$$=-\frac{1}{tg\frac{x}{2}+2}+C;$$

б) подынтегральная функция является нечетной относительно $\sin x$. Поэтому применяем подстановку $\cos x = t$. Тогда получим

$$\int\frac{\sin x-\sin^3 x}{\cos 2x}dx=$$

$$=\left[\begin{array}{l} t=\cos x,\ \sin^2 x=1-t^2, \\ \cos 2x=2\cos^2 x-1=2t^2-1, \\ dt=-\sin xdx\Rightarrow dx=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}dt=-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt \end{array}\right]=$$

$$=\int\frac{\sqrt{1-t^2}-\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}{2t^2-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)dt=\int\frac{t^2-2}{2t^2-1}dt=\frac{1}{2}\int\frac{2t^2-4}{2t^2-1}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int dt-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{2t^2-1}=\frac{t}{2}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\int\frac{d\left(2\sqrt{2}t\right)}{\left(2\sqrt{2}t\right)^2-1}=\frac{t}{2}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}t-1}{\sqrt{2}t+1}\right|+C=$$

$$=[t=\cos x]=\frac{\cos x}{2}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right|+C;$$

в) имеем: $\int\cos^2 x\sin xdx=-\int\cos^2 xd(\cos x)=-\frac{\cos^3 x}{3}+C$;

г) имеем:

$$\int\cos^2 x\sin^2 xdx=\frac{1}{4}\int\sin^2 2xdx=\frac{1}{8}\int(1-\cos 4x)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int dx+\frac{1}{8}\int\cos 4xdx=\frac{1}{8}x+\frac{1}{32}\sin 4x+C;$$

д) имеем:

$$=\int\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}dx=\int\left|\sin x-\cos x\right|dx=$$

$$=(\sin x-\cos x)\cdot\operatorname{sgn}(\cos x-\sin x)+C.$$

Тема 2 Общие методы интегрирования

1 Вычислить методом замены переменной:

а) $\int\frac{dx}{\sin x}$; и) $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$;

б) $\int\frac{\ln^2 x}{x}dx$; к) $\int\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx$;

в) $\int\operatorname{ctg}xdx$; л) $\int\operatorname{ch}^2 x\operatorname{sh}x\,dx$;

г) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^6}}$; м) $\int e^{\cos 2x}\sin 2xdx$;

д) $\int x5^{-x^2}dx$; н) $\int\frac{\cos^5 x}{\sin^2 x}dx$;

е) $\int\frac{x^2dx}{(1+x)^6}$; о) $\int x\sqrt{x-8}\,dx$;

ж) $\int\frac{dx}{\sqrt{4-6x-3x^2}}$; п) $\int\frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+1}}dx$.

2 Вычислить методом интегрирования по частям:

а) $\int x\operatorname{arctg}^3 x\,dx$; г) $\int\sqrt{x^2+2x+5}\,dx$;

б) $\int\frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; д) $\int(x+4)\cos 3x\,dx$;

в) $\int x^2\operatorname{arctg}xdx$; е) $\int\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx$.

Примеры оформления решения

1 С помощью метода замены переменной найти интегралы:

а) $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; д) $\int\operatorname{tg}xdx$;

б) $\int\frac{x^3}{x^4-2}dx$; е) $\int\frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$;

в) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$;   ж) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$;

г) $\int \frac{dx}{x\ln x \ln\ln x}$;   и) $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$;.

Р е ш е н и е . а) имеем:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\frac{1}{2}d(x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-\frac{1}{2}d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = \left[1-x^2=t\right] = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt =$$

$$= -\frac{1}{2}2t^{\frac{1}{2}} + C = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C .$$

б) имеем: $\int \frac{x^3}{x^4-2}dx = \int \frac{\frac{1}{4}d(x^4)}{(x^4)^2-2} = \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}d\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right)}{-2\left(1-\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right)^2\right)} =$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x^4}{\sqrt{2}-x^4}\right| + C .$$

в) имеем: $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \int \frac{-d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}} =$

$$= -\ln\left|\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right| + C .$$

г) имеем:

$$\int \frac{dx}{x\ln x\ln\ln x} = \int \frac{d(\ln\ln x)}{\ln\ln x} = \ln\left|\ln\ln x\right| + C .$$

д) имеем:

е) $\int \mathrm{ch}^2 x\, \mathrm{sh}^2 x\, dx$;   с) $\int \mathrm{ch}^2 x\, \mathrm{sh}\, x\, dx$;

ж) $\int \mathrm{sh}^3 x\, dx$;   т) $\int x\, \mathrm{ch}\, 2x\, dx$;

и) $\int \mathrm{ch}\, 5x\, \mathrm{sh}\, x\, dx$;   у) $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x+1}}$;

к) $\int \frac{e^{2x}dx}{5+e^x}$;   ф) $\int \cos^3 x \sin^2 x dx$;

л) $\int \sin^5 x\sqrt[3]{\cos x}dx$;   х) $\int \sqrt{\mathrm{th}\, x}dx$.

П р и м е р ы   о ф о р м л е н и я   р е ш е н и я

Найти интегралы:

а) $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$;   е) $\int \sin 2x \cdot \cos 5x dx$;

б) $\int \frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos 2x}dx$ ж) $\int \sin 7x \cdot \sin 5x dx$;

в) $\int \cos^2 x \sin x dx$;   и) $\int \frac{e^{3x}dx}{e^{2x}+1}$;

г) $\int \cos^2 x \sin^2 x dx$;   к) $\int \mathrm{ch}^2 x\, \mathrm{sh}^3 x\, dx$.

д) $\int \mathrm{tg}^2 x dx$;

Р е ш е н и е . а) подынтегральная функция рационально зависит от $\sin x$ и $\cos x$. Применяя универсальную тригонометрическую подстановку $t = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$, получим:

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\cdot\frac{2t}{1+t^2} + 3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} =$$

$$= 2\int \frac{dx}{2t^2+8t+8} = \int \frac{d(t+2)}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + c = \left[tg\frac{x}{2} = t\right] =$$

$$=-t-\frac{1}{t}+c=\left[t=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right]=-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}+C.$$

2 Выразить через функции $Si(x)$, $li(x)$ и элементарные функции интегралы:

а) $\int\frac{dx}{\ln^2 x}$, $x<1$; б) $\int Si(x)dx$.

Решение. а) имеем:

$$\int\frac{dx}{\ln^2 x}=\int\frac{xdx}{x\ln^2 x}=\left[\begin{array}{l}u=x, dv=\frac{dx}{x\ln^2 x},\\ du=dx,\ v=\int\frac{dx}{x\ln^2 x}=-\frac{1}{\ln x}\end{array}\right]=$$

$$=-\frac{x}{\ln x}+\int\frac{dx}{\ln x}=-\frac{x}{\ln x}+li(x)+C;$$

б) имеем:

$$\int Si(x)dx=\left[\begin{array}{l}u=Si(x),\ dv=dx,\\ du=d\left(Si(x)\right)=d\left(\int\frac{\sin x}{x}dx\right)=\frac{\sin x}{x}dx,\\ v=x\end{array}\right]=$$

$$=xSi(x)-\int\sin xdx=xSi(x)+\cos x+C.$$

Тема 5 Интегрирование трансцендентных функций

1 Найти интегралы:

а) $\int\sin 3x\cos 5xdx$; м) $\int\frac{\sin xdx}{1-\sin x}$;

б) $\int\cos\frac{x}{6}\cos\frac{5x}{6}dx$; н) $\int\sin^4 x\cos^3 xdx$;

в) $\int\sin x\cos^7 xdx$; о) $\int\frac{dx}{2+3\sin x+2\cos x}$;

г) $\int\frac{dx}{9+4\cos x}$; п) $\int\mathrm{tg}^5 xdx$;

д) $\int\frac{\sin xdx}{\sin^3 x+\cos^3 x}$; р) $\int\frac{dx}{\sin x\cos^5 x}$;

$$\int\mathrm{tg}xdx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=[u=\cos x]=-\int\frac{du}{u}=$$

$$=-\ln|\cos x|+C.$$

е) имеем:

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}=\int\frac{dx}{\cos^2 x(\mathrm{tg}^2 x+2)}=\int\frac{\sqrt{2}d\left(\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{2}}\right)}{2\left(1+\left(\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{2}}\right)^2\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

ж) имеем:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}=\left[\begin{array}{l}\sqrt{3x+1}=u, x=\frac{u^2-1}{3}\\ 3x+1=u^2, dx=\frac{2}{3}udu\end{array}\right]=$$

$$=\int\frac{\frac{2}{3}udu}{\frac{u^2-1}{3}}=2\int\frac{du}{u^2-1}=\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+c=\ln\left|\frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt{3x+1}+1}\right|+C.$$

и) имеем: $$\int\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\left[\begin{array}{l}x=\sin t\\ dx=\cos tdt\end{array}\right]=\int\frac{\cos tdt}{\cos^3 t}=\mathrm{tg}\,t+C=$$

$$=\mathrm{tg}(\arcsin x)+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

2 Используя метод интегрирования по частям, вычислить следующие интегралы:

а) $\int\mathrm{arctg}\,xdx$; г) $\int(x-1)\ln xdx$;

б) $\int x^2e^{-x}dx$; д) $\int\sin(\ln x)dx$;

в) $\int x^2\sin 2xdx$; е) $\int e^{-x}\cos 2xdx$.

Решение. а) имеем:

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = \begin{bmatrix} u = \operatorname{arctg} x, dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2}, x = v \end{bmatrix} = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C .$$

б) имеем:

$$\int x^2 e^{-x} dx = \begin{bmatrix} u = x^2, du = 2xdx \\ dv = e^{-x}dx, v = -e^{-x} \end{bmatrix} = -x^2 e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x, du = dx \\ dv = e^{-x}dx, v = -e^{-x} \end{bmatrix} = -x^2e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}dx\right) =$$

$$= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C .$$

в) имеем:

$$\int x^2 \sin 2xdx = \begin{bmatrix} u = x^2, du = 2xdx \\ dv = \sin 2xdx, v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{bmatrix} =$$

$$= x^2\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) + \int x\cos 2xdx = \begin{bmatrix} u = x, dv = \cos 2xdx \\ du = dx, v = -\dfrac{1}{2}\sin 2x \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{x^2}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2xdx = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin x +$$

$$+ \frac{1}{4}\cos 2x + C .$$

г) имеем:

$$\int (x-1)\ln xdx = \begin{bmatrix} u = \ln x;\ du = \dfrac{1}{x}dx; \\ dv = (x-1)dx;\ v = \dfrac{(x-1)^2}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{(x-1)^2}{2}\ln x - \int \frac{(x-1)^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{(x-1)^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-2x+1}{x}dx =$$

$$= \frac{(x-1)^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int\left(x - 2 + \frac{1}{x}\right)dx = \frac{(x-1)^2}{2}\ln x -$$

$$= -\left(-1 - 2\frac{1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}} + C = C - \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} ;$$

е) имеем:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \begin{bmatrix} x = a\cos t; \\ dx = -a\sin tdt \end{bmatrix} = \int \sqrt{a^2 - a^2\cos^2 t}(-a)\sin tdt =$$

$$= -a^2\int\sqrt{1-\cos^2 t}\sin tdt = -a^2\int \sin^2 tdt = \frac{-a^2}{2}\int(1-\cos 2t)dt =$$

$$= -\frac{a^2}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = \left[t = \arccos\frac{x}{a}\right] =$$

$$= -\frac{a^2}{2}\left(\arccos\frac{x}{a} - \frac{1}{4}\sin\left(\arccos\frac{x}{a}\right)\cos\left(\arccos\frac{x}{a}\right)\right) + C =$$

$$= -\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a} + \frac{a^2x}{8a}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} + C =$$

$$= -\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a} + \frac{x}{8}\sqrt{a^2 - x^2} + C ;$$

ж) имеем: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \begin{bmatrix} a = b = 1, m = 0, n = 4, p = -\dfrac{1}{4} \\ 1 + x^{-4} = t^4, dx = -t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}dt \end{bmatrix} =$

$$= -\int\frac{t^2dt}{t^4-1} = -\frac{1}{2}\left(\int\frac{dt}{t^2-1} + \int\frac{dt}{t^2+1}\right) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C ;$$

и) имеем:

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}} = \begin{bmatrix} a = b = 1; p = -\dfrac{3}{2} \notin \mathbf{Z}; m = -2; n = 2; \\ \dfrac{m+1}{n} = -\dfrac{1}{2} \notin \mathbf{Z}; \dfrac{m+1}{n} + p = -2 \in \mathbf{Z}; \\ t^2 = x^{-2} + 1; x = (t^2-1)^{\frac{1}{2}}; dx = -\dfrac{1}{2}(t^2-1)^{-\frac{3}{2}}2tdt \end{bmatrix} =$$

$$= -\int (t^2-1)\left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right)^{-\frac{3}{2}}(t^2-1)^{-\frac{3}{2}}tdt = -\int\frac{t^2-1}{t^2}dt = -\int dt + \int t^{-2}dt =$$

$$=\frac{3}{2}t^2+3t+3\ln|t-1|+C=\left[t=\sqrt[6]{2x+1}\right]=$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1}+3\sqrt[6]{2x+1}+3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right|+C\,.$$

в) $$\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{dx}{x+1}=\left[t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}},\, dx=\frac{-6t^2dt}{(t^3-1)^2}\right]=$$

$$=-3\int\frac{dt}{t^3-1}=-\frac{1}{2}\ln\frac{(1-t)^2}{1+t+t^2}+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C\,.$$

г) имеем:

$$\int\frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}dx=\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}\\ x=\dfrac{2t-1}{1-t^2},\, dx=2\dfrac{1-t+t^2}{(1-t^2)^2}dt\end{array}\right]=$$

$$=\int\frac{-2tdt}{1-t^2}=\ln\left|1-t^2\right|+C=\left[t=\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}\right]=$$

$$=\ln\left|1-\left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\right)^2\right|+C\,;$$

д) имеем:

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}=\left[\begin{array}{l}x-1=\dfrac{1}{t},\\ dx=-\dfrac{1}{t^2}dt\end{array}\right]=\int\frac{-\dfrac{1}{t^2}dt}{\dfrac{1}{t}\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{t}+1\right)^2}}=$$

$$=-\int\frac{\sqrt{t^2}\,dt}{t\sqrt{-1-2t}}=-\int\frac{|t|dt}{t\sqrt{-1-2t}}=\left[\begin{array}{l}|x|<1\Rightarrow x-1<0\\ \Rightarrow\ \ t<0\end{array}\right]=$$

$$=-\int\frac{-t\,dt}{t\sqrt{-1-2t}}=\int\frac{dt}{\sqrt{-1-2t}}=\int(-1-2t)^{-\frac{1}{2}}dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\int(-1-2t)^{-\frac{1}{2}}d(-1-2t)=-(-1-2t)^{\frac{1}{2}}+C=\left[t=\frac{1}{x-1}\right]=$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-2x+\ln x\right).$$

д) имеем: $\int\sin(\ln x)dx=\left[\begin{array}{l}u=\sin\ln x,\, du=\dfrac{1}{x}\cos\ln x\,dx\\ dv=dx,\, v=x\end{array}\right]=$

$$=x\sin\ln x-\int\cos\ln x\,dx=x\sin\ln x-\left(x\cos\ln x+\int\sin\ln x\,dx\right).$$

Пусть $I=\int\sin\ln x\,dx$. Тогда

$$I=x(\sin\ln x-\cos\ln x)-I\,.$$

Откуда $I=\frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)+C$.

е) имеем: $\int e^{-x}\cos 2x dx=\left[\begin{array}{l}u=e^{-x};\ du=-e^{x}dx;\\ dv=\cos 2x;\ v=\dfrac{1}{2}\sin 2x\end{array}\right]=$

$$=-e^{-x}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\int e^{-x}\cdot\sin 2x dx=\left[\begin{array}{l}u=e^{-x};\ du=-e^{x}dx;\\ dv=\sin 2x;\ v=-\dfrac{1}{2}\cos 2x\end{array}\right]=$$

$$=-\frac{e^{-x}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-x}}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\int e^{-x}\cos 2x dx\right)=$$

$$=-\frac{e^{-x}}{2}\sin 2x+\frac{e^{-x}}{4}\cos 2x-\frac{1}{4}\int e^{-x}\cos 2x dx\,.$$

Отсюда

$$\int e^{-x}\cos 2x dx=-\frac{e^{-x}}{2}\sin 2x+\frac{e^{-x}}{4}\cos 2x-\frac{1}{4}\int e^{-x}\cos 2x dx\,.$$

Выразим искомый интеграл

$$\int e^{-x}\cos 2x dx\left(1+\frac{1}{4}\right)=\frac{e^{-x}}{4}(-2\sin 2x+\cos 2x).$$

Тогда

$$\int e^{-x}\cos 2x dx=\frac{e^{-x}(-2\sin 2x+\cos 2x)}{5}.$$

Тема 3 Интегрирование рациональных функций

Вычислить интегралы:

а) $\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$;

б) $\int \frac{x^2+x+2}{x^3-x^2+x-1}dx$;

в) $\int \frac{x^4+5}{x^2+1}dx$;

г) $\int \frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}dx$;

д) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$;

е) $\int \frac{x^3+2x+1}{x^3+1}dx$;

ж) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$;

и) $\int \frac{x^2-6x+8}{x-5}dx$;

к) $\int \frac{dx}{(x^2-2x)^2}$;

л) $\int \frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)}dx$;

м) $\int \frac{dx}{x^4+1}$;

н) $\int \frac{xdx}{x^3+1}$.

П р и м е р ы о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Найти интегралы от рациональных функций:

а) $\int \frac{2x^5+6x^3+13}{x^4+3x^2}dx$;

б) $\int \frac{x^5-x+1}{x^3+x}dx$;

в) $\int \frac{x+2}{x(x-1)(x+1)(x-2)}dx$;

г) $\int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}dx$;

д) $\int \frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2}dx$.

Р е ш е н и е. а) выделим из неправильной дроби целую часть, деля числитель на знаменатель

$$\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}=2x+\frac{1}{x^4+3x^2}.$$

Разложим полученную в результате дробь на элементарные слагаемые:

$$x^4+3x^2=x^2\left(x^2+3\right).$$

Тогда

2 Выразить через функции *Si(x), li(x),* $\Phi_0(x)$ и элементарные функции интегралы:

а) $\int \frac{e^x}{x}dx,\ x<0$;

б) $\int \frac{x\sin x-\cos x}{x^2}dx$;

в) $\int e^{-(2x^2+4x-5)}dx$;

г) $\int \Phi_0\left(x\right)dx$.

П р и м е р ы о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Вычислить следующие неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$;

б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^3}-\sqrt{2x+1}}$;

в) $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{x+1}$;

г) $\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}dx$;

д) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}$;

е) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$;

ж) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$;

и) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$.

Р е ш е н и е . а) имеем:

$$\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx=\left[\begin{array}{l} x=t^4, \\ dx=4t^3dt \end{array}\right]=\int \frac{1+t}{t^4+t^2}4t^3dt=4\int \frac{t^2+t}{t^2+1}dt=$$

$$=4\int\left(1+\frac{t-1}{t^2+1}\right)dt=4\int\left(1+\frac{t}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+1}\right)=4t+2\ln\left(t^2+1\right)-$$

$$-4\operatorname{arctg}t+C=\left[t=\sqrt[4]{x}\right]=4\sqrt[4]{x}+2\ln\left(\sqrt[2]{x}+1\right)-4\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}+C.$$

б) имеем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^3}-\sqrt{2x+1}}=\left[\begin{array}{l} 2x+1=t^6, \\ x=\frac{1}{2}\left(t^6-1\right), \\ dx=3t^5dt \end{array}\right]=\int \frac{3t^5dt}{t^4-t^3}=3\int \frac{t^2dt}{t-1}=$$

$$=3\int \frac{t^2-1+1}{t-1}dt=3\int\left(t+1-\frac{1}{t-1}\right)dt=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\ln|x-1|+\int\frac{d\left(2x^2+2x+1\right)}{2x^2+2x+1}+\int\frac{dx}{\left(\sqrt{2}x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\ln|x-1|+\operatorname{arctg}(2x+1)+C;$$

д) поскольку

$$x^5+x^4-x^3-x^2=x^2(x+1)^2(x-1),$$

то

$$\frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+1}+\frac{E}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}-\frac{\frac{1}{2}}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}.$$

Тогда

$$\int\frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2}dx=\ln|x|+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+C.$$

Тема 4 Интегрирование иррациональностей

1 Вычислить следующие интегралы:

а) $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}dx$;

б) $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$;

в) $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$;

г) $\int\frac{\left(1-\sqrt[6]{x^3}\right)^3}{\sqrt[3]{x}}dx$;

д) $\int\sqrt{1-2x-x^2}\,dx$;

е) $\int\sqrt{x^2-2x+10}\,dx$;

ж) $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[6]{x}}}{\sqrt{x}}dx$;

и) $\int\frac{x^{10}dx}{\sqrt{1+x^2}}$;

к) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}$;

л) $\int\frac{dx}{\left(x^2-3\right)\sqrt{4-x^2}}$;

м) $\int\frac{\sqrt{x^2+5}}{x^2}dx$;

н) $\int x^2\sqrt{x^2-4}dx$.

$$\frac{1}{x^2\left(x^2+3\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+3}.$$

Приведем к общему знаменателю в правой части

$$\frac{1}{x^2\left(x^2+3\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+3}=\frac{Ax\left(x^2+3\right)+B\left(x^2+3\right)+(Cx+D)x^2}{x^2\left(x^2+3\right)}.$$

Отсюда

$$1=Ax\left(x^2+3\right)+B\left(x^2+3\right)+(Cx+D)x^2$$

Раскроем скобки в правой части и сгруппируем:

$$1=x^3(A+C)+x^2(B+D)+x\cdot 3A+3B.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$x^3: 0=A+C$,

$x^2: 0=B+D$,

$x^1: 0=3A$,

$x^0: 1=3B$.

Отсюда $A=0$, $B=\frac{1}{3}$, $C=0$, $D=-\frac{1}{3}$.

Следовательно,

$$\frac{2x^5+6x^3+13}{x^4+3x^2}=2x+\frac{1}{x^4+3x^2}=2x+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{3\left(x^2+3\right)}.$$

Тогда

$$\int\frac{2x^5+6x^3+13}{x^4+3x^2}dx=\int\left(2x+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{3\left(x^2+3\right)}\right)dx=$$

$$=2\int xdx+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+3}=$$

$$=2\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=x^2-\frac{1}{3x}+\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C;$$

б) подынтегральное выражение является неправильной рациональной дробью. Выделим целую часть подынтегральной функции:

$$\frac{x^5-x+1}{x^3+x}=x^2-1+\frac{1}{x^3+x}$$

Разложим на элементарные последнюю дробь:

$$\frac{1}{x^3+x}=\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)}.$$

Методом неопределенных коэффициентов, найдем неизвестные коэффициенты A, B, C. Имеем

$$1=(A+B)x^2+Cx+A.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ C=0, \\ A=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1, \\ B=-1, \\ C=0. \end{cases}$$

Значит,

$$\frac{1}{x^3+x}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}.$$

Подставляя полученное выражение в интеграл $\int\frac{dx}{x^3+x}$, получим

$$\int\frac{dx}{x^3+x}=\int\frac{dx}{x(x^2+1)}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{xdx}{x^2+1}=$$

$$=\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

Тогда

$$\int\frac{x^5-x+1}{x^3+x}dx=\int\left(x^2-1+\frac{1}{x^3+x}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}-x+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C;$$

в) подынтегральное выражение является правильной рациональной дробью. Разложим ее на элементарные дроби:

$$\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x-2}.$$

Используя метод частных значений, получим:

$$A=\frac{x+2}{(x-1)(x+1)(x-2)}\Big|_{x=0}=1,$$

$$B=\frac{x+2}{x(x+1)(x-2)}\Big|_{x=1}=-\frac{3}{2},$$

$$C=\frac{x+2}{x(x-1)(x-2)}\Big|_{x=-1}=-\frac{1}{6},$$

$$D=\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)}\Big|_{x=2}=\frac{2}{3}.$$

Тогда

$$\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)(x-2)}=\frac{1}{x}-\frac{3}{2}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{6}\frac{1}{x+1}+\frac{2}{3}\frac{1}{x-2}.$$

Подставим в исходный интеграл

$$\int\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)(x-2)}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{2}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{6}\frac{1}{x+1}+\frac{2}{3}\frac{1}{x-2}\right)dx=$$

$$=\ln|x|-\frac{3}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x+1|+\frac{2}{3}\ln|x-2|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{x(x-2)^{\frac{2}{3}}}{(x-1)^{\frac{3}{2}}(x+1)^{\frac{1}{6}}}\right|+C;$$

г) запишем исходный интеграл в виде:

$$\int\frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}dx=\int\left(x+\frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{4x+3}{2x^2+2x+1}dx.$$

Подынтегральное выражение в третьем слагаемом есть правильная рациональная дробь. Разложим ее на элементарные и найдем коэффициенты:

$$\frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{2x^2+2x+1}=\frac{1}{x-1}+\frac{4x+3}{2x^2+2x+1}.$$

Подставим в интеграл и вычислим его

$$\int\frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}dx=\frac{x^2}{2}+\ln|x-1|+\int\frac{4x+2}{2x^2+2x+1}dx+$$

$$+\int\frac{dx}{2x^2+2x+1}dx=$$