где G_{xy} – проекция Ω на плоскость Oxy; знак "+" берется в случае, если $\gamma < \dfrac{\pi}{2}$ и "–", если $\gamma > \dfrac{\pi}{2}$ (γ угол между вектором $\vec{n}$ и положительным направлением оси Oz);

$$\iint\limits_{\Omega} R(x,y,z)\,dydz = \pm\iint\limits_{G_{yz}} R\big(x(y,z),y,z\big)\,dydz,$$

где G_{yz} – проекция Ω на плоскость Oyz; знак "+" берется в случае, если $\alpha < \dfrac{\pi}{2}$ и "–", если $\alpha > \dfrac{\pi}{2}$ (α угол между вектором $\vec{n}$ и положительным направлением оси Ox);

$$\iint\limits_{\Omega} R(x,y,z)\,dzdx = \pm\iint\limits_{G_{xz}} R\big(x,y(x,z),z\big)\,dzdx,$$

где G_{xz} – проекция G на плоскость Oxz; знак "+" берется в случае, если $\beta < \dfrac{\pi}{2}$ и "–", если $\beta > \dfrac{\pi}{2}$ (β угол между вектором $\vec{n}$ и положительным направлением оси Oy).

Тогда

$$\iint\limits_{\Omega} Pdxdz + Qdzdx + Rdxdy = \pm\iint\limits_{G_{yz}} Pdydz \pm \iint\limits_{G_{xz}} Qdzdx \pm \iint\limits_{G_{xy}} Rdxdy$$

13.4 Связь между поверхностными интегралами 1-го и 2-го рода

Общий поверхностный интеграл 2-го рода и поверхностный интеграл 1-го рода связаны соотношением:

$$\iint\limits_{\Omega} Pdydz + Qdzdx + Rdxdz = \iint\limits_{\Omega} \big(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\big)\,dS,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ координаты единичного вектора $\vec{n}$ нормали к поверхности Ω.

Координаты вектора $\vec{n}$ определяются заданием поверхности Ω (таблица 3. 2).

Тема 2 Криволинейные интегралы 2-го рода

2.1 Задача о работе переменой силы

Пусть материальная точка под действием переменной силы $\vec{F}$ перемещается в плоскости Oxy вдоль некоторой кривой AB от точки A до точки B. Требуется найти работу силы $\vec{F}$.

Разобьем дугу AB точками $A = M_0 < M_1 < \ldots < M_n = B$, на n частичных дуг l_1, l_2, …, l_n, длины которых равны Δl_1, Δl_2, …, Δl_n (рисунок 3. 4).

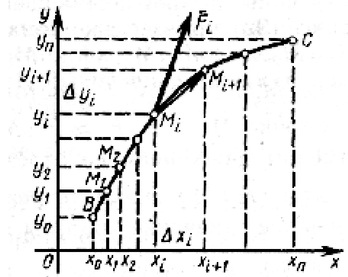

Рисунок 3.4 – Действие переменной силы $\vec{F}$ вдоль кривой AB

В виду малости дуги l_i, будем считать:

1) вектор силы перемещения $\vec{F}$ сохраняет на дуге $l_i = \overset{\cup}{M_{i-1}M_i}$ постоянное значение $\vec{F}_i = \vec{F}\big(P(\xi_i;\eta_i);Q(\xi_i;\eta_i)\big)$, где $C_i(\xi_i;\eta_i)$ – произвольная точка дуги l_i, $P(\xi_i;\eta_i)$ и $Q(\xi_i;\eta_i)$ – проекции вектора $\vec{F}_i$ на оси Ox и Oy;

2) дуга $l_i = \overset{\cup}{M_{i-1}M_i}$ может быть заменена вектором $\overline{M_{i-1}M_i} = (\Delta x_i;\Delta y_i)$, где Δx_i Δy_i – проекции вектора $\overline{M_{i-1}M_i}$ на оси, $i = 1,2,\ldots,n$.

Тогда работа A силы $\vec{F}$ на элементе дуги $l_i = \overset{\cup}{M_{i-1}M_i}$ приблизительно равна скалярному произведению векторов $\vec{F_i}$ и $\overline{M_{i-1}M_i}$, т. е. $A_i \approx \vec{F_i} \cdot \overline{M_{i-1}M_i}$ или в координатной форме

$$A_i \approx P(\xi_i;\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i;\eta_i)\Delta y_i .$$

Работа A силы $\vec{F}$ вдоль всей дуги AB

$$A_n = \sum_{i-1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i;\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i;\eta_i)\Delta y_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i;\eta_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i;\eta_i)\Delta y_i .$$

Обозначим наибольшую из длин Δl_1, Δl_2, …, Δl_n как $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta l_i$. Значение A_n тем точнее, чем меньше длина каждой части l_1, l_2, …, l_n. Поэтому точным значением работы A силы $\vec{F}$ всей дуги AB можно считать

$$A = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i;\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i;\eta_i)\Delta y_i .$$

2.2 Определение и свойства криволинейного интеграла 2-го рода

Пусть в плоскости Oxy задана непрерывная кривая AB. И пусть функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ определены в каждой точке кривой AB. Разобьем дугу AB точками $A = M_0 < M_1 < \ldots < M_n = B$ в направлении от точки A к точке B на n частичных дуг l_1, l_2, …, l_n, длины которых равны Δl_1, Δl_2, …, Δl_n. Выберем на каждой частичной дуге $l_k = \overset{\cup}{M_{k-1}M_k}$, $k = 1,2,\ldots,n$, точку $C_k(\xi_k;\eta_k)$. Проекциями дуги $l_k = \overset{\cup}{M_{k-1}M_k}$ на оси Ox и Oy являются Δx_k и Δy_k (рисунок 3. 5).

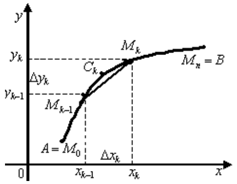

Рисунок 3. 5 – Разбиение кривой AB

роне поверхности Ω, то функция $\alpha \cdot P_1(x;y;z) \pm \beta \cdot P_2(x;y;z)$ также интегрируема по выбранной стороне поверхности Ω и справедливо равенство:

$$\iint_{\Omega} (\alpha P_1 \pm \beta P_2)\,dydz = \alpha \iint_{\Omega} P_1 dydz \pm \beta \iint_{\Omega} P_2\, dydz ;$$

– *(аддитивность)* если поверхность Ω, из двух частей Ω_1 и Ω_2, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, а пересечение Ω_1 и Ω_2 состоит лишь из границы, их разделяющей, и функция $P(x;y;z)$ интегрируема по выбранным сторонам Ω_1 и Ω_2, то функция $P(x;y;z)$ также интегрируема по выбранной стороне поверхности Ω и справедлива формула

$$\iint_{\Omega} P(x;y;z)\,dydz = \iint_{\Omega_1} P(x;y;z)\,dydz + \iint_{\Omega_2} P(x;y;z)\,dydz ;$$

– *(оценка интеграла)* если функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ интегрируемы по выбранной стороне двусторонней поверхности Ω и $\sqrt{P^2+Q^2+R^2} \le M$ во всех точках поверхности, то

$$\left|\iint_{\Omega} P(x;y;z)\,dydz + Q(x;y;z)\,dzdx + R(x;y;z)\,dxdz\right| \le M \cdot ½ ,$$

где S – площадь поверхности;

– *(ориентированность)* если Ω^- противоположная сторона к стороне Ω^+ поверхности Ω, то

$$\iint_{\Omega^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdz = -\iint_{\Omega^-} Pdydz + Qdzdx + Rdxdz .$$

13.3 Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода

Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода сводится к вычислению двойного интеграла, учитывая проекции поверхности на соответствующие плоскости:

$$\iint_{\Omega} R(x,y,z)\,dxdy = \pm \iint_{G_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,dxdy ,$$

не составляет с осью Oz острый угол), со знаком «–», если выбрана внутренняя сторона Ω^- поверхности.

Сумма $\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta\sigma_i$ называется *интегральной суммой* для функции $R(x;y;z)$ по выбранной стороне поверхности.

Обозначим через λ наибольший из диаметров разбиения: $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n} d(\Omega_i)$.

Поверхностным интегралом 2-го рода от функции $R(x;y;z)$ по выбранной стороне поверхности называется предел (если он существует) интегральной суммы при $\lambda\to 0$:

$$\iint\limits_{\Omega} R(x;y;z)\,dxdy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta\sigma_i\,,$$

функция $R(x;y;z)$ называется *интегрируемой по поверхности* Ω по переменным x и y.

Аналогично определяются поверхностные интегралы 2-го рода по выбранной стороне поверхности Ω по переменным y и z, z и x от непрерывных функций $P(x;y;z)$ и $Q(x;y;z)$, определенных в точках двухсторонней поверхности Ω, соответственно:

$$\iint\limits_{\Omega} P(x;y;z)\,dydz=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot(\Omega_i)_{yz}\,;$$

$$\iint\limits_{\Omega} Q(x;y;z)\,dzdx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot(\Omega_i)_{zx}\,.$$

Общим поверхностным интегралом 2-го рода называется интеграл вида

$$\iint\limits_{\Omega} P(x;y;z)\,dydz+Q(x;y;z)\,dzdx+R(x;y;z)\,dxdz\,.$$

Поверхностный интеграл 2-го рода обладает следующими *свойствами*:

– для общего поверхностного интеграла 2-го рода справедливо равенство:

$$\iint\limits_{\Omega} Pdydz+Qdzdx+Rdxdz=\iint\limits_{\Omega} Pdydz+\iint\limits_{\Omega} Qdzdx+\iint\limits_{\Omega} Rdxdy\,;$$

– *(линейность)* если α и β – произвольные постоянные числа, функции $P_1(x;y;z)$ и $P_2(x;y;z)$ интегрируемы по выбранной сто-

для определения криволинейного интеграла 2-го рода

Сумма $\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k;\eta_k;)\cdot\Delta x_k$ называется *интегральной суммой по переменной* x для функции $P(x;y)$; сумма $\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_k;\eta_k;)\cdot\Delta y_k$ называется *интегральной суммой по переменной* y для функции $Q(x;y)$.

Обозначим $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta l_k$.

Криволинейным интегралом по координате x *по кривой* AB от функции $P(x;y)$ называется предел (если он существует) интегральной суммы $\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k;\eta_k;)\cdot\Delta x_k$ при $\lambda\to 0$:

$$\int\limits_{AB} P(x;y)\,dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k;\eta_k)\Delta x_k\,.$$

Криволинейным интегралом по координате y *по кривой* AB от функции $Q(x;y)$ называется предел (если он существует) интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_k;\eta_k;)\cdot\Delta y_k$ при $\lambda\to 0$:

$$\int\limits_{AB} Q(x;y)\,dy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k;\eta_k)\Delta y_k\,.$$

Криволинейным интегралом 2-го рода по кривой AB от функций $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ называется предел (если он существует) при $\lambda\to 0$ интегральной суммы

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_k;\eta_k)\Delta x_k+Q(\xi_k;\eta_k)\Delta y_k\,,$$

и обозначается

$$\int\limits_{AB} P(x;y)\,dx+Q(x;y)\,dy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k;\eta_k)\Delta x_k+Q(\xi_k;\eta_k)\Delta y_k\,.$$

Криволинейный интеграл 2-го рода можно записать в виде

$$\int\limits_{AB} P(x;y)dx+Q(x;y)dy=\int\limits_{AB} P(x;y)dx+\int\limits_{AB} Q(x;y)dy\,.$$

Теорема 1 (существование криволинейного интеграла 2-го рода) Если кривая AB гладкая, а функции

$P(x;y)$ и $Q(x;y)$ непрерывны на кривой AB, то криволинейный интеграл 2-го рода существует.

Пусть AB – *замкнутая кривая*, т. е. точка A совпадает с точкой B. Тогда для нее можно определить два направления обхода от точки A к точке B. Направление обхода замкнутой кривой называется *положительным*, если область, лежащая внутри этого контура остается слева по отношению к точке, совершающей обход. Противоположное направление называется *отрицательным*.

Интеграл по замкнутому контуру Γ в положительном направлении обозначается как $\oint\limits_{\Gamma} P(x;y)dx + Q(x;y)dy$.

Криволинейный интеграл 2-го рода обладает следующими свойствами:

– *(линейность)* если α и β – произвольные постоянные числа, функции $P_1(x;y)$ и $P_2(x;y)$ интегрируемы на кривой AB по переменной x, то функция $\alpha \cdot P_1(x;y) + \beta \cdot P_2(x;y)$ также интегрируема на дуге AB по переменной x и справедливо равенство

$$\int\limits_{AB} (\alpha P_1(x;y) + \beta P_2(x;y))dx = \alpha \int\limits_{AB} P_1(x;y)dx + \beta \int\limits_{AB} P_2(x;y)dx.$$

Аналогично по переменной y;

– *(аддитивность)* если дуга AB состоит из двух частей AC и CB, $AB = AC \cup CB$, имеющих одну общую точку, на каждой из которых $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ интегрируемы, то функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ также интегрируемы на дуге AB и справедлива формула:

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{AC} Pdx + Qdy + \int\limits_{CB} Pdx + Qdy;$$

– *(ориентированность)* при изменении направления пути интегрирования криволинейный интеграл 2-го рода изменяет свой знак на противоположный:

$$\int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = -\int\limits_{BA} P(x;y)dx + Q(x;y)dy;$$

– если кривая AB лежит в плоскости, перпендикулярной оси Ox, то $\int\limits_{AB} P(x;y)dx = 0$; если кривая AB лежит в плоскости, перпендикулярной оси Oy, то $\int\limits_{AB} Q(x;y)dy = 0$;

Поэтому

$$\Delta\Pi_i \approx \Delta S_i \cdot (\vec{V}_i \cdot \vec{n}).$$

Количество жидкости через всю поверхность Ω равно

$$\Pi \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta\Pi_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \cdot (\vec{V}_i \cdot \vec{n}_i).$$

В координатной форме поток жидкости Π равен

$$\Pi \approx \sum_{i=1}^{n} (P_i \cdot \cos\alpha_i + Q_i \cdot \cos\beta_i + R_i \cdot \cos\gamma_i) \cdot \Delta S_i,$$

где $P_i = P(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$, $Q_i = Q(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$, $R_i = R(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$.

Точное значение потока получим, переходя к пределу при $\lambda \to 0$:

$$\Pi = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} (P_i \cdot \cos\alpha_i + Q_i \cdot \cos\beta_i + R_i \cdot \cos\gamma_i) \cdot \Delta S_i.$$

Поскольку площадь проекции равна произведению площади поверхности на косинус угла между проекцией и поверхностью:

$$(\Delta\Omega_i)_{yz} = \Delta S_i \cdot \cos\alpha_i,$$

$$(\Delta\Omega_i)_{zx} = \Delta S_i \cdot \cos\beta_i,$$

$$(\Delta\Omega_i)_{xy} = \Delta S_i \cdot \cos\gamma_i,$$

то поток можно записать в виде

$$\Pi = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot (\Delta\Omega_i)_{yz} + Q_i \cdot (\Delta\Omega_i)_{zx} + R_i \cdot (\Delta\Omega_i)_{xy}.$$

13.2 Определение и свойства поверхностного интеграла 2-го рода

Пусть двусторонняя поверхность Ω с выбранным направлением единичного вектора нормали $\vec{n}$ задана явно непрерывно-дифференцируемой функцией $z(x;y)$ в области $G \subset Oxy$. И пусть в точках поверхности Ω определена непрерывная функция $R(x;y;z)$. Выбранную сторону поверхности Ω разобьем на n частичных поверхностей Ω_1, Ω_2, ..., Ω_n. Обозначим σ_1, σ_2, ..., σ_n проекции этих частей на плоскость Oxy. При этом площадь проекции $\Delta\sigma_i$, $\Delta\sigma_i = (\Omega_i)_{xy}$, берется со знаком «+», если выбрана внешняя сторона Ω^+ поверхности (нормаль $\vec{n}$ к выбранной сторосумм существует и не зависит от разбиения области на части. Поэтому, не ограничивая общности, можно разбивать область интегрирования G на части прямыми, параллельными координатным осям (рисунок 3. 11). Тогда $\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$. Учитывая, что $dS = dxdy$, можно записать:

$$\iint_G f(x;y)dS = \iint_G f(x;y)dxdy .$$

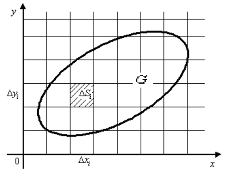

Рисунок 3.11 – Разбиение области G на части прямыми, параллельными координатным осям

4.4 Основные свойства двойного интеграла

Основные свойства двойного интеграла аналогичны соответствующим свойствам определенного интеграла:

– $\iint_G dS = \iint_G dxdy = S$, где S – площадь области G;

– *(линейность)* если α и β – произвольные постоянные числа, функции $f(x;y)$ и $g(x;y)$ интегрируемые в области G, то функция $\alpha \cdot f(x;y) + \beta \cdot g(x;y)$ тоже интегрируема в G и справедливо равенство:

$$\iint_G (\alpha f(x;y) + \beta g(x;y))dxdy = \alpha \iint_G f(x;y)dxdy + \beta \iint_G g(x;y)dxdy ;$$

– *(аддитивность)* если область G является объединением областей G_1 и G_2, не имеющих общих внутренних точек, на каждом из которых $f(x;y)$ интегрируема, то функция $f(x;y)$ также интегрируема в области G и справедлива формула:

$$\iint_G f(x;y)dxdy = \iint_{G_1} f(x;y)dxdy + \iint_{G_2} f(x;y)dxdy ;$$

– если в области G имеет место неравенство $f(x;y) \geq 0$, то справедливо неравенство $\iint_G f(x;y)dxdy \geq 0$;

– интеграл по замкнутому контуру не зависит от выбора начальной точки, а зависит только от направления обхода кривой.

2.3 Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода

Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода сводится к вычислению определенного интеграла.

Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции параметра t, причём точке A соответствует $t = \alpha$, точке B – значение $t = \beta$, $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$. И пусть функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ непрерывны на кривой AB. Тогда криволинейный интеграл 2-го рода вычисляется по формуле:

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int_\alpha^\beta \left[P \cdot x'(t) + Q \cdot y'(t) \right] dt .$$

Пусть кривая AB задана уравнением $y = y(x)$, $x \in [a;b]$, где функции $y(x)$ и $y'(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$. Тогда криволинейный интеграл 2-го рода вычисляется по формуле:

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int_a^b \left[P(x;y(x)) + Q(x;y(x))\,y'(x) \right] dx .$$

Теорема 2 (связь между криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода) Пусть

1) кусочно-гладкая кривая AB, лежит в плоскости Oxy и задана уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[\alpha;\beta]$, $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$, причем $A(x(\alpha); y(\alpha))$, $B(x(\beta); y(\beta))$;

2) функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ кусочно-непрерывны вдоль кривой AB;

3) вектор $\vec{\tau} = (\cos\alpha; \cos\beta)$, единичный касательный вектор к кривой AB в точке $M(x;y)$, где α и β углы, составляемые с осями координат (рисунок 3.6).

Тогда имеет место равенство:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{AB} (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\,dl .$$

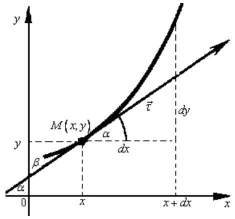

Рисунок 3.6 – Связь криволинейных интегралов 1-го и 2-го рода

Для пространственной кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, где $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[\alpha;\beta]$, $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) \neq 0$, $A(x(\alpha); y(\alpha); z(\alpha))$, $B(x(\beta); y(\beta); z(\beta))$, криволинейный интеграл 2-го рода вводится аналогично плоскому случаю:

$$\int_{AB} P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz .$$

При этом формула, выражающая связь между криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода имеет вид:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{AB} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dl ,$$

где $\vec{\tau} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$, единичный касательный вектор к кривой AB в точке $M(x;y;z)$, α, β, γ углы, составляемые $\vec{\tau}$ с положительными направлениями осей координат, причем направление вектора $\vec{\tau}$ соответствует направлению движения от точки A к точке B.

2.4 Приложения криволинейного интеграла 2-го рода

Криволинейный интеграл 2-го рода используется для вычисления:

– *работы силы* $\vec{F}$ по перемещению материальной точки вдоль кривой AB от точки A до точки B:

$$A = \int_{AB} P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz ,$$

где $P(x;y;z)$ и $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ проекции силы $\vec{F}$ на координатные оси Ox, Oy, Oz соответственно;

– *координат центра тяжести* $(x_c; y_c; z_c)$ материальной поверхности Ω

$$x_c = \frac{S_{yz}}{m},\ y_c = \frac{S_{zx}}{m}, \quad z_c = \frac{S_{xy}}{m};$$

– *моментов инерции* M_x, M_y, M_z, M_0 материальной поверхности Ω относительно координатных осей Ox, Oy, Oz и начала координат $O(0;0)$ соответственно:

$$M_x = \iint_{\Omega} (y^2 + z^2) \cdot \rho(x;y;z) dS ;$$

$$M_y = \iint_{\Omega} (x^2 + z^2) \cdot \rho(x;y;z) dS ;$$

$$M_z = \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) \cdot \rho(x;y;z) dS ;$$

$$M_0 = \iint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \rho(x;y;z) dS .$$

Тема 13 Поверхностный интеграл 2-го рода

13.1 Задача о потоке жидкости
13.2 Определение и свойства поверхностного интеграла 2-го рода
13.3 Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода
13.4 Связь между поверхностными интегралами 1-го и 2-го рода

13.1 Задача о потоке жидкости

Пусть пространство $Oxyz$ заполнено движущейся однородной жидкостью, скорость которой в каждой точке $M(x;y;z)$ задана вектором

$$\vec{V} = P(x;y;z)\cdot\vec{i} + Q(x;y;z)\cdot\vec{j} + R(x;y;z)\cdot\vec{k} ,$$

где непрерывные функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ – проекции вектора $\vec{V}$ на координатные оси Ox, Oy, Oz соответственно. Требуется найти количество жидкости Π, протекающей за единицу времени t через некоторую ориентированную поверхность Ω.

Будем предполагать, что поверхность Ω не препятствует движению и ограничена контуром Γ, при этом плотность жидкости есть $\rho(x;y;z) = 1$.

тегрируема на ней. Учитывая, что элемент поверхности есть $dS=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$, имеем

$$\iint_\Omega f(x;y;z)\,dS=\iint_G f(x;y;z(x;y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy.$$

Поверхность Ω задана неявно уравнением $F(x,y,z)=0$, где $F_z'\neq 0$, $\forall(x,y,z)\in\Omega$. Функция $F(x,y,z)$ удовлетворяет условиям теоремы о существовании неявной функции. Поэтому уравнение $F(x,y,z)=0$ определяет функцию $z=z(x,y)$, для которой $z_x'=-\dfrac{F_x'}{F_z'}$; $z_y'=-\dfrac{F_y'}{F_z'}$.

Тогда имеем

$$\iint_\Omega f(x,y,z)\,dS=\iint_G f(x,y,z)\frac{1}{|F_z'|}\sqrt{F_x'^2+F_y'^2+F_z'^2}\,dxdy,$$

где G – проекция поверхности на плоскость Oxy $(z=0)$. Для вычисления интеграла z выражается из уравнения поверхности.

12.4 Приложения поверхностного интеграла 1-го рода

Поверхностные интегралы 1-го рода применяются для вычисления**:**

– *площади поверхности* Ω $\iint_\Omega dS=\mathrm{S}$;

– *массы материальной поверхности* Ω с непрерывно распределенным веществом известной плотности $\rho(x;y;z)$

$$m=\iint_\Omega \rho(x;y;z)\,dS;$$

– *статических моментов* S_{xy}, S_{yz}, S_{zx} материальной поверхности Ω относительно координатных плоскостей Oxy, Oyz, Ozx соответственно:

$$S_{xy}=\iint_\Omega z\cdot\rho(x;y;z)\,dS;$$

$$S_{yz}=\iint_\Omega x\cdot\rho(x;y;z)\,dS;$$

$$S_{zx}=\iint_\Omega y\cdot\rho(x;y;z)\,dS;$$

– *площади плоской фигуры*, ограниченной замкнутым контуром Γ:

$$S=\oint_\Gamma xdy, \qquad S=-\oint_\Gamma ydx, \qquad S=\frac{1}{2}\oint_\Gamma xdy-ydx.$$

Тема 3 Мера Жордана в пространстве $\mathbb{R}^n$

3.1 Клетки и клеточные множества в $\mathbb{R}$n

Клетками в $\mathbb{R}$ называются промежутки, точки и пустое множество Ø. Если клетка I есть *промежуток*, то ее *мера* есть число $m(I)$, равное длине промежутка I. Если клетка I есть *точка* или *пустое множество*, то $m(I)=0$.

Пусть I_1, I_2, ..., I_n — клетки в $\mathbb{R}$.

Множество точек $\Pi=I_1\times I_2\times\ldots\times I_n$ называется *клеткой* в $\mathbb{R}^n$. *Мерой* $m(\Pi)$ клетки Π называется произведение мер клеток I_k:

$$m(\Pi)=m(I_1)\cdot m(I_2)\cdot\ldots\cdot m(I_n)=\prod_{k=1}^{n}m(I_k).$$

Здесь «$\times$» обозначает декартово произведение множеств.

Ниже приведены свойства клеток.

– если хотя бы одна из клеток I_1, I_2, ..., I_n – пустое множество то и клетка $\Pi=I_1\times I_2\times\ldots\times I_n$ есть пустое множество (пустая клетка) и $m(\Pi)=0$. Если хотя бы одна из клеток I_1, I_2, ..., I_n есть точка в $\mathbb{R}$, то $m(\Pi)=0$. Если все клетки I_1, I_2, ..., I_n являются точками в $\mathbb{R}$, то и Π есть точка в $\mathbb{R}^n$ и $m(\Pi)=0$. Если $m(\Pi)>0$, то все клетки I_1, I_2, ..., I_n являются промежутками в $\mathbb{R}$ и $m(I_k)>0$, $k=1,2,\ldots,n$;

– отрезки, точки и пустое множество являются замкнутыми множествами в $\mathbb{R}$ (замкнутыми клетками). Замыкание любой клетки в $\mathbb{R}$ есть замкнутая клетка;

– интервалы и пустое множество являются открытыми множествами в $\mathbb{R}$ (открытыми клетками). Внутренность любой клетки в $\mathbb{R}$ есть открытая клетка;

– пересечение двух клеток в $\mathbb{R}$ есть клетка. Разность двух клеток в $\mathbb{R}$ есть объединение не более чем двух непересекающихся клеток;

– для любой клетки $I \subset \mathbb{R}$ справедливы равенства $m(I) = m(I^\circ) = m(\bar{I})$, где I° – внутренность клетки I, а $\bar{I}$ – замыкание клетки I в $\mathbb{R}$;

– для любой клетки $\Pi = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ справедливы соотношения:

$$\Pi^\circ = I_1^\circ \times I_2^\circ \times \ldots \times I_n^\circ,\ \bar{\Pi} = \bar{I}_1 \times \bar{I}_2 \times \ldots \times \bar{I}_n,\ m(\Pi) = m(\Pi^\circ) = m(\bar{\Pi});$$

– если Π и Θ клетки в $\mathbb{R}^n$ и $\Pi \subset \Theta$, то $m(\Pi) < m(\Theta)$;

– если I_1, J_1, I_2, J_2, …, I_n, J_n клетки в $\mathbb{R}$, $\Pi = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ и $\Theta = J_1 \times J_2 \times \ldots \times J_n$, то $\Pi \cap \Theta$ есть клетка в $\mathbb{R}^n$, причем

$$\Pi \cap \Theta = \left\{ (x_1; x_2; \ldots; x_n) \middle|\ x_1 \in I_1 \cap J_1, \ldots, x_n \in I_n \cap J_n \right\};$$

– если клетка I есть промежуток в $\mathbb{R}$ с концами a и b, то граница клетки $\partial I = \{a; b\}$. Если клетка $I \subset \mathbb{R}$ есть точка или пустое множество, то $\partial I = I$;

– пусть совокупность клеток $\{I_1; I_2; \ldots; I_t\}$ есть разбиение клетки $I \subset \mathbb{R}$. Тогда

$$m(I) = m(I_1) + m(I_2) + m(I_t);$$

– пусть совокупность клеток $\{I_1; I_2; \ldots; I_t\}$ есть разбиение клетки $I \subset \mathbb{R}$, а совокупность клеток $\{J_1; J_2; \ldots; J_p\}$ есть разбиение клетки $J \subset \mathbb{R}$. Тогда совокупность клеток $\{\Pi_{ij} = I_i \times J_j\}$, $i = 1, 2, \ldots, t$, $j = 1, 2, \ldots, p$, есть разбиение клетки $\Pi = I \times J$, причем $m(\Pi) = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{p} m(\Pi_{ij})$. Такое разбиение клетки называется *стандартным*;

Ω_1 и Ω_2, то функция $f(x; y; z)$ также интегрируема на поверхности Ω и справедлива формула:

$$\iint_{\Omega} f(x; y; z)\, dS = \iint_{\Omega_1} f(x; y; z)\, dS + \iint_{\Omega_2} f(x; y; z)\, dS;$$

– *(монотонность)* если на поверхности Ω выполнено неравенство $f(x; y; z) \le g(x; y; z)$, то

$$\iint_{\Omega} f(x; y; z)\, dS \le \iint_{\Omega} g(x; y; z)\, dS;$$

– *(оценка интеграла)* $\left| \iint_{\Omega} f(x; y; z)\, dS \right| \le \iint_{\Omega} \left| f(x; y; z) \right| dS$;

– *(теорема о среднем)* если $f(x; y; z)$ непрерывна на поверхности Ω, то на этой поверхности существует такая точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$, что

$$\iint_{\Omega} f(x; y; z)\, dS = f(x_0; y_0; z_0) \cdot S,$$

где S – площадь поверхности Ω.

12.3 Вычисление поверхностного интеграла 1-го рода

Вычисление поверхностного интеграла 1-го рода сводится к вычислению двойного интеграла по области G, являющейся проекцией поверхности Ω на плоскость Oxy.

Поверхность Ω задана параметрическими уравнениями

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),\ (u, v) \in W.$$

Тогда поверхностный интеграл 1-го рода вычисляется по формуле

$$\iint_{\Omega} f(x, y, z)\, dS = \iint_{W} f\big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big) \sqrt{EG - F^2}\, du dv,$$

где $E = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2$; $G = x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2$; $F = x_u' x_v' + y_u' y_v' + z_u' z_v'$.

Пусть Ω поверхность, заданная уравнением $z = z(x; y)$. Здесь функция $z(x; y)$ непрерывна вместе со своими частными производными z_x' и z_y' в замкнутой области G. И пусть функция $f(x; y; z)$ непрерывна на поверхности Ω, и, следовательно, ин-

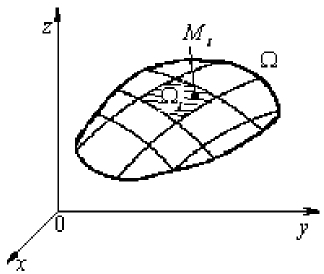

Рисунок 3. 18 – Разбиение поверхности Ω.

Сумма $\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i;\eta_i;\zeta_i\right)\cdot \Delta S_i$ называется *интегральной суммой* для функции $f\left(x;y;z\right)$ по поверхности Ω.

Обозначим через λ наибольший из диаметров разбиения: $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} d\left(\Omega_i\right)$.

Поверхностным интегралом 1-го рода от функции $f\left(x;y;z\right)$ называется предел (если он существует) интегральной суммы:

$$\iint\limits_{\Omega} f\left(x;y;z\right)dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i;\eta_i;\zeta_i\right)\cdot \Delta S_i ,$$

функция $f\left(x;y;z\right)$ называется *интегрируемой по поверхности* Ω, поверхность Ω – *поверхностью интегрирования*, dS – *элемент поверхности*.

Основные *свойства* поверхностного интеграла 1- го рода:

– $\iint\limits_{\Omega} dS = ½$, где S – площадь поверхности Ω;

– *(линейность)* если α и β — произвольные постоянные числа, функции $f\left(x;y;z\right)$ и $g\left(x;y;z\right)$ интегрируемы на поверхности Ω, то функция $\alpha\cdot f\left(x;y;z\right)+\beta\cdot g\left(x;y;z\right)$ также интегрируема на поверхности Ω и справедливо равенство

$$\iint\limits_{\Omega}\left(\alpha f+\beta g\right)dS = \alpha\iint\limits_{\Omega} f\,dS+\beta\iint\limits_{\Omega} g\,dS ;$$

– *(аддитивность)* если поверхность Ω состоит из двух частей Ω_1 и Ω_2, $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$, а пересечение Ω_1 и Ω_2 состоит лишь из границы, их разделяющей, и функция $f\left(x;y;z\right)$ интегрируема на

– если совокупность клеток $\left\{\Pi_1,\Pi_2,...,\Pi_p\right\}$ есть разбиение клетки $\Pi\subset\mathbb{R}^2$, то $m\left(\Pi\right)=\sum\limits_{i=1}^{p} m\left(\Pi_i\right)$.

Аналогично строится стандартное разбиение клетки в $\mathbb{R}^n$.

Разбиение клетки Π в пространстве $\mathbb{R}^2$ изображено на рисунке 3. 7.

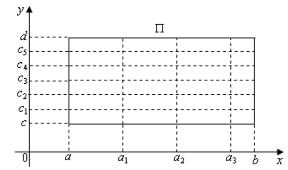

Рисунок 3. 7 – Разбиение клетки Π в пространстве $\mathbb{R}^2$

Множество $A\subset\mathbb{R}^n$ называется *клеточным*, если это множество можно представить в виде конечного объединения попарно непересекающихся клеток $\left\{\Pi_1,\Pi_2,...,\Pi_s\right\}$. *Мерой* множества A называется число $m\left(A\right)=\sum\limits_{k=1}^{s} m\left(\Pi_k\right)$.

Клеточные множества обладают следующими свойствами:

– мера клеточного множества не зависит от способа разбиения этого множества на клетки;

– если клеточные множества A и B не пересекаются, то объединение $A\cup B$ есть клеточное множество и $m\left(A\cup B\right)=m\left(A\right)+m\left(B\right)$;

– если A и B являются клеточными множествами в$\mathbb{R}$, то $A\times B$ есть клеточное множество в $\mathbb{R}^2$;

– декартово произведение n клеточных множеств в $\mathbb{R}$ является клеточным множеством в $\mathbb{R}^n$;

– разность двух клеточных множеств в $\mathbb{R}^n$ есть клеточное множество;

– пересечение двух клеточных множеств есть клеточное множество;

– если A и B – клеточные множества и $A\subset B$, то

$$m\left(B\right)=m\left(A\right)+m\left(B\setminus A\right) \text{ и } m\left(B\right)>m\left(A\right);$$

– если A_1, A_2, …, A_p — клеточные множества, то

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{p} A_k\right) \le \sum_{k=1}^{p} m(A_k).$$

3.2 Множества измеримые по Жордану

Множество $Q \subset \mathbb{R}^n$ называется *измеримым по Жордану*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся два клеточных множества A и B такие, что $A \subset Q \subset B$ и $m(B) - m(A) < \varepsilon$.

Мерой измеримого по Жордану множества Q называется такое число $m(Q)$, что для любых двух клеточных множеств A и B, удовлетворяющих условию $A \subset Q \subset B$, выполнено неравенство

$$m(A) \le m(Q) \le m(B).$$

Для любого измеримого по Жордану множества Q существует и единственно число $m(Q)$, причем

$$m(Q) = \sup_{A \subset Q} m(A) = \inf_{B \supset Q} m(B).$$

Будем говорить, что множество $E \subset \mathbb{R}^n$ имеет жорданову меру нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется клеточное множество B такое, что $E \subset B$ и $m(B) < \varepsilon$.

Множества жордановой меры нуль обладают следующими свойствами:

– множество E меры нуль измеримо по Жордану и $m(E) = 0$;

– объединение двух множеств (конечного числа множеств) меры нуль есть множество меры нуль;

– подмножество множества меры нуль есть множество меры нуль;

– если связное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ не содержит ни одной граничной точки множества $B \subset \mathbb{R}^n$, то $A \subset B^{\circ}$ или $A \subset (\mathbb{R}^n \setminus \overline{B})$.

3.3 Критерий измеримости множества в ℝn

Теорема 1 (критерий измеримости) Для того чтобы множество $Q \subset \mathbb{R}^n$ было измеримым по Жордану, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным, а его граница ∂Q имела жорданову меру нуль.

Ниже приведены свойства меры Жордана:

Тема 12 **Поверхностный интеграл 1-го рода**

12.1 Задача о массе изогнутой пластины

Пусть на поверхности Ω непрерывно распределено вещество с известной плотностью $\rho(x;y;z)$. Требуется определить массу материальной поверхности Ω.

Разобьем поверхность Ω на n частичных поверхностей Ω_1, Ω_2, …, Ω_n без общих внутренних точек с площадями ΔS_1, ΔS_2, …, ΔS_n и диаметрами d_1, d_2, …, d_n. Наибольший из диаметров обозначим $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} d(\Omega_i)$. Предположим, что в каждой части Ω_i, $i = 1,2,...,n$, плотность постоянна и равна $\rho(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$, где точка $M_i(\xi_i;\eta_i;\zeta_i) \in \Omega_i$. Тогда масса i-ой части Ω_i поверхности Ω приблизительно равна

$$m_i \approx \rho(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot \Delta S_i .$$

Для массы всей поверхности имеем

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot \Delta S_i .$$

Переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получим точное значение массы

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot \Delta S_i .$$

12.2 Определение поверхностного интеграла 1-го рода

Пусть в точках кусочно-гладкой поверхности $\Omega \in \mathbb{R}^3$, с площадью S определена непрерывная ограниченная функция $f(x;y;z)$. Разобьем поверхность Ω на n частичных поверхностей Ω_1, Ω_2, …, Ω_n без общих внутренних точек с площадями ΔS_1, ΔS_2, …, ΔS_n и диаметрами d_1, d_2, …, d_n. На каждой частичной поверхности Ω_i возьмем произвольную точку $M_i(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$ (рисунок 3. 18).

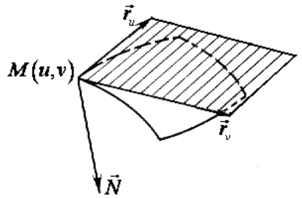

Рисунок 3. 17 – Элемент поверхности

Поэтому можно считать, что площадь криволинейного параллелограмма приближенно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{r}_u \Delta u$ и $\vec{r}_v \Delta v$ при $\Delta u > 0$, $\Delta v > 0$:

$$\Delta S \approx \left|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right| \cdot \Delta u \Delta v .$$

Элементом поверхности Ω называется выражение вида

$$dS = \sqrt{a_{11}a_{22} - (a_{12})^2}\, dudv .$$

Формально считается, что площадь простой поверхности Ω равна двойному интегралу

$$S = \iint\limits_G dS = \iint\limits_G \sqrt{a_{11}a_{22} - (a_{12})^2}\, dudv ,$$

где область G – измерима по Жордану.

11.4 Ориентация поверхности

Единичная нормаль $\vec{n}$, направленная наружу от поверхности Ω, называется *внешней* нормалью поверхности Ω, а противоположная ей нормаль $(-\vec{n})$, направленная внутрь поверхности Ω, называется *внутренней нормалью*.

Поверхность Ω называется *двухсторонней*, если для любой точки $M(x;y;z) \in \Omega$ и для любого замкнутого контура, проходящего по поверхности Ω и не пересекающегося с границей поверхности, выбранное в точке M направление нормали, непрерывно меняясь при движении точки по контуру, не изменит своего направления при возвращении в исходную точку M. Для *односторонней* поверхности существует такой контур, при обходе которого направление нормали изменится на противоположное.

Двусторонняя поверхность Ω называется *ориентированной*, если для нее определены внешняя $\vec{n}(M)$ и внутренняя $-\vec{n}(M)$ нормали. Выбор определенной стороны называется *ориентацией поверхности*.

– (*неотрицательность меры*) для любого измеримого множества $Q \subset \mathbb{R}^n$ всегда $m(Q) \ge 0$;

– если множества Q_1 и Q_2 измеримы по Жордану, то $Q_1 \cup Q_2$, $Q_1 \cap Q_2$, $Q_1 \setminus Q_2$ измеримы по Жордану;

– (*полуаддитивность меры*) если множества Q_1, Q_2, …, Q_n измеримы по Жордану, то и множество $\bigcup\limits_{k=1}^{n} Q_k$ измеримо по Жордану и

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{n} Q_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} m(Q_k);$$

– (*свойство конечной аддитивности меры Жордана*) если множества Q_1, Q_2, …, Q_n измеримы по Жордану и попарно не пересекаются, то

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{n} Q_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m(Q_k).$$

3.4 Разбиение измеримых множеств

Пусть множество G измеримо по Жордану в $\mathbb{R}^n$.

Разбиением $\tau = \{G_k\}$, $k = 1,2,...,m$, множества G называется совокупность измеримых по Жордану в $\mathbb{R}^n$ и попарно непересекающихся множеств G_1, G_2, …, G_m таких, что $G = \bigcup\limits_{k=1}^{m} G_k$.

Пусть $d(G_k)$ есть диаметр множества G_k:

$$d(G_k) = \sup_{x,y \in G_k} \rho(x;y).$$

Мелкостью разбиения τ множества G называется число

$$\lambda = \max_{1 \le k \le N} d(G_k).$$

Если каждое из множеств G_k, $k = 1,2,...,m$, является подмножеством некоторого множества G'_k, $k = 1,2,...,m$, то говорят, что *разбиение* $\tau = \{G_k\}$ *вписано в разбиение* $\tau' = \{G'_k\}$.

Обозначается: $\tau \prec \tau'$ или $\tau' \succ \tau$.

Разбиения обладают следующими свойствами.

– (*транзитивность*) если $\tau \prec \tau'$ и $\tau' \prec \tau''$, то $\tau \prec \tau''$;

– (*финальность*) для любых двух разбиений τ' и τ'' множества G существует такое его разбиение τ, что $\tau \succ \tau'$, $\tau \succ \tau''$;

– если $\tau = \{ G_k \}$ – разбиение множества G, то $m(G) = \sum_{k=1}^{m} m(G_k)$.

Тема 4 Определение и свойства двойного интеграла

4.1 Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла
4.2 Интегральная сумма Римана
4.3 Определение двойного интеграла
4.4 Основные свойства двойного интеграла

4.1 Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла

Задача о массе неоднородной пластины. Пусть плоская пластина G заполнена веществом с известной плотностью $\rho = \rho(x; y)$. Требуется найти массу (количество вещества) всей пластины.

Под *плотностью* вещества в точке $M(x; y)$ понимается предел средней плотности бесконечно малой части G, содержащей точку $M(x; y)$. Разобьем область G произвольно на n частичных областей G_1, $G_2, \dots$, G_n, не имеющих общих внутренних точек, с площадями ΔS_1, ΔS_2, $\dots, \Delta S_n$ (рисунок 3.8). Предположим, что в каждой малой частичной области G_i, $i = 1,2,\dots,n$, плотность постоянна и равна $\rho(M_i)$, где $M_i(\xi_i; \eta_i)$ – произвольная точка G_i. Тогда масса G_i приблизительно будет равна

$$m_i \approx \rho(M_i) \cdot \Delta S_i = \rho(\xi_i; \eta_i) \cdot \Delta S_i .$$

Для массы всей пластины G получим

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i; \eta_i) \cdot \Delta S_i .$$

Обозначим λ_i, $i = 1,2,\dots,n$, диаметр (наибольшее расстояние между точками области) частичной области G_i. И пусть λ – наи-

тельной плоскости к поверхности Ω. Обозначим $a_{11} = \vec{r}_u^{\,2}$, $a_{12} = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v$, $a_{22} = \vec{r}_v^{\,2}$. Выражение

$$(d\vec{r})^2 = a_{11} du^2 + 2a_{12} du dv + a_{22} dv^2 .$$

называется *первой квадратичной формой поверхности*.

Первая квадратичная форма простой поверхности является квазиопределенной, а во всякой неособой точке является положительно определенной.

Учитывая, что $\left| \frac{d\vec{r}}{dl} \right| = 1$, где $l = l(t)$ – переменная длина дуги кривой, то первая квадратичная форма поверхности равна квадрату дифференциала длины кривой на поверхности:

$$(dl)^2 = (d\vec{r})^2 = a_{11} du^2 + 2a_{12} du dv + a_{22} dv^2 .$$

Если длина дуги dl отсчитывается от начала рассматриваемой кривой, т. е. $\frac{dl}{dt} > 0$, то

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{a_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2a_{12}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + a_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2} .$$

Отсюда длина L_Γ кривой Γ вычисляется по формуле:

$$L_\Gamma = \int_a^b \frac{dl}{dt} dt = \int_a^b \sqrt{a_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2a_{12}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + a_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt .$$

11.3 Площадь поверхности

Рассмотрим на простой поверхности

$$\Omega = \left\{ \vec{r}(u; v) \,\middle|\, (u; v) \in G^* \subset \mathbb{R}^2_{uv} \right\}$$

криволинейный параллелограмм, ограниченный координатными линиями u, $u + \Delta u$, v, $v + \Delta v$. Векторы $\vec{r}_u \Delta u$ и $\vec{r}_v \Delta v$ являются касательными к координатным линиям, проходящим через точку $M(u; v)$ поверхности (рисунок 3. 17). Длины этих векторов отличаются от длин сторон криволинейного параллелограмма на $o(\Delta u)$ и $o(\Delta v)$ соответственно при $\Delta u \to 0$, $\Delta v \to 0$.

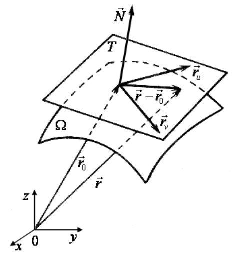

Рисунок 3. 16 – Касательная плоскость и вектор нормали

Прямая, проходящая через точку M_0 в направлении нормали, называется *нормальной прямой*.

В таблице 3. 1 приведены уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности Ω в точке M_0 при различных способах задания поверхности.

Таблица 3. 1 – Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности Ω в точке M_0

Вид задания поверхности	Уравнение касательной плоскости	Уравнение нормали
Векторное $\vec{r}=r(u,v)$	$(\vec{r}-\vec{r}_0)\vec{r}_u\vec{r}_v=0$	$\vec{r}-\vec{r}_0=k\left(\vec{r}_u(M_0)\times\vec{r}_v(M_0)\right)$, $k\in$ □
Параметрическое $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$	$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_u^0 & y_u^0 & z_u^0 \\ x_v^0 & y_v^0 & z_v^0 \end{vmatrix}=0$	$\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}}=\dfrac{y-y_0}{-\begin{vmatrix} x'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v \end{vmatrix}}=\dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}}$
Явное $z=z(x,y)$	$z-z_0=$ $=z'_x(x-x_0)+z'_y(y-y_0)$	$\dfrac{x-x_0}{-z'_x}=\dfrac{y-y_0}{-z'_y}=\dfrac{z-z_0}{1}$

Единичной нормалью к поверхности Ω называется вектор $\vec{n}=\dfrac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$.

Пусть на непрерывно дифференцируемой простой поверхности $\Omega=\{\ \vec{r}(u;v)\mid\ (u;v)\in G^*\subset\mathbb{R}^2_{uv}\ \}$ задана кривая в векторной форме $\Gamma=\left\{\vec{r}\left(u(t);v(t)\right)\mid\ a\le t\le b\right\}$. В точке $M(u;v)$ кривой Γ рассмотрим касательный вектор $d\vec{r}=\vec{r}_u du+\vec{r}_v dv$, который лежит в каса-

больший из диаметров λ_i, т. е. $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\lambda_i$. Значение m тем точнее, чем меньше каждый из диаметров частичных областей G_1, $G_2,\dots,\ G_n$. Поэтому массой пластины можно считать

$$m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i;\eta_i)\cdot\Delta S_i\ .$$

З а д а ч а о б о б ъ е м е ц и л и н д р о и д а. Тело, ограниченное сверху поверхностью $z=f(x;y)$, снизу областью G, лежащей в плоскости Oxy, с боков цилиндрической поверхностью, направляющей которой является граница области G, а образующая параллельна оси Oz, называется *криволинейным цилиндром* или *цилиндроидом*. Необходимо найти объем данного цилиндроида.

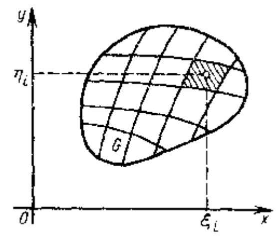

Рисунок 3. 8 – К задаче о массе неоднородной пластины

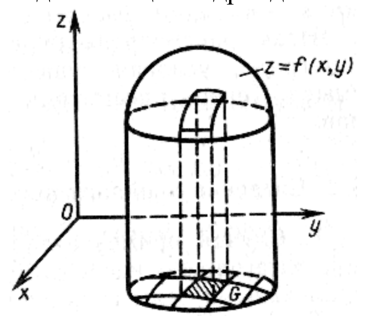

Рисунок 3. 9 – К задаче об объеме цилиндроида

Разобьем область G произвольно на n частичных областей G_1, $G_2,\dots,\ G_n$, не имеющих общих внутренних точек, с площадями ΔS_1, ΔS_2, $\dots,\Delta S_n$ (рисунок 3. 9). В каждой из областей G_i выберем точку $M_i(\xi_i;\eta_i)$ и рассмотрим прямой цилиндрический столбик с основанием G_i и высотой $f(\xi_i;\eta_i)$. Очевидно, что объем этого столбика равен $V_i\approx f(\xi_i;\eta_i)\cdot\Delta S_i$. Сумма объемов всех цилиндрических столбиков представляет собой объем ступенчатого тела, приближенно заменяющего объем криволинейного цилиндра. Поэтому

$$V\approx\sum_{i=1}^{n}V_i=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i;\eta_i)\cdot\Delta S_i\ .$$

Эта сумма тем точнее выражать искомый объем V, чем меньше каждый из диаметров λ_i, $i=1,2,...,n$, частичных областей G_1, $G_2,\dots,$ G_n. Следовательно,

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\cdot\Delta S_i ,$$

где λ – наибольший из диаметров λ_i, т. е. $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\lambda_i$.

4.2 Интегральная сумма Римана

Пусть G замкнутая область (замкнутое связное множество) пространства $\mathbb{R}^2$, $f(x;y)$ – произвольная функция, определенная и ограниченная на этом множестве (рисунок 3. 10).

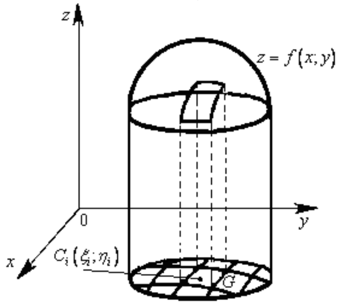

Рисунок 3. 10 – Разбиение множества G

Будем предполагать, что граница области G состоит из конечного числа непрерывных кривых, $y(x)$ или $x(y)$. И пусть $\tau=\{G_i\}_{i=1}^{n}$, $G_i\bigcap\limits_{i\ne j} G_j=\varnothing$, разбиение области G. Обозначим ΔS_i – площадь G_i, $d(G_i)=\sup\limits_{x,y\in G_i}\rho(x;y)$ – диаметр областей G_i, $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n} d(G_i)$ – мелкость разбиения. В каждой части G_i выберем произвольную точку $C_i(\xi_i;\eta_i)$. Тогда $f(\xi_i;\eta_i)$ – значение функции в этой точке.

Сумма

$$\sigma_n(\tau,C_i)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\cdot\Delta S_i$$

изводные вектор функций $\vec r=\vec r(u;v_0)$ и $\vec r=\vec r(u_0;v)$, т. е. $\vec r_u$ – касательный вектор к координатной линии $\vec r=\vec r(u;v_0)$, $\vec r_v$ – касательный вектор к координатной линии $\vec r=\vec r(u_0;v)$.

Под *кривыми на поверхности* Ω понимаются кривые, задаваемые в виде $\vec r=\vec r(u(t);v(t))$, где $t\in[a;b]$, функции $u(t)$ и $v(t)$ непрерывно дифференцируемые функции. Тогда согласно правилу дифференцирования сложной функции двух переменных, имеем

$$\frac{d\vec r}{dt}=\vec r_u\frac{du}{dt}+\vec r_v\frac{dv}{dt}.$$

Видно, что касательная к любой кривой на поверхности Ω лежит в плоскости векторов $\vec r_u$ и $\vec r_v$.

Точка $M_0=\vec r(u_0;v_0)$ поверхности Ω называется *особой*, если в ней векторы $\vec r_u$ и $\vec r_v$ коллинеарны и $\vec r_u\times\vec r_v=0$. Точка $M_0=\vec r(u_0;v_0)$ поверхности Ω называется *неособой*, если в ней векторы $\vec r_u$ и $\vec r_v$ неколлинеарны и $\vec r_u\times\vec r_v\ne 0$.

Поверхность Ω называется *гладкой*, если она непрерывно дифференцируема и не имеет особых точек. Поверхность называется *кусочно-гладкой*, если ее можно разбить на конечное число простых гладких частей.

11.2 Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть поверхность задана векторным уравнением. В силу неколлинеарности векторов $\vec r_u$ и $\vec r_v$ в неособой точке $M_0(u_0;v_0)$, в ней однозначно определена плоскость, содержащая эти векторы. Эта плоскость содержит все касательные ко всем непрерывно дифференцируемым кривым на поверхности в данной неособой точке.

Плоскость, проходящая через неособую точку $M_0(u_0;v_0)$ поверхности Ω, параллельно векторам $\vec r_u(M_0)$ и $\vec r_v(M_0)$ называется *касательной плоскостью* к поверхности Ω в этой точке. *Вектором нормали* к гладкой поверхности Ω в точке M_0 называется вектор $\vec N$, перпендикулярный касательной плоскости в точке M_0. (рисунок 3. 16).

Непрерывное отображение $f:\bar{G}\to\mathbb{R}^3$ замыкания $\bar{G}$ плоской области $G\subset\mathbb{R}^2_{xy}$ в пространство $\mathbb{R}^3$ называется *поверхностью*:

$$\Omega=\left\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3\,\middle|\, z=f(x;y),(x;y)\in G\subset\mathbb{R}^2_{xy}\right\}.$$

Образ множества $\bar{G}$ при отображении f называется *носителем* поверхности Ω.

Поверхности в пространстве $\mathbb{R}^3$ можно задавать следующими способами:

– *явное*: $\Omega=\left\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3\,\middle|\, z=f(x;y),(x;y)\in G\subset\mathbb{R}^2_{xy}\right\}$;

– *неявное*: $\Omega=\left\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,(x;y)\in G\subset\mathbb{R}^2_{xy}\;\; F(x;y;z)=0\right\}$;

– *параметрическое*:

$$\Omega=\left\{x(u;v),y(u;v),z(u;v)\,\middle|\,(u;v)\in G\subset\mathbb{R}^2_{uv}\right\};$$

– *векторный*: $\Omega=\left\{\vec{r}(u;v)\,\middle|\,(u;v)\in G^*\subset\mathbb{R}^2_{uv}\right\}$, где

$$\vec{r}(u;v)=x(u;v)\cdot\vec{i}+y(u;v)\cdot\vec{j}+z(u;v)\cdot\vec{k}.$$

Зафиксируем точку v_0. Множество точек поверхности Ω $\vec{r}=\vec{r}(u;v_0)$ называется *координатными линиями* на этой поверхности. Аналогично при фиксированной переменной $u=u_0$ множество линий $\vec{r}=\vec{r}(u_0;v)$ является координатными линиями поверхности Ω.

Поверхность Ω называется *простой*, если через каждую ее точку проходит ровно по одной координатной линии из каждого семейства, т. е. отображение $f:\bar{G}\to\mathbb{R}^3$ является взаимно однозначным. Поверхность Ω называется *замкнутой*, если через каждую ее точку проходит более одной координатной линии из каждого семейства.

Множество точек поверхности Ω соответствующих граничным точкам области G, образуют *границу* (*край*) поверхности. Точки поверхности Ω, не принадлежащие краю, называются ее *внутренними* точками. Замкнутые поверхности – это те поверхности, которые не имеют края.

Говорят, что поверхность Ω является *непрерывно дифференцируемой*, если функции $x=x(u;v)$, $y=y(u;v)$, $z=z(u;v)$ непрерывно дифференцируемы.

Пусть задана непрерывно дифференцируемая поверхность Ω векторным уравнением $\vec{r}=\vec{r}(u;v)$. И пусть $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ – частные про-

называется *интегральной суммой Римана* для функции $f(x;y)$ на множестве G, соответствующей разбиению τ и выбору точек $C_i(\xi_i;\eta_i)$.

Если функция $f(x;y)$, ограничена на G, то для любого разбиения $\tau=\{G_i\}$, $i=1,2,...,n$, определены числа:

$$m_i=\inf_{(x;y)\in G_i} f(x;y),\; M_i=\sup_{(x;y)\in G_i} f(x;y).$$

Суммы $s_\tau=\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\Delta S_i$, $S_\tau=\sum_{i=1}^{n} M_i\cdot\Delta S_i$ называются *нижней* и *верхней суммами Дарбу*, соответствующими разбиению τ.

4.3 Определение двойного интеграла

Двойным интегралом от функции $f(x;y)$ по замкнутой области G называется предел (если он существует) интегральной суммы $\sigma_n(\tau,C_i)$ при $\lambda\to 0$:

$$\iint_G f(x;y)\,dS=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\cdot\Delta S_i,$$

подынтегральная функция $f(x;y)$ называется *интегрируемой* на множестве G, множество G – *областью интегрирования*, x, y – *переменными интегрирования*, dS – *элементом площади*.

Теорема 1 (необходимое условие интегрируемости) Если функция $z=f(x;y)$ интегрируема на области G, то она ограничена на этом множестве.

Теорема 2 (достаточное условие интегрируемости) Если функция $z=f(x;y)$ непрерывна в области G, то она интегрируема в этой области.

Теорема 3 (критерий интегрируемости Дарбу) Для того чтобы ограниченная функция была интегрируема в замкнутой области $G\subset\mathbb{R}^2$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ нашлось такое $\delta>0$, что для любого разбиения $\tau=\{G_i\}$ с мелкостью $\lambda(\tau)<\delta$ выполнялось неравенство $S_\tau-s_\tau<\varepsilon$.

Из определения двойного интеграла следует, что для интегрируемой на множестве G функции $f(x;y)$ предел интегральных сумм существует и не зависит от разбиения области на части. Поэтому, не ограничивая общности, можно разбивать область интегрирования G на части прямыми, параллельными координатным осям (рисунок 3. 11). Тогда $\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$. Учитывая, что $dS = dxdy$, можно записать:

$$\iint_G f(x;y)dS = \iint_G f(x;y)dxdy .$$

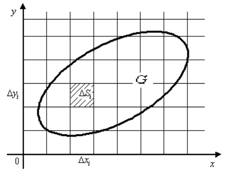

Рисунок 3.11 – Разбиение области G на части прямыми, параллельными координатным осям

4.4 Основные свойства двойного интеграла

Основные свойства двойного интеграла аналогичны соответствующим свойствам определенного интеграла:

– $\iint_G dS = \iint_G dxdy = S$, где S – площадь области G;

– *(линейность)* если α и β – произвольные постоянные числа, функции $f(x;y)$ и $g(x;y)$ интегрируемые в области G, то функция $\alpha \cdot f(x;y) + \beta \cdot g(x;y)$ тоже интегрируема в G и справедливо равенство:

$$\iint_G (\alpha f(x;y) + \beta g(x;y))dxdy = \alpha \iint_G f(x;y)dxdy + \beta \iint_G g(x;y)dxdy ;$$

– *(аддитивность)* если область G является объединением областей G_1 и G_2, не имеющих общих внутренних точек, на каждом из которых $f(x;y)$ интегрируема, то функция $f(x;y)$ также интегрируема в области G и справедлива формула:

$$\iint_G f(x;y)dxdy = \iint_{G_1} f(x;y)dxdy + \iint_{G_2} f(x;y)dxdy ;$$

– если в области G имеет место неравенство $f(x;y) \ge 0$, то справедливо неравенство $\iint_G f(x;y)dxdy \ge 0$;

– *площади плоской фигуры*, ограниченной замкнутым контуром Γ:

$$S = \oint_\Gamma xdy , \qquad S = -\oint_\Gamma ydx , \qquad S = \frac{1}{2}\oint_\Gamma xdy - ydx .$$

Тема 3 Мера Жордана в пространстве $\mathbb{R}^n$

3.1 Клетки и клеточные множества в $\mathbb{R}$n

Клетками в $\mathbb{R}$ называются промежутки, точки и пустое множество Ø. Если клетка I есть *промежуток*, то ее *мера* есть число $m(I)$, равное длине промежутка I. Если клетка I есть *точка* или *пустое множество*, то $m(I)=0$.

Пусть I_1, I_2, ..., I_n — клетки в $\mathbb{R}$.

Множество точек $\Pi = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$ называется *клеткой* в $\mathbb{R}^n$. *Мерой* $m(\Pi)$ клетки Π называется произведение мер клеток I_k:

$$m(\Pi) = m(I_1) \cdot m(I_2) \cdot ... \cdot m(I_n) = \prod_{k=1}^{n} m(I_k).$$

Здесь «×» обозначает декартово произведение множеств.

Ниже приведены свойства клеток.

– если хотя бы одна из клеток I_1, I_2, ..., I_n – пустое множество то и клетка $\Pi = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$ есть пустое множество (пустая клетка) и $m(\Pi)=0$. Если хотя бы одна из клеток I_1, I_2, ..., I_n есть точка в $\mathbb{R}$, то $m(\Pi)=0$. Если все клетки I_1, I_2, ..., I_n являются точками в $\mathbb{R}$, то и Π есть точка в $\mathbb{R}^n$ и $m(\Pi)=0$. Если $m(\Pi)>0$, то все клетки I_1, I_2, ..., I_n являются промежутками в $\mathbb{R}$ и $m(I_k)>0$, $k=1,2,...,n$;

– отрезки, точки и пустое множество являются замкнутыми множествами в $\mathbb{R}$ (замкнутыми клетками). Замыкание любой клетки в $\mathbb{R}$ есть замкнутая клетка;

Область $G_1=\left\{\left(x;y\right)\middle|x_1\left(y\right)\le x\le x_2\left(y\right),c\le y\le d\right\}$ называется *элементарной* относительно оси Ox. Здесь функции $x_1\left(y\right)$ и $x_2\left(y\right)$ непрерывны на отрезке $\left[c;d\right]$ и $x_1\left(y\right)\le x_2\left(y\right)$.

Теорема 2 Пусть

1) функция $f\left(x;y\right)$ определена в элементарной области G ;

2) существует двойной интеграл $\iint\limits_G f\left(x;y\right)dxdy$;

3) для каждого x из отрезка $\left[a;b\right]$ существует определенный интеграл $I\left(x\right)=\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f\left(x;y\right)dy$.

Тогда существует повторный интеграл $\int\limits_a^b I\left(x\right)dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f\left(x;y\right)dy$ и справедливо равенство

$$\iint\limits_G f\left(x;y\right)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f\left(x;y\right)dy .$$

Если в теореме 2 поменять ролями x и y, то существует повторный интеграл $\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(x)}^{x_2(x)} f\left(x;y\right)dx$ и справедлива формула

$$\iint\limits_{G_1} f\left(x;y\right)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(x)}^{x_2(x)} f\left(x;y\right)dx .$$

Если область интегрирования не является элементарной, то необходимо данную область разбить на части, каждая из которых является элементарной.

В случае, когда $f\left(x,y\right)=\varphi\left(x\right)\cdot g\left(y\right)$ и область D – прямоугольник, то

$$\iint\limits_D f\left(x;y\right)dxdy=\int\limits_a^b \varphi\left(x\right)dx\int\limits_c^d g\left(y\right)dy .$$

– *(монотонность)* если $f\left(x;y\right)$ и $g\left(x;y\right)$ интегрируемы в области G и $f\left(x;y\right)\le g\left(x;y\right)$ в любой точке $\left(x;y\right)\in G$, то

$$\iint\limits_G f\left(x;y\right)dxdy\le\iint\limits_G g\left(x;y\right)dxdy ;$$

– если функция $f\left(x;y\right)$ непрерывна в замкнутой области G, площадь которой S, то

$$m\cdot S\le\iint\limits_G f\left(x;y\right)dxdy\le M\cdot S ,$$

где m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения подынтегральной функции на множестве G;

– *(теорема о среднем)* если функция $f\left(x;y\right)$ непрерывна в области G, площадь которой S, то существует такая точка $P_0\left(x_0;y_0\right)\in G$, что выполняется неравенство:

$$\iint\limits_G f\left(x;y\right)dxdy=f\left(x_0;y_0\right)\cdot S ;$$

– произведение интегрируемых в области G функций есть интегрируемая функция;

– если функция $f\left(x;y\right)$ интегрируема в области G, то функция $\left|f\left(x;y\right)\right|$ интегрируема в G и справедливо неравенство:

$$\left|\iint\limits_G f\left(x;y\right)dxdy\right|\le\iint\limits_G\left|f\left(x;y\right)\right|dxdy .$$

Тема 5 Сведение двойного интеграла к повторному

5.1 Формула сведения двойного интеграла к повторному интегралу по прямоугольнику

5.2 Сведение повторного интеграла по элементарной области

5.1 Формула сведения двойного интеграла к повторному интегралу по прямоугольнику

Рассмотрим двойной интеграл по прямоугольнику

$$D=\left\{\left(x;y\right)\middle|a\le x\le b,c\le y\le d\right\}$$

со сторонами, параллельными осям координат.

Теорема 1 Пусть

1) для функции $f(x;y)$ в прямоугольнике D существует двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$;

2) для каждого x из отрезка $[a;b]$ существует определенный интеграл $I(x)=\int\limits_c^d f(x;y)dy$.

Тогда существует повторный интеграл $\int\limits_a^b I(x)dx=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x;y)dy\right)dx$ и справедливо равенство:

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x;y)dy\right)dx.$$

Повторный интеграл $\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x;y)dy\right)dx$ можно записывать в виде $\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x;y)dy$.

Если в теореме 1 поменять ролями x и y, то существует повторный интеграл $\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x;y)dx$ и справедлива формула

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x;y)dx.$$

5.2 Сведение повторного интеграла по элементарной области

Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – непрерывные функции, $y_1(x)\le y_2(x)$ для любого x из отрезка $[a;b]$. Область

$$G=\left\{(x;y)\middle|\ a\le x\le b,\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\right\}$$

называется *элементарной* относительно оси Oy.

$$\iiint\limits_Q f(x;y;z)dxdydz=\iiint\limits_{Q^*} f\left(x(u;v;w);y(u;v;w);z(u;v;w)\right)|J|dudvdw.$$

10.2 Цилиндрические координаты

Пусть $M(x;y;z)$ произвольная точка в пространстве $Oxyz$, $M'(x;y)$ – проекция точки M на плоскость Oxy. Точка M однозначно определяется тройкой чисел $(r;\varphi;z)$, где $(r;\varphi)$ – полярные координаты точки M', z – аппликата точки M (рисунок 3.14). Тройка чисел $(r;\varphi;z)$ называется *цилиндрическими координатами* точки M.

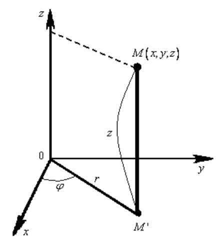

Рисунок 3. 14 – Связь декартовых и цилиндрических координат

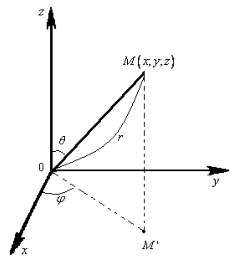

Рисунок 3. 15 – Связь декартовых и сферических координат

Переход от прямоугольных координат $(x;y;z)$ к цилиндрическим координатам $(r;\varphi;z)$ задается формулами

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi, \\ z=z, \end{cases}$$

где $0\le r<+\infty$, $0\le\varphi<2\pi$, $-\infty<z<+\infty$. Иногда в качестве промежутка изменения φ берётся промежуток $-\pi<\varphi\le\pi$.

Якобиан отображения есть $J=r$.

10.3 Сферические координаты

Пусть $M(x;y;z)$ – произвольная точка в пространстве $Oxyz$, $M'(x;y)$ – проекция точки M на плоскость Oxy. Точка M однозначно задается тройкой чисел $(r;\theta;\varphi)$, где r – расстояние точки

Если $f(x,y,z)=\varphi(x)\cdot g(y)\cdot h(z)$ и область Q – прямоугольный параллелепипед, то

$$\iiint_Q f(x,y,z)dxdydz=\int_a^b \varphi(x)dx\int_c^d g(y)dy\int_p^q h(z)dz .$$

Тема 10 Замена переменных в тройном интеграле

10.1 Формула замена переменных в тройном интеграле
10.2 Цилиндрические координаты
10.3 Сферические координаты
10.4 Приложения тройного интеграла

10.1 Формула замена переменных в тройном интеграле

Замена переменных в тройном интеграле $\iiint_Q f(x;y;z)dxdydz$ состоит в переходе от координат x, y, z к новым криволинейным координатам u, v, w по формулам

$$x=x(u;v;w),\ y=y(u;v;w),\ z=z(u;v;w),$$

где $(u;v;w)\in Q^*\subset\mathbb{R}^3_{uvw}$.

Данные функции осуществляют взаимно-однозначное отображение области $Q^*\subset\mathbb{R}^3_{uvw}$ на область $Q\subset\mathbb{R}^3_{xyz}$.

Теорема 5 Пусть 1) Q и Q^* замкнутые ограниченные области в пространствах $\mathbb{R}^3_{xyz}$ и $\mathbb{R}^3_{uvw}$ соответственно;

2) функция $f(x;y;z)$ ограничена и непрерывна в области Q;

3) функции $x(u;v;w)$, $y(u;v;w)$, $z(u;v;w)$ имеют в области Q^* непрерывные частные производные первого порядка и якобиан

$$J=\frac{D(x;y;z)}{D(u;v;w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}\neq 0 \text{ в области } Q^*.$$

Тогда справедлива формула замены переменных в тройном интеграле

Область $G_1=\left\{(x;y)\,\middle|\,x_1(y)\le x\le x_2(y),\ c\le y\le d\right\}$ называется *элементарной* относительно оси Ox. Здесь функции $x_1(y)$ и $x_2(y)$ непрерывны на отрезке $[c;d]$ и $x_1(y)\le x_2(y)$.

Теорема 2 Пусть

1) функция $f(x;y)$ определена в элементарной области G;

2) существует двойной интеграл $\iint_G f(x;y)dxdy$;

3) для каждого x из отрезка $[a;b]$ существует определенный интеграл $I(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy$.

Тогда существует повторный интеграл $\int_a^b I(x)dx=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy$ и справедливо равенство

$$\iint_G f(x;y)dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy .$$

Если в теореме 2 поменять ролями x и y, то существует повторный интеграл $\int_c^d dy\int_{x_1(x)}^{x_2(x)} f(x;y)dx$ и справедлива формула

$$\iint_{G_1} f(x;y)dxdy=\int_c^d dy\int_{x_1(x)}^{x_2(x)} f(x;y)dx .$$

Если область интегрирования не является элементарной, то необходимо данную область разбить на части, каждая из которых является элементарной.

В случае, когда $f(x,y)=\varphi(x)\cdot g(y)$ и область D – прямоугольник, то

$$\iint_D f(x;y)dxdy=\int_a^b \varphi(x)dx\int_c^d g(y)dy .$$

Тема 6 Замена переменных в двойном интеграле

6.1 Криволинейные координаты
6.2 Теорема о замене переменных в двойном интеграле
6.3 Переход к полярным координатам

6.1 Криволинейные координаты

Взаимно однозначное отображение $u = u(x; y)$, $v = v(x; y)$, открытого множества $G \subset \mathbb{R}^2_{xy}$ на множество $G^* \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ ставит в соответствие каждой точке $(x; y) \in G$ пару чисел $(u; v) \in G^*$. Поэтому данное отображение можно рассматривать как переход к новым координатам u и v точки $(x; y)$ одной и той же плоскости G. В этом случае множество G^* представляет собой множество пар новых координат точек множества G. Обратный переход от координат u и v к координатам x и y осуществляется с помощью отображения (рисунок 3. 12) $x = x(u; v)$, $y = y(u; v)$.

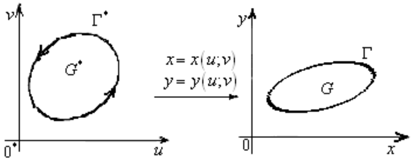

Рисунок 3. 12 – Отображение области G^* в область G
при замене переменных $x = x(u; v)$, $y = y(u; v)$

Множество точек плоскости $\mathbb{R}^2_{xy}$, для которых одна из координат u или v постоянна, называется *координатной линией.*

При $u = u_0$ имеем координатную линию $x = x(u_0; v)$, $y = y(u_0; v)$; при $v = v_0$ имеем координатную линию $x = x(u; v_0)$, $y = y(u; v_0)$. В двух случаях получаются уравнения, являющиеся параметрическими уравнениями некоторых кривых. Координаты u и v называются *криволинейными координатами*.

Замена переменных в двойном интеграле состоит в переходе от переменных x и y к новым переменным u и v по формулам $x = x(u; v)$, $y = y(u; v)$. Эти функции осуществляют отображение

(при постоянных x и y).

Тогда существует двойной интеграл

$$\iint_G I(x; y)dxdy = \iint_G dxdy \int_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x; y; z)dz$$

и справедливо равенство:

$$\iiint_V f(x; y; z)dxdydz = \iint_G dxdy \int_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x; y; z)dz .$$

Данная формула позволяет свести вычисление тройного интеграла к последовательному вычислению внутреннего определенного интеграла по переменной z (при постоянных x и y) и внешнего двойного интеграла по области G.

Выражение $I(x; y) = \int_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x; y; z)dz$ представляет собой функцию двух переменных. Если для этой функции и области $G = \{(x; y) | a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_1(x)\}$, по которой она интегрируется, выполнены условия теоремы о сведении двойного интеграла к повторному, то, переходя от двойного интеграла $\iint_G I(x; y)dxdy$ к повторному интегралу, получаем

$$\iiint_Q f(x; y; z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_1(x)} dy \int_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x; y; z)dz .$$

Если пространственная область Q не является элементарной, то ее необходимо разбить на конечное число элементарных областей. Порядок интегрирования в формуле при определенных условиях может быть иным, т. е. переменные x, y, z можно менять местами.

Пусть Q – прямоугольный параллелепипед

$$Q = \{(x; y; z) | \ a \le x \le b, c \le y \le d, \ p \le z \le q\},$$

$f(x, y, z)$ – непрерывная в Q функция. Тогда:

$$\iiint_Q f\, dxdydz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_p^q f\, dz = \int_c^d dy \int_a^b dx \int_p^q f\, dz = \int_p^q dz \int_c^d dy \int_a^b f\, dx .$$

– *(теорема о среднем)* если функция $f(x;y;z)$ непрерывна в области Q, объем которой равен V, то в этой области существует такая точка $P_0(x_0;y_0z_0)$, что

$$\iiint\limits_Q f(x;y;z)dv = f(x_0;y_0;z_0)\cdot V .$$

9.4 Вычисление тройного интеграла

В декартовых координатах вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению трех определенных.

Пусть функция $f(x;y;z)$ определена на измеримом множестве

$$Q = \left\{ (x;y;z) \middle| (x;y) \in G \subset Oxy,\ z_1(x;y) \le z \le z_2(x;y) \right\},$$

где $z_1(x;y)$ и $z_2(x;y)$ – непрерывные функции в области G. И пусть каждая прямая, параллельная оси Oz, пересекает границу области Q не более чем в двух точках (рисунок 3. 13), т. е. пространственная область Q является элементарной относительно оси Oz.

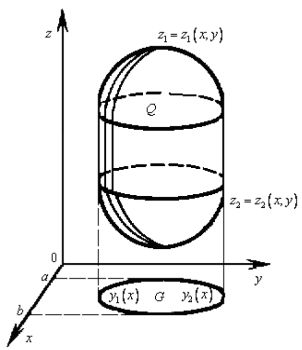

Рисунок 3. 13 – Пространственная область Q

Т е о р е м а 4 Пусть 1) существует тройной интеграл

$$\iiint\limits_Q f(x;y;z)dxdydz\ ;$$

2) $\forall\,(x;y)\in G$ *существует определенный интеграл*

$$I(x;y) = \int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz$$

области $G^* \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ на область $\mathbb{R}^2_{xy}$. Область G называется *образом* области, а область G^* – *прообразом* области G.

6.2 Теорема о замене переменных в двойном интеграле

Т е о р е м а 1 Пусть 1) отображение $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$ *переводит замкнутую ограниченную область* G^* *в замкнутую ограниченную область* G *и является взаимно однозначным;*

2) функции $x(u;v)$ *и* $y(u;v)$ *имеют в области* G^* *непрерывные частные производные первого порядка;*

3) якобиан отображения $J = \dfrac{D(x;y)}{D(u;v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \ne 0$ *во всех областях* G^**;*

4) функция $f(x;y)$ *непрерывна в области* G.

Тогда справедлива формула замены переменных в двойном интеграле

$$\iint\limits_G f(x;y)dxdy = \iint\limits_{G^*} f(x(u;v);y(u;v))|J|dudv .$$

Теорема верна также и в случае, когда условие 1) или 3) нарушается в отдельных точках или на отдельных кривых.

6.3 Переход к полярным координатам

Если область G ограничена дугами окружности, то удобно переходить к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, где $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Якобиан перехода к полярным координатам равен:

$$J = \frac{D(x;y)}{D(\rho;\varphi)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r .$$

Поэтому формула замены переменных запишется в виде:

$$\iint\limits_G f(x;y)dxdy = \iint\limits_{G^*} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)r\,drd\varphi .$$

Если область G ограничена дугами эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, то удобно переходить к обобщенным полярным координатам $x=ar\cos\varphi$, $y=br\sin\varphi$, где $0\le r<+\infty$, $0\le\varphi<2\pi$. При этом якобиан отображения равен $J=abr$.

Тема 7 Формула Грина

7.1 Формула Грина
7.2 Условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования

7.1 Формула Грина

Пусть в плоскости Oxy задана замкнутая элементарная относительно оси Ox или Oy область G, ограниченная замкнутым контуром Γ.

Теорема 1 (формула Грина) Если функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в области G, то имеет место формула

$$\iint\limits_G\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_\Gamma Pdx+Qdy,$$

где контур Γ обходится в положительном направлении.

Формула Грина справедлива для произвольной области, которую можно разбить на конечное число правильных областей. Формула Грина связывает интеграл по границе области с интегралом по самой области.

Площадь области G, ограниченной замкнутым контуром Γ, с помощью формулы Грина вычисляется по формуле

$$S=\iint\limits_G dxdy=\frac{1}{2}\oint\limits_\Gamma xdy-ydx.$$

Плоская область G называется *односвязной*, если любой замкнутый контур Γ, лежащий внутри этой области, ограничивает область G_Γ, полностью принадлежащую G.

замкнутой области $Q\subset\mathbb{R}^3$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ нашлось такое $\delta>0$, что для любого разбиения $\tau=\{Q_i\}$ с мелкостью $\lambda(\tau)<\delta$ выполнялось неравенство $S_\tau-s_\tau<\varepsilon$.

9.3 Свойства тройного интеграла

Для тройного интеграла справедливы следующие *свойства*:

– $\iiint\limits_Q dv=V$, где V – объем области Q;

– *(линейность)* если α и β — произвольные постоянные числа, функции $f(x;y;z)$ и $g(x;y;z)$ интегрируемы в области Q, то функция $\alpha\cdot f(x;y;z)+\beta\cdot g(x;y;z)$ тоже интегрируема в Q и справедливо равенство:

$$\iiint\limits_Q(\alpha f(x;y;z)+\beta g(x;y;z))dv=$$
$$=\alpha\iiint\limits_Q f(x;y;z)dv+\beta\iiint\limits_Q g(x;y;z)dv;$$

– *(аддитивность)* если область Q является объединением областей Q_1 и Q_2, не имеющих общих внутренних точек, на каждом из которых функция $f(x;y;z)$ интегрируема, то $f(x;y;z)$ также интегрируема на Q и справедлива формула:

$$\iiint\limits_Q f(x;y;z)dv=\iiint\limits_{Q_1} f(x;y;z)dv+\iiint\limits_{Q_2} f(x;y;z)dv;$$

– *(монотонность)* если в области Q имеет место неравенство $f(x;y;z)\ge 0$, то

$$\iiint\limits_Q f(x;y;z)dv\ge 0;$$

– если функция $f(x;y;z)$ непрерывна в области Q, объем которой равен V, то

$$m\cdot V\le\iiint\limits_Q f(x;y;z)dv\le M\cdot V,$$

где m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения подынтегральной функции на множестве Q.

$i=1,2,...,n$. В каждой малой части Q_i выберем произвольную точку $C_i(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$. Сумма $\sigma_n(\tau,C_i)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta V_i$ называется *интегральной суммой* Римана для функции $f(x;y;z)$ на множестве Q, соответствующей разбиению τ и выбору точек $C_i\in Q_i$, $i=1,2,...,n$. Если функция $f(x;y;z)$, ограничена на Q, то для любого разбиения $\tau=\{Q_i\}$, $i=1,2,...,n$, определены числа:

$$m_i=\inf_{(x;y;z)\in Q_i} f(x;y;z),\ M_i=\sup_{(x;y;z)\in Q_i} f(x;y;z).$$

Суммы $s_\tau=\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\Delta V_i$, $S_\tau=\sum_{i=1}^{n} M_i\cdot\Delta V_i$ называются *нижней* и *верхней суммами Дарбу*, соответствующими разбиению $\tau=\{Q_i\}$ множества Q.

Тройным интегралом от функции $f(x;y;z)$ по множеству Q называется предел (если он существует) интегральной суммы $\sigma_n(\tau,C_i)$ при $\lambda\to0$:

$$\iiint_V f(x;y;z)dV=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\Delta V_i,$$

подынтегральная функция $f(x;y;z)$ называется *интегрируемой* по замкнутой области Q, множество Q – *областью интегрирования*, x, y, z – *переменными интегрирования*, dv – *элементом* объема.

Не ограничивая общности, можно считать, что $dv=dxdydz$. Поэтому можно записать:

$$\iiint_V f(x;y;z)dxdydz=\iiint_V f(x;y;z)dv.$$

Теорема 1 (необходимое условие интегрируемости) Если функция $f(x;y;z)$ интегрируема в замкнутой области Q, то она ограничена в этой области.

Теорема 2 (достаточное условие интегрируемости) Если функция $f(x;y;z)$ непрерывна в замкнутой области Q, то она интегрируема в ней.

Теорема 3 (критерий интегрируемости Дарбу) Для того чтобы ограниченная функция была интегрируема в

7.2 Условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования

Теорема 2 Пусть функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой односвязной области G. Тогда следующие четыре условия эквивалентны:

1) для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой Γ, расположенной в G, верно

$$\oint_\Gamma Pdx+Qdy=0;$$

2) для любых двух точек A и B области G значение интеграла

$$\int_{AB} Pdx+Qdy$$

не зависит от выбора пути интегрирования AB, целиком лежащего в G;

3) выражение $Pdx+Qdy$ представляет собой полный дифференциал некоторой функции, определенной в области G:

$$Pdx+Qdy=dF;$$

4) в области G всюду $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Тема 8 Приложения двойного интеграла

8.1 Геометрические приложения двойного интеграла
8.2 Физические приложения двойного интеграла

8.1 Геометрические приложения двойного интеграла

Двойные интегралы используются для вычисления:

– *площади S плоской фигуры G*

$$S=\iint_G dxdy;$$

– *площади S поверхности*, заданной уравнением $f(x;y)$

$$S=\iint_G\sqrt{1+\left(f'_x\right)^2+\left(f'_y\right)^2}\,dxdy,$$

где G – проекция поверхности на плоскость Oxy;

– *объема тела*, ограниченного сверху поверхностью $f(x;y)>0$, снизу – плоскостью $z=0$, с боковых сторон – цилиндрической поверхностью, у которой образующая параллельна оси Oz, а направляющей служит контур области G

$$V=\iint_G f(x;y)\,dxdy.$$

8.2 Физические приложения двойного интеграла

Двойные интегралы используются для вычисления:

– *массы плоской пластины* G с плотностью $\rho(x;y)$

$$m=\iint_G \rho(x;y)\,dxdy;$$

– *статических моментов* S_x, S_y относительно осей Ox, Oy соответственно:

$$S_x=\iint_G y\cdot\rho(x;y)\,dxdy,\quad S_y=\iint_G x\cdot\rho(x;y)\,dxdy;$$

– *координат* $(x_c;y_c)$ *центра тяжести* плоской пластины G:

$$x_c=\frac{S_y}{m},\qquad y_c=\frac{S_x}{m};$$

– *моментов инерции* плоской пластины G относительно осей Ox и Oy

$$I_x=\iint_G y^2\rho(x;y)\,dxdy,\qquad I_y=\iint_G x^2\rho(x;y)\,dxdy;$$

– *момента инерции* плоской пластины G относительно начала координат $O(0;0)$

$$I_0=I_x+I_y=\iint_G\left(x^2+y^2\right)\rho(x;y)\,dxdy.$$

Тема 9 Определение и свойства тройного интеграла

9.1 Задача о массе пространственного тела

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ имеется ограниченное тело Q с переменной плотностью $\rho(x;y;z)$. Требуется найти массу этого тела.

Для решения этой задачи, разобьем тело на части Q_1, Q_2, …, Q_n объемами ΔV_1, ΔV_2, …, ΔV_n. Предположим, что в каждой малой части Q_i, $i=1,2,\dots,n$, плотность постоянна и равна $\rho(C_i)$, где $C_i(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$ – произвольная точка Q_i. Тогда масса части Q_i приблизительно будет равна

$$m_i\approx\rho(C_i)\cdot\Delta V_i=\rho(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta V_i.$$

Для массы всего тела Q получим

$$m\approx\sum_{i=1}^n m_i=\sum_{i=1}^n\rho(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta V_i.$$

9.2 Определение тройного интеграла

Обозначим λ_i, $i=1,2,\dots,n$, диаметр (наибольшее расстояние между точками области) части Q_i тела Q. И пусть λ – наибольший из диаметров λ_i, т.е. $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\lambda_i$. Значение m тем точнее, чем меньше каждый из диаметров частей Q_1, Q_2, …, Q_n. Поэтому массой всего тела можно считать

$$m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n\rho(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta V_i.$$

Пусть Q замкнутая область пространства $\mathbb{R}^3$, на котором задана непрерывная функция $f(x;y;z)$. И пусть $\tau=\{Q_i\}$, $i=1,2,\dots,n$, разбиение области Q на частичные области Q_1, Q_2, …, Q_n с объемами ΔV_1, ΔV_2, …, ΔV_n. При этом мелкость разбиения есть $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}d(Q_i)$, где $d(Q_i)$ – диаметр частичной области Q_i,