 58 & 0 \\ 61 & 62 & 63 & 0 & 0 & 66 & 0 & 0 & 69 \end{bmatrix}$$

3.  $C_s = m_z$  (40; 26)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 14 & 15 & 0 & 17 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 25 & 0 & 27 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 34 & 35 & 0 & 37 & 38 & 0 \\ 41 & 42 & 43 & 0 & 0 & 46 & 0 & 0 & 49 \\ 51 & 52 & 53 & 0 & 0 & 56 & 0 & 0 & 59 \\ 0 & 0 & 0 & 64 & 65 & 0 & 67 & 68 & 0 \end{bmatrix}$$

4.  $D_2 = 222$  (21; 15)

$$\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21 & 22 & 23 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 31 & 32 & 33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 0 & 0 & 47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 55 & 0 & 0 & 58 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 66 & 0 & 0 & 69 \end{bmatrix}$$

5.  $C_{2v} = 2_z mm$  (20; 13)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & 39 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 45 & 0 & 0 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 0 & 57 & 0 & 0 \\ 61 & 62 & 63 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5a.  $C_{2v} = 2_y mm$  (20; 13)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 35 & 0 & 0 & 38 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 46 & 0 & 0 & 49 \\ 51 & 52 & 53 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 64 & 0 & 0 & 67 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6.  $C_4 = 4$  (39; 14)

$$\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & -26 \\ 12 & 11 & 13 & 0 & 0 & 26 & 0 & 0 & -16 \\ 31 & 31 & 33 & 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 45 & 0 & 47 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -45 & 44 & 0 & -48 & 47 & 0 \\ 61 & -61 & 0 & 0 & 0 & 66 & 0 & 0 & 66 \end{bmatrix}$$

7.  $S_4 = \overline{4_z}$  (40; 14)

$$\begin{bmatrix} 11 & -21 & 13 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 19 \\ 21 & -11 & -13 & 0 & 0 & 19 & 0 & 0 & 16 \\ 31 & -31 & 0 & 0 & 0 & 39 & 0 & 0 & 39 \\ 0 & 0 & 0 & -55 & 54 & 0 & -58 & 57 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 54 & 55 & 0 & 57 & 58 & 0 \\ 61 & 61 & 63 & 0 & 0 & 66 & 0 & 0 & -66 \end{bmatrix}$$

8.  $D_4 = 422$  (21; 8)

$$\begin{bmatrix} 11 & 21 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21 & 11 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 31 & 31 & 33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 0 & 0 & 47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 44 & 0 & 0 & 47 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 66 & 0 & 0 & 66 \end{bmatrix}$$

9.  $C_{4v} = 4mm$  (18; 6)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 45 & 0 & 0 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -45 & 0 & 0 & -48 & 0 & 0 \\ 61 & -61 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

10.  $D_{2d} = \overline{4_2} m_d$  (20; 7)

$$\begin{bmatrix} 11 & -21 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21 & -11 & -13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 31 & -31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 0 & 0 & -58 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -44 & 0 & 0 & 58 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 66 & 0 & 0 & -66 \end{bmatrix}$$

10a.  $D_{2d} = \overline{4_2} m_x$  (20; 7)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 45 & 0 & 0 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 45 & 0 & 0 & 48 & 0 & 0 \\ 61 & 61 & 63 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

11.  $C_3 = 3$  (71; 18)

$$\begin{bmatrix} 11 & 21 & 13 & 14 & -64 & 16 & 17 & -67 & -26 \\ 21 & 11 & 13 & -14 & 64 & 26 & -17 & 67 & -16 \\ 31 & 31 & 33 & 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & -36 \\ 41 & -41 & 0 & 44 & -54 & 52 & 47 & -57 & 52 \\ -52 & 52 & 0 & 54 & 44 & 41 & 57 & 47 & 41 \\ 6\bar{1} & -6\bar{1} & 0 & 64 & 14 & 66^* & 67 & 17 & 66^* \end{bmatrix}$$

12.  $D_3 = 32_y 2$  (37; 10)

$$\begin{bmatrix} 11 & 21 & 13 & 0 & -25 & 0 & 0 & -25 & 0 \\ 21 & 11 & 13 & 0 & 25 & 0 & 0 & 25 & 0 \\ 31 & 31 & 33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 0 & -51 & 47 & 0 & -51 \\ 51 & -51 & 0 & 0 & 44 & 0 & 0 & 47 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & 0 & 66^* & 25 & 0 & 66^* \end{bmatrix}$$

12a.  $D_3 = 32_x 2$  (37; 10)

$$\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 \\ 12 & 11 & 13 & -14 & 0 & 0 & -17 & 0 & 0 \\ 31 & 31 & 33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 41 & -41 & 0 & 44 & 0 & 0 & 47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 44 & 41 & 0 & 47 & 41 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 66 & 0 & 17 & 66 \end{bmatrix}$$

13.  $C_{3v} = 3m_y m$  (34; 8)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 14 & 0 & 16 & 17 & 0 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & 0 & 26 & -17 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & -36 \\ 41 & -41 & 0 & 0 & 45 & 0 & 0 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -45 & 0 & 41 & -48 & 0 & 41 \\ 6\bar{1} & -6\bar{1} & 0 & 0 & 14 & 0 & 0 & 17 & 0 \end{bmatrix}$$

13a.  $C_{3v} = 3m_x$  (34; 8)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -25 & 16 & 0 & -28 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25 & 26 & 0 & 28 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -54 & 46 & 0 & -57 & 46 \\ -46 & 46 & 0 & 54 & 0 & 0 & 57 & 0 & 0 \\ 6\bar{1} & -6\bar{1} & 0 & 25 & 0 & 0 & 28 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

14.  $C_6 = 6$  (39; 12)

$$\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & -26 \\ 12 & 11 & 13 & 0 & 0 & 26 & 0 & 0 & -16 \\ 31 & 31 & 33 & 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 45 & 0 & 47 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -45 & 44 & 0 & -48 & 47 & 0 \\ 6\bar{1} & -6\bar{1} & 0 & 0 & 0 & 66^* & 0 & 0 & 66^* \end{bmatrix}$$

15.  $C_{3h} = \bar{6}$  (32; 6)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 14 & 15 & 0 & 17 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & -15 & 0 & -17 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 41 & -41 & 0 & 0 & 0 & -51 & 0 & 0 & -51 \\ 51 & -51 & 0 & 0 & 0 & 41 & 0 & 0 & 41 \\ 0 & 0 & 0 & -15 & 14 & 0 & -18 & 17 & 0 \end{bmatrix}$$

16.  $D_6 = 622$  (21; 7)

$$\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 11 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 31 & 31 & 33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 0 & 0 & 47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 44 & 0 & 0 & 47 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 66^* & 0 & 0 & 66^* \end{bmatrix}$$

17.  $C_{6v} = 6mm$  (18; 5)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 45 & 0 & 0 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -45 & 0 & 0 & -48 & 0 & 0 \\ 6\bar{1} & -6\bar{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

18.  $D_{3h} = \bar{6}2m_x$  (16; 3)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -64 & 0 & 0 & -67 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 64 & 0 & 0 & 67 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 52 & 0 & 0 & 52 \\ -52 & 52 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 64 & 0 & 0 & 67 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

18a.  $D_{3h} = \bar{6}2_x m$  (16; 3)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 14 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & 0 & 0 & 14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 41 & -41 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 41 & 0 & 0 & 41 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 0 & 0 & 17 & 0 \end{bmatrix}$$

19.  $T = 23$  (21; 5)

$$\begin{bmatrix} 11 & 31 & 21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21 & 11 & 31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 31 & 21 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 0 & 0 & 47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 47 & 0 & 0 & 44 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 44 & 0 & 0 & 47 \end{bmatrix}$$

20.  $O = 432$  (21; 3)

$$\begin{bmatrix} 11 & 21 & 21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21 & 11 & 21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21 & 21 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 0 & 0 & 44 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 44 & 0 & 0 & 44 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 44 & 0 & 0 & 44 \end{bmatrix}$$

21.  $T_d = \bar{4}3m$  (18; 2)

$$\begin{bmatrix} 0 & -21 & 21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21 & 0 & -21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -21 & 21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 0 & 0 & -44 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -44 & 0 & 0 & 44 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 44 & 0 & 0 & -44 \end{bmatrix}$$

**ПРИЛОЖЕНИЕ Б**  
**МАТРИЦЫ ПСЕВДОТЕНЗОРОВ**  
**ЧЕТВЕРТОГО РАНГА ОБЩЕГО ВИДА**  
**(справочное)**

В матрицах приняты следующие сокращения пар индексов:  $11 \rightarrow 1$ ,  $22 \rightarrow 2$ ,  $33 \rightarrow 3$ ,  $23 \rightarrow 4$ ,  $13 \rightarrow 5$ ,  $12 \rightarrow 6$ ,  $32 \rightarrow 7$ ,  $31 \rightarrow 8$ ,  $21 \rightarrow 9$ . Вместо компонент  $\alpha_{\rho\mu}$  выписаны их индексы  $\rho\mu$ , каждое из которых принимает значения  $1, 2, \dots, 9$ . Для компактности используются также сокращения:  $11^* = 21 + 69 + 99$ ;  $61^* = 26 + 62 + 92$ .

1.  $C_1 = I$  (81; 81)

11	12	13	14	15	16	17	18	19
21	22	23	24	25	26	27	28	29
31	32	33	34	35	36	37	38	39
41	42	43	44	45	46	47	48	49
51	52	53	54	55	56	57	58	59
61	62	63	64	65	66	67	68	69
71	72	73	74	75	76	77	78	79
81	82	83	84	85	86	87	88	89
91	92	93	94	95	96	97	98	99

2.  $C_2 = 2_z$  (41; 41)

11	12	13	0	0	16	0	0	19
21	22	23	0	0	26	0	0	29
31	32	33	0	0	36	0	0	39
0	0	0	44	45	0	47	48	0
0	0	0	54	55	0	57	58	0
61	62	63	0	0	66	0	0	69
0	0	0	74	75	0	77	78	0
0	0	0	84	85	0	87	88	0
91	92	93	0	0	96	0	0	99

3.  $C_s = m_z$  (40; 40)

0	0	0	14	15	0	17	18	0
0	0	0	24	25	0	27	28	0
0	0	0	34	35	0	37	38	0
41	42	43	0	0	46	0	0	49
51	52	53	0	0	56	0	0	59
0	0	0	64	65	0	67	68	0
71	72	73	0	0	76	0	0	79
81	82	83	0	0	86	0	0	89
0	0	0	94	95	0	97	98	0

4.  $D_2 = 222$  (21; 21)

11	12	13	0	0	0	0	0	0
21	22	23	0	0	0	0	0	0
31	32	33	0	0	0	0	0	0
0	0	0	44	0	0	47	0	0
0	0	0	0	55	0	0	58	0
0	0	0	0	0	66	0	0	69
0	0	0	74	0	0	77	0	0
0	0	0	0	85	0	0	88	0
0	0	0	0	0	96	0	0	99

5.  $C_{2v} = mm2_z$  (20; 20)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & 39 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 45 & 0 & 0 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 0 & 57 & 0 & 0 \\ 61 & 62 & 63 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 75 & 0 & 0 & 78 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 84 & 0 & 0 & 87 & 0 & 0 \\ 91 & 92 & 93 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6.  $C_4 = 4$  (41; 21)

$$\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & -26 \\ 12 & 11 & 13 & 0 & 0 & 26 & 0 & 0 & -16 \\ 31 & 31 & 33 & 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 45 & 0 & 47 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -45 & 44 & 0 & -48 & 47 & 0 \\ 61 & -91 & 63 & 0 & 0 & 66 & 0 & 0 & 69 \\ 0 & 0 & 0 & 74 & 75 & 0 & 77 & 78 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -75 & 74 & 0 & -78 & 77 & 0 \\ 91 & -61 & -63 & 0 & 0 & 69 & 0 & 0 & 66 \end{bmatrix}$$

7.  $S_4 = \bar{4}$  (40; 20)

$$\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 19 \\ -12 & -11 & -13 & 0 & 0 & 19 & 0 & 0 & 16 \\ 31 & -31 & 0 & 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 45 & 0 & 47 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 45 & -44 & 0 & 48 & -47 & 0 \\ 61 & 62 & 63 & 0 & 0 & 66 & 0 & 0 & 69 \\ 0 & 0 & 0 & 74 & 75 & 0 & 77 & 78 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 75 & -74 & 0 & 78 & -77 & 0 \\ 62 & 61 & 63 & 0 & 0 & -69 & 0 & 0 & -66 \end{bmatrix}$$

8.  $D_4 = 422$  (20; 11)

$$\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 11 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 31 & 31 & 33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 0 & 0 & 47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 44 & 0 & 0 & 47 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 66 & 0 & 0 & 69 \\ 0 & 0 & 0 & 74 & 0 & 0 & 77 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 74 & 0 & 0 & 77 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 69 & 0 & 0 & 66 \end{bmatrix}$$

9.  $C_{4v} = 4mm$  (20; 10)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -19 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 45 & 0 & 0 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -45 & 0 & 0 & -48 & 0 & 0 \\ 61 & 62 & 63 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 75 & 0 & 0 & 78 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -75 & 0 & 0 & -78 & 0 & 0 \\ -62 & -61 & -63 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

10.  $D_{2d} = \bar{4}2_xm$  (20; 10)

$$\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -13 & -11 & -13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 31 & -31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 0 & 0 & 47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -44 & 0 & 0 & -47 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -99 & 0 & 0 & 69 \\ 0 & 0 & 0 & 74 & 0 & 0 & 77 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -74 & 0 & 0 & -77 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -69 & 0 & 0 & 99 \end{bmatrix}$$

11.  $C_3 = 3$  (73; 27)

$$\begin{bmatrix} 1\ddagger & 12 & 13 & 14 & -25 & 1\ddagger & 17 & -28 & 19 \\ 12 & 1\ddagger & 13 & -14 & 25 & -19 & -17 & 28 & -1\ddagger \\ 31 & 31 & 33 & 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & -36 \\ 41 & -41 & 0 & 44 & -54 & 52 & 47 & 48 & 52 \\ -52 & 52 & 0 & 54 & 44 & 41 & -48 & 47 & 41 \\ 61 & -91 & 63 & 25 & 14 & 66 & 28 & 17 & 69 \\ 71 & -71 & 0 & 74 & 75 & 82 & 77 & 78 & 82 \\ -82 & 82 & 0 & -75 & 74 & 71 & -78 & 77 & 71 \\ 91 & -61 & -63 & 25 & 14 & 69 & 28 & 17 & 66 \end{bmatrix}$$

12.  $D_3 = 32_y$  (37; 14)

$$\begin{bmatrix} 1\ddagger & 12 & 13 & 0 & -25 & 0 & 0 & -28 & 0 \\ 12 & 1\ddagger & 13 & 0 & 25 & 0 & 0 & 28 & 0 \\ 31 & 31 & 33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 0 & 46 & 47 & 0 & 46 \\ -46 & 46 & 0 & 0 & 44 & 0 & 0 & 47 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & 0 & 66 & 28 & 0 & 69 \\ 0 & 0 & 0 & 74 & 0 & 76 & 77 & 0 & 76 \\ -76 & 76 & 0 & 0 & 74 & 0 & 0 & 77 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & 0 & 69 & 28 & 0 & 66 \end{bmatrix}$$

12a.  $D_3 = 32_x$  (37; 14)

$$\begin{bmatrix} 1\ddagger & 12 & 13 & 14 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 \\ 12 & 1\ddagger & 13 & -14 & 0 & 0 & -17 & 0 & 0 \\ 31 & 31 & 33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 41 & -41 & 0 & 44 & 0 & 0 & 47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 44 & 41 & 0 & 47 & 41 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 66 & 0 & 17 & 69 \\ 71 & -71 & 0 & 74 & 0 & 0 & 77 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 74 & 71 & 0 & 77 & 71 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 69 & 0 & 17 & 66 \end{bmatrix}$$

13.  $C_{3v} = 3m_y$  (36; 13)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 14 & 0 & 1\ddagger & 17 & 0 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & 0 & 27 & -17 & 0 & -1\ddagger \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & -36 \\ 41 & -41 & 0 & 0 & 45 & 0 & 0 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -45 & 0 & 41 & -48 & 0 & 41 \\ 61 & -81 & 63 & 0 & 14 & 0 & 0 & 17 & 0 \\ 71 & -71 & 0 & 0 & 75 & 0 & 0 & 78 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -75 & 0 & 71 & -78 & 0 & 71 \\ 81 & -61 & -63 & 0 & 14 & 0 & 0 & 17 & 0 \end{bmatrix}$$

13a.  $C_{3v} = 3m_y$  (36; 13)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -25 & 1\ddagger & 0 & -28 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25 & -19 & 0 & 28 & -1\ddagger \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -54 & 46 & 0 & -57 & 46 \\ -46 & 46 & 0 & 54 & 0 & 0 & 57 & 0 & 0 \\ 61 & 62 & 63 & 25 & 0 & 0 & 28 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -84 & 76 & 0 & -87 & 76 \\ -76 & 76 & 0 & 84 & 0 & 87 & 87 & 0 & 0 \\ -62 & -61 & -63 & 25 & 0 & 0 & 28 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

14.  $C_6 = 6$  (41; 19)

$$\begin{bmatrix} 1\ddagger & 12 & 13 & 0 & 0 & 1\ddagger & 0 & 0 & -26 \\ 12 & 1\ddagger & 13 & 0 & 0 & 26 & 0 & 0 & -1\ddagger \\ 31 & 31 & 33 & 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 45 & 0 & 47 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -45 & 44 & 0 & -48 & 47 & 0 \\ 61 & -81 & 63 & 0 & 0 & 66 & 0 & 0 & 69 \\ 0 & 0 & 0 & 74 & 75 & 0 & 77 & 78 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -75 & 74 & 0 & -78 & 77 & 0 \\ 81 & -61 & -63 & 0 & 0 & 69 & 0 & 0 & 66 \end{bmatrix}$$

$$15. C_{3h} = \bar{6} \quad (32; 8)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 14 & -25 & 0 & 17 & -28 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & 25 & 0 & -17 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 41 & -41 & 0 & 0 & 0 & 46 & 0 & 0 & 46 \\ -46 & 46 & 0 & 0 & 0 & 41 & 0 & 0 & 41 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & 24 & 0 & 28 & 17 & 0 \\ 71 & -71 & 0 & 0 & 0 & 82 & 0 & 0 & 82 \\ -82 & 82 & 0 & 0 & 0 & 71 & 0 & 0 & 71 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & 14 & 0 & 28 & 17 & 0 \end{bmatrix}$$

$$16. D_6 = \mathbf{622} \quad (21; 10)$$

$$\begin{bmatrix} 11^* & 12 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 11^* & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 31 & 31 & 33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 0 & 0 & 47 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 44 & 0 & 0 & 47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 66 & 0 & 0 & 69 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 74 & 0 & 0 & 77 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 74 & 0 & 0 & 77 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 69 & 0 & 0 & 66 & 0 \end{bmatrix}$$

$$17. C_{6v} = \mathbf{6mm} \quad (20; 9)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16^* & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -19 & 0 & 0 & -16^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -54 & 0 & 0 & -57 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 0 & 57 & 0 & 0 \\ 61 & 62 & 63 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -84 & 0 & 0 & -87 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 84 & 0 & 0 & 87 & 0 & 0 \\ -62 & -61 & -63 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$18. D_{3h} = \bar{6}2_y m \quad (16; 4)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -25 & 0 & 0 & -28 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 52 & 0 & 0 & 52 \\ -52 & 52 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 28 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 76 & 0 & 0 & 76 \\ -76 & 76 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 28 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$18a. D_{3h} = \bar{6}2_x m \quad (16; 4)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 14 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & 0 & 0 & -17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 41 & -41 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 41 & 0 & 0 & 41 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 0 & 0 & 17 & 0 \\ 71 & -71 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 71 & 0 & 0 & 71 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 0 & 0 & 17 & 0 \end{bmatrix}$$

$$19. T = \mathbf{23} \quad (21; 7)$$

$$\begin{bmatrix} 11 & 12 & 21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21 & 11 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 21 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 0 & 0 & 47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 55 & 0 & 0 & 58 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 44 & 0 & 0 & 47 \\ 0 & 0 & 0 & 58 & 0 & 0 & 55 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 47 & 0 & 0 & 44 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 58 & 0 & 0 & 55 \end{bmatrix}$$

20.  $O = 432$  (21; 4)

$$\begin{bmatrix} 11 & 12 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 11 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 12 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 0 & 0 & 47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 44 & 0 & 0 & 47 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 44 & 0 & 0 & 47 \\ 0 & 0 & 0 & 47 & 0 & 0 & 44 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 47 & 0 & 0 & 44 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 47 & 0 & 0 & 44 \end{bmatrix}$$

21.  $T_d = \bar{4}3m$  (18; 3)

$$\begin{bmatrix} 0 & 12 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -55 & 0 & 0 & 47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 55 & 0 & 0 & -47 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -55 & 0 & 0 & 47 \\ 0 & 0 & 0 & -47 & 0 & 0 & 55 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 47 & 0 & 0 & -55 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -47 & 0 & 0 & 55 \end{bmatrix}$$

**Научное издание**

**Гиргель Сергей Сергеевич**

**ОСНОВЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ КРИСТАЛЛООПТИКИ  
МАГНИТОУПОРЯДОЧЕННЫХ СРЕД**

**МОНОГРАФИЯ**

В авторской редакции

Лицензия № 02330/0133208 от 30.04.04.  
Подписано в печать 19.02.08. Формат 60x84 1/16.  
Бумага писчая №1. Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 11,62  
Уч.-изд. л. 12,5. Тираж 100 экз. Заказ № 45.

Отпечатано с оригинала-макета на ризографе  
учреждения образования  
«Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины»  
Лицензия № 02330/0056611 от 16.02.04.  
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104