Раздел 2 Теория пределов

Тема 1 Числовые последовательности

1.1 Определение числовой последовательности
1.2 Ограниченные и неограниченные последовательности
1.3 Монотонные последовательности
1.4 Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

В курсе школьной математики кратко излагались элементы теории последовательности при изучении арифметической и геометрической прогрессий, при последовательных приближениях иррациональных чисел.

Числовой последовательностью (x_n) называется числовая функция, определенная на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ и принимающая свои значения из множества действительных чисел $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ и *обозначается*:

$$x_n=(x(1);x(2);...;x(n);...) \text{ или } (x_n)=(x_1;x_2;...;x_n;...).$$

Числа $x_1,x_2,x_3,...$ называются *элементами* (*членами*) последовательности (x_n), x_n – *формула* общего члена последовательности, n – *номер* общего члена последовательности.

Последовательность считается заданной, если указан способ получения ее любого элемента.

Основными *способами задания* последовательности являются: формула n-го члена, рекуррентный, словесный, графический.

Пусть даны две последовательности (x_n), (y_n).

Суммой последовательностей (x_n) и (y_n) называется последовательность (x_n+y_n), каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов последовательностей.

Произведением последовательности (x_n) на число m называется последовательность $(m\cdot x_n)$, каждый элемент которой равен произведению соответствующего элемента последовательности на число m.

Произведением последовательностей (x_n) и (y_n) называется последовательность $(x_n\cdot y_n)$, каждый элемент которой равен произведению соответствующих элементов последовательностей.

Если все члены последовательности (y_n) отличны от нуля, то частным последовательностей (x_n) и (y_n) называется последовательность $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$, каждый элемент которой равен частному соответствующих элементов последовательностей.

Последовательность (x_n) называется *ограниченной сверху (снизу)*, если существует число M (m) такое, что каждый элемент последовательности x_n удовлетворяет неравенству $x_n\le M$ ($x_n\ge m$). Числа M и m называются *верхней и нижней гранями* числовой последовательности (x_n):

(x_n) – *ограничена сверху* $\Leftrightarrow$ $\exists M\in\mathbb{R}:\forall n\in\mathbb{N}\quad x_n\le M$.

(x_n) – *ограничена снизу* $\Leftrightarrow$ $\exists m\in\mathbb{R}:\forall n\in\mathbb{N}\quad x_n\ge m$.

Последовательность (x_n) называется *ограниченной*, если она ограничена сверху и снизу, т.е. существуют числа M и m такие, что каждый элемент x_n последовательности удовлетворяет неравенству $m\le x_n\le M$:

$$(x_n) - \textit{ограничена} \Leftrightarrow \exists m,M\in\mathbb{R}:\forall\ n\in\mathbb{N}\quad m\le x_n\le M.$$

Пусть $A=\max\{|m|,|M|\}$. Тогда условие ограниченности можно записать в виде $|x_n|\le A$.

Последовательность (x_n) называется *неограниченной*, если для любого действительного числа $A>0$ существует элемент x_n последовательности, удовлетворяющий неравенству $|x_n|\ge A$, т.е. либо $x_n\ge A$ или $x_n\le -A$:

$$(x_n) - \textit{неограниченна} \Leftrightarrow \forall\ A\in\mathbb{R}_+\ \exists n\in\mathbb{N}:|x_n|\ge A.$$

Последовательность (x_n) называется *неубывающей*, если ее элементы удовлетворяют условию: $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le \ldots$.

Последовательность (x_n) называется *возрастающей*, если ее элементы удовлетворяют условию: $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$.

Последовательность (x_n) называется *невозрастающей*, если ее элементы удовлетворяют условию: $x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge x_n \ge \ldots$.

Последовательность (x_n) называется *убывающей*, если ее элементы удовлетворяют условию: $x_1 > x_2 > \ldots > x_n > \ldots$.

Последовательность (x_n) называется *монотонной*, если является одной из выше перечисленных. Последовательность (x_n) называется *строго монотонной*, если она возрастающая или убывающая.

Последовательность (α_n) называется *бесконечно малой*, если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех номеров $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$:

$$(\alpha_n) - \text{б.м.п.} \Leftrightarrow \ \forall\, \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) : \forall n \ge N(\varepsilon) \quad |\alpha_n| < \varepsilon .$$

Свойства бесконечно малых последовательностей:

– бесконечно малая последовательность (α_n) ограничена;

– сумма и разность бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность;

– произведение бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность;

– произведение бесконечно малой последовательность (α_n) на ограниченную (x_n) есть бесконечно малая последовательность.

Последовательность (x_n) называется *бесконечно большой*, если для любого положительного числа $c > 0$ существует такой номер $N(k)$ такой, что для всех номеров $n > N(k)$ выполняется неравенство $|x_n| > c$:

$$(x_n) - \text{б.б.п.} \Leftrightarrow \ \forall\, c > 0 \ \exists N(k) : \forall n \ge N(k) \quad |x_n| > c .$$

Если последовательность бесконечно большая, то она неограниченна. Если последовательность неограниченна, то она не обязательно бесконечно большая. Если (x_n) бесконечно большая последовательность и все ее члены отличны от нуля, то последовательность $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ является бесконечно малой последовательность. Если (α_n) бесконечно малая последовательность и все ее члены отличны от нуля, то последовательность $\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)$ является бесконечно большой последовательностью.

Тема 2 Предел последовательности

2.1 Определение предела последовательности
2.2 Свойства предела последовательности
2.3 Критерий Коши сходимости последовательности
2.4 Замечательные пределы

Число $a \in \mathbb{R}$ называется *пределом* последовательности (x_n), если для любого положительного действительного числа ε найдется такой номер $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ элементы этой последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$ и *обозначается*: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \ \Leftrightarrow \ \forall\, \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \ge N(\varepsilon) \quad |x_n - a| < \varepsilon .$$

Последовательность, имеющая конечный предел, называется *сходящейся* (к числу *a*), а последовательности, не имеющие конечного предела, – *расходящимися*.

Неравенство $\left|x_n - a\right| < \varepsilon$ означает, что последовательность $\left(x_n - a\right)$ является бесконечно малой последовательностью. Отсюда следует, что любую сходящуюся последовательность можно представить в виде $x_n = a + \alpha_n$, где $\left(\alpha_n\right)$ – бесконечно малая последовательность, где $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Бесконечно большая последовательность $\left(x_n\right)$ имеет бесконечный предел:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \;\Leftrightarrow\; \forall\, A > 0 \;\; \exists N\left(A\right) \in \mathbb{N} : \forall n \ge N\left(A\right) \quad \left|x_n\right| > A .$$

Сходящиеся последовательности обладают следующими *свойствами*:

– сходящаяся последовательность имеет только один предел;

– если последовательность $\left(x_n\right)$ сходится, то она ограничена:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \;\Rightarrow\; \exists M \in \mathbb{R} : \left|x_n\right| \le M ;$$

– сумма (разность) двух сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность, предел которой равен сумме пределов последовательностей

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n + y_n\right) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n ;$$

– произведение двух сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность предел которой равен произведению пределов последовательностей

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n \cdot y_n\right) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n ;$$

– частное двух сходящихся последовательностей $\left(x_n\right)$ и $\left(y_n\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \ne 0$, есть сходящаяся последовательность предел которой равен частному пределов последовательностей

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} ;$$

– если все элементы сходящейся последовательности $\left(x_n\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \ge b$ ($x_n \le b$), то и предел этой последовательности удовлетворяет неравенству $a \ge b$ ($a \le b$);

– пусть последовательности $\left(x_n\right)$, $\left(y_n\right)$, $\left(z_n\right)$ таковы, что $\forall\, n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_n \le y_n \le z_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Тогда последовательность $\left(y_n\right)$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$;

– каждая ограниченная монотонная последовательность сходится.

Последовательность $\left(x_n\right)$ называется *фундаментальной*, если для любого малого действительного числа ε найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех номеров n, больших $N(\varepsilon)$ и любого $p \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$:

$\left(x_n\right)$ – фундаментальна $\Leftrightarrow$

$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists N\left(\varepsilon\right) \in \mathbb{N} : \forall n \ge N\left(\varepsilon\right)$ и $\forall\; p \in \mathbb{N} \qquad \left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$.

Из определения следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left|x_{n+p} - x_n\right| = 0$.

Критерий Коши сходимости последовательности: Для того чтобы последовательность $\left(x_n\right)$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Пределы, к которым сводятся вычисления многих пределов условно называются замечательными пределами. Ниже приводятся некоторые из них:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$ ($a \in \mathbb{R}$); $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$;

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ($a \in \mathbb{R}$); $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{n!} = 0$.

Тема 3 Предел функции

3.1 Понятие функции, сложная и обратная функции

3.2 Способы задания функции

3.3 Определения предела функции по Гейне и по Коши
3.4 Односторонние пределы функции

Под функциями понимается отображение числовых множеств.

Пусть X – произвольное подмножество действительных чисел, $X \subseteq \mathbb{R}$.

Если каждому числу $x \in X$ поставлено в соответствие единственное действительное число $y = f(x)$, то говорят, что на множестве X определена *числовая функция* f. Переменная x называется *независимой переменной* или *аргументом*, y – *зависимой переменной*, множество X называется *областью определения* функции и *обозначается* $D(f)$, а множество $Y = \left\{ y \in \mathbb{R} \;\middle|\; y = f(x), x \in D(f) \right\}$ – *множеством значений* функции и *обозначается* $E(f)$.

Если о функции говорить как об отображении $f : X \to Y$, то $f(x)$ называется *образом элемента* x, а x – *прообразом элемента* $f(x)$. При этом множество Y называется *образом множества* X, множество X – *прообразом множества* Y.

Чтобы определить функцию $y = f(x)$, нужно задать множество X и закон (правило, соответствие) f, переводящий элементы x множества X в элементы y множества Y.

Пусть функции $u = \varphi(x)$ и $y = f(u)$ определены на множествах X и U соответственно, причем множество значений функции φ содержится в области определения f. Тогда функция φ переводит элементы x в элементы u, а функция f переводит элементы u в элементы y: $x \overset{\varphi}{\mapsto} u \overset{f}{\mapsto} y$.

Таким образом, каждому значению x ставится в соответствие (посредством промежуточной переменной u) одно значение $y = f(\varphi(x))$. В этом случае y называется *сложной* функцией (*композицией* функций f и φ) аргумента x. При этом функция $u = \varphi(x)$ называется *промежуточным* аргументом, x – *независимым* аргументом. *Обозначается*: $y = f(\varphi(x))$ или $f \circ \varphi$.

Обратная функция. Пусть функция $y = f(x)$ такова, что каждое значение y она принимает только при одном значении x. Такая функция называется *обратимой*. Тогда уравнение $y = f(x)$ можно однозначно разрешить относительно x, т.е. каждому y соответствует единственное значение x. Это соответствие определяет функцию, которая называется *обратной* к функции f.

Обозначается: $x = f^{-1}(y)$ или f^{-1}.

Если функция f^{-1} является обратной по отношению к функции f, то функция f является обратной по отношению к f^{-1}, т.е. $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$. Функции f и f^{-1} называются *взаимно обратными*, т.е. $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ и $f^{-1}(f(x)) = x$.

Если числовая функция $y = f(x)$ строго монотонна, то существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$. При этом, если f – возрастающая функция, то f^{-1} – возрастающая; если f – убывающая, то f^{-1} – убывающая.

Если же у обратной функции, так же как и у данной, аргумент обозначить через x, а зависимую переменную через y, то обратная функция запишется в виде $y = f^{-1}(x)$.

Функции $x = f^{-1}(y)$ и $y = f^{-1}(x)$ различаются только обозначением зависимой и независимой переменных. Поэтому, чтобы из графика функции $x = f^{-1}(y)$ совпадающего с графиком функции $y = f(x)$, получить график функции $y = f^{-1}(x)$, достаточно поменять местами оси Ox и Oy, т.е. повернуть плоскость чертежа вокруг биссектрисы первого координатного угла. Таким образом, график обратной функции $y = f^{-1}(x)$ симметричен графику данной функции $y = f(x)$ относительно биссектрисы первого координатного угла.

Функция задается одним из следующих способов.

Аналитический способ задания функции состоит в том, что с помощью формулы устанавливается алгоритм вычисления значений функции $f(x)$ для каждого из значений $x \in D$.

Частное значение функции $y = f(x)$ при некотором значении аргумента x_0 записывается в виде

$f(x_0)$ или $y\big|_{x=x_0}$.

При аналитическом задании функции область определения D есть множество значений аргумента x, при которых данная формула имеет смысл.

Аналитически функция $y = f(x)$, $x \in [a;b]$ может быть *неявно* задана уравнением $F(x;y) = 0$, если $\forall x \in [a;b]$ $F(x; f(x)) = 0$.

В некоторых случаях, разрешив уравнение $F(x;y) = 0$ относительно y, удается получить явное задание функции $y = f(x)$.

Аналитически функция $y = f(x)$ может быть задана в *параметрическом* виде. Пусть $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ – две функции одной независимой переменной $t \in T$. Если $x = \varphi(t)$ монотонна на T, то существует обратная к ней функция $t = \varphi^{-1}(x)$. Поэтому функцию $y = \psi(t)$, $t = \varphi^{-1}(x)$ можно рассматривать как сложную функцию, переводящую элемент x в элемент y посредством промежуточной переменной t:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \varphi^{-1}(x), \\ y = \psi(t), \end{cases} \Rightarrow y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = F(x).$$

В этом случае говорят, что сложная функция

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = F(x)$$

задана *параметрическими уравнениями* и пишут:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

где t, *парамет*р, $t \in T$.

Всякую функцию, заданную явно $y = f(x)$, можно задать параметрическими уравнениями.

Действительно,

$$y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = t, \\ y = f(t). \end{cases}$$

Параметрическое задание функций иногда имеет преимущество перед другими формами их задания. В некоторых случаях непосредственная связь между y и x может быть весьма сложной, в то время как функции $x(t)$ и $y(t)$ определяющие функциональную зависимость y от x через параметр t, оказываются простыми.

Табличный способ задания функции осуществляется табличным перечислением n значений аргумента $x_1; x_2; ...; x_n$ и соответствующих им значений функции $y_1; y_2; ...; y_n$.

Графический способ задания функции состоит в представлении функции $y = f(x)$ графиком в некоторой системе координат.

Графиком Γ *функции* $y = f(x)$ называется множество точек $M(x;y)$ плоскости $\mathbb{R}^2$, координаты которых связаны данной функциональной зависимостью:

$$\Gamma = \left\{ M(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = f(x) x \in D(f) \right\}.$$

Средствами элементарной математики для функции $y = f(x)$ с областью определения $D(f)$ в большинстве случаев можно определить следующие характеристики.

Нули функции и знак функции на множестве $D(f)$. Значение $x \in D(f)$ при котором функция $y = f(x)$ обращается в нуль, называется *нулем функции*, т.е. нули функции являются корнями уравнения $f(x) = 0$.

В интервале, на котором функция положительна, график ее расположен выше оси Ox, а в интервале, на котором она отрицательна,– ниже оси Ox; в нуле функции график имеет общую точку с осью Ox.

Четность и нечетность функции. Числовая функция $y = f(x)$ называется *четной* (*нечетной*), если выполняются следующие условия:

1) область ее определения симметрична относительно точки O, т. е. для каждой точки $x \in D(f)$ существует точка $-x \in D(f)$;

2) для любого x из области определения выполняется равенство

$$f(-x)=f(x) \quad (f(-x)=-f(x)).$$

Существуют функции, которые не являются ни четными, ни нечетными. Они называются функциями *общего* вида.

Ось Oy является осью симметрии графика любой четной функции, а начало координат – центром симметрии графика нечетной функции. Графики функций, не обладающих свойствами четности или нечетности, не симметричны.

При изучении поведения четной (нечетной) функции достаточно изучить ее при любом $x>0$ и продолжить это изучение по симметрии на любое $x<0$.

Периодичность функции. Функция $y=f(x)$, определенная на множестве $D(f)$, называется *периодической*, если существует такое число $T>0$, что $\forall\ x\in D(f)$ выполняются следующие условия:

1) $x-T$, $x+T\ \in D(f)$;

2) $f(x)=f(x-T)=f(x+T)$.

Число T называется *периодом* функции.

Если число T является периодом функции $y=f(x)$ для любого $n\in\mathbb{Z}$, то число nT – также период этой функции. Если существует наименьший положительный период функции, то он называется *основным периодом*. Если T – период функции $y=f(x)$, то достаточно построить график на одном из интервалов длиной T, а затем произвести параллельный перенос его вдоль оси Ox на $\pm Tk$, $k\in\mathbb{Z}$. Если функция $f(x)$ – периодическая с периодом T, то функция $f(kx)$ – также периодическая с периодом $\dfrac{T}{|k|}$.

К периодическим функциям относится постоянная функция $f(x)=c$, $c=\text{const}$, $D(f)=\mathbb{R}$. Любое число $T\in\mathbb{R}$ является периодом этой функции, но наименьшего (основного) периода T функция не имеет.

Монотонность функции. Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей (убывающей)* на множестве X, если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее (меньшее) значение функции:

$$f(x) \textit{ возрастает на } X \Leftrightarrow \forall x_1,x_2\in X: x_1<x_2 \quad f(x_1)<f(x_2);$$

$$f(x) \textit{ убывает на } X \Leftrightarrow \forall x_1,x_2\in X: x_1<x_2 \quad f(x_1)>f(x_2).$$

Функция $y=f(x)$ называется *неубывающей (невозрастающей)* на множестве X, если большему значению аргумента из этого множества соответствует не меньшее (не большее) значение функции:

$f(x)$ *не убывает на* $X \Leftrightarrow \forall x_1,x_2\in X: x_1<x_2 \quad f(x_1)\le f(x_2)$;

$f(x)$ *не возрастает на* $X \Leftrightarrow \forall x_1,x_2\in X: x_1<x_2 \quad f(x_1)\ge f(x_2)$.

Возрастающие и убывающие функции называются *строго монотонными*, а неубывающие и невозрастающие – *монотонными*.

Ограниченность функции. Функция $y=f(x)$ называется *ограниченной сверху (снизу)* на множестве $X\subseteq D(f)$, если существует такое число $M\in\mathbb{R}$, что при любых $x\in X$ выполняется условие $f(x)\le M$ ($f(x)\ge M$):

$f(x)$ *ограничена сверху на* $X \Leftrightarrow \exists M\in\mathbb{R}: \forall x\in X \quad f(x)\le M$;

($f(x)$ *ограничена снизу на* $X \Leftrightarrow \exists M\in\mathbb{R}: \forall x\in X \quad f(x)\ge M$).

Функция $y=f(x)$ называется *ограниченной на множестве* $X\subseteq D(f)$, если существует такое положительное число M, что
для любого $x\in X$ выполняется условие $|f(x)|\le M$:

$$f(x) \textit{ ограничена на } X \Leftrightarrow \exists M\in\mathbb{R}: \forall x\in X \Rightarrow |f(x)|\le M.$$

Функция $y=f(x)$ называется *неограниченной сверху* (*снизу*) на множестве $X\subseteq D(f)$ если условия ограниченности не выполняются:

$f(x)$ *неограничена сверху на* $X \Leftrightarrow \forall M\in\mathbb{R}\ \exists x\in X: f(x)>M$;

($f(x)$ *неограничена снизу на* $X \Leftrightarrow \forall M\in\mathbb{R}\ \exists x\in X: f(x)<M$).

Пусть функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$. В точке x_0 значение $f(x_0)$ может быть не определено.

Число A называется *пределом* (*по Гейне*) функции $y = f(x)$ в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любой последовательности точек $x_n \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$, сходящейся к x_0, последовательность соответствующих значений функции $(f(x_n))$ сходится к A:

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall (x_n),\, x_n \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0) : \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a .$$

Число A называется *пределом* (по Коши) функции $y = f(x)$ в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, что при всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta_1$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0 : \forall x \ \ 0 < |x - x_0| < \delta_1 \quad |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Определения предела функции в точке x_0 по Гейне и по Коши эквивалентны.

Предел функции обладает следующими *свойствами*.

– функция $f(x)$ в точке x_0 не может иметь больше одного предела;

– если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет предел, то она ограничена в некоторой окрестности $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$;

– если функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 имеют конечные пределы, т. е. $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$:

1) $\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$;

2) $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$;

3) $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$, $(b \neq 0)$;

4) $\lim_{x \to x_0} (f(x))^n = a^n$, $n \in \mathbb{N}$;

5) $\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{a}$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

– если в $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$ справедливо функциональное неравенство $f(x) \le \varphi(x)$ и существуют конечные пределы $\lim_{x \to x_0} f(x)$, $\lim_{x \to x_0} \varphi(x)$, то $\lim_{x \to x_0} f(x) \le \lim_{x \to x_0} \varphi(x)$;

– если в $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$ справедливы функциональные неравенства $\psi(x) \le f(x) \le \varphi(x)$ и существует $\lim_{x \to x_0} \psi(x) = \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = A$, $A \in \mathbb{R}$, то существует $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$;

– если в окрестности точки x_0 задана сложная функция $y = f(u(x))$ и существуют пределы $\lim_{x \to x_0} u(x) = u_0$ ($u(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$), $\lim_{x \to x_0} f(u) = A$, то существует предел сложной функции $y = f(u(x))$ в точке x_0 и $\lim_{x \to x_0} f(u(x)) = \lim_{u \to u_0} f(u)$.

Левой δ-окрестностью точки x_0 называется множество всех x, удовлетворяющих неравенству $-\delta < x - x_0 \le 0$:

$$U(\delta; x_0 - 0) = \{x \mid -\delta < x - x_0 \le 0\}.$$

Правой δ-окрестностью точки x_0 называется множество всех x, удовлетворяющих неравенству $0 \le x - x_0 < \delta$:

$$U(\delta; x_0 + 0) = \{0 \le x - x_0 < \delta\}.$$

Число A называется *левым пределом* функции $y = f(x)$ в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $\forall x \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0 - 0)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \ \forall x \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0 - 0) \ \ |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Число A называется *правым пределом* функции $y = f(x)$ в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $\forall x \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0 + 0)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \ \forall x \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0 + 0) \ \ |f(x) - A| < \varepsilon$.

Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют конечные правый и левый пределы и они равны между собой $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Критерий Коши существования предела функции: для того чтобы функция $f(x)$ имела в точке $x = x_0$ конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовала такая окрестность $U(\delta; x_0)$ точки x_0 такая, что для любых $\forall x', x'' \in U(\delta; x_0)$ имеет место неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \forall x', x'' \in U(\delta; x_0) \Rightarrow |f(x'') - f(x')| < \varepsilon$

Тема 4 Бесконечно малые функции

4.1 Определение и свойства бесконечно малых функций
4.2 Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций
4.3 Первый и второй замечательные пределы
4.4 Сравнение асимптотического поведения функций

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* функцией (или бесконечно малой) при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Обозначается: $\alpha(x) = o(1)$.

Функция $f(x)$ при $x \to x_0$ имеет конечный предел тогда и только тогда, когда функция $\alpha(x) = f(x) - A$ является бесконечно малой при $x \to x_0$.

Бесконечно малые функции обладают следующими свойствами:

– конечная сумма бесконечно малых функций есть функция, бесконечно малая;

– произведение бесконечно малой функции $\alpha(x)$ и функции ограниченной $\varphi(x)$ есть бесконечно малая функция;

– произведение некоторого числа и бесконечно малой функции есть бесконечно малая функция;

– произведение двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция;

– частное от деления бесконечно малой функции $\alpha(x)$ на функцию $\varphi(x)$, такую, что $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) \neq 0$, есть бесконечно малая функция;

– если функция $\alpha(x)$ при $x \to x_0$ – бесконечно малая, то функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ при $x \to x_0$ – бесконечно большая. Если функция $f(x)$ при $x \to x_0$ – бесконечно большая, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ при $x \to x_0$ – бесконечно малая.

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1.$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1^\infty\right) = e, \ \ \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \left(1^\infty\right) = e.$$

Под *асимптотикой*, или *асимптотическим поведением функции в окрестности некоторой точки* $x_0 \in \mathbb{R}$, понимается описание поведения функции вблизи точки x_0, в которой функция, как правило, не определена.

Асимптотическое поведение функции обычно характеризуется с помощью другой, более простой или более изученной функции, которая в окрестности исследуемой точки с малой относительной погрешностью воспроизводит значения изучаемой функции.

Если $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые функции и

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0,$$

то они называются *бесконечно малыми одного порядка малости*.

Обозначается: $\alpha(x)=O(\beta(x))$.

Запись $\alpha(x)\in O(1)$ означает, что функция $\alpha(x)$ при $x\to x_0$ *ограничена*.

Если функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые и $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то они называются *эквивалентными* (*асимптотически равными)* при $x\to x_0$.

Обозначается: $\alpha(x)\sim\beta(x)$ или $\alpha(x)\approx\beta(x)$ при $x\to x_0$.

Если функция $\alpha(x)$ такова, что $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, то при $x\to x_0$ справедливы следующие асимптотические равенства:

$$\alpha(x)\sim\sin\alpha(x)\sim\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\arcsin\alpha(x)\sim\operatorname{arctg}\alpha(x)\sim$$
$$\sim\ln(1+\alpha(x))\sim e^{\alpha(x)}-1,\ \sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1\sim\frac{1}{n}\alpha(x).$$

Предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения эквивалентных им функций, т. е. если при $x\to x_0$ $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $\beta(x)\sim\beta_1(x)$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Данное свойство используется при вычислении пределов, так как каждую бесконечно малую (или только одну) можно заменить бесконечно малой, ей эквивалентной.

Если функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые и $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то говорят, что $\alpha(x)$ является *бесконечно малой функцией более высокого порядка* по сравнению с функцией $\beta(x)$ и обозначается: $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

Запись $\alpha(x)\in o(1)$ при $x\to x_0$ означает, что функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x\to x_0$. $o(1)$ – множество бесконечно малых функций при $x\to x_0$.

Если функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые и $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=c\neq 0$, $k>0$, то $\alpha(x)$ называется функцией k *-го порядка малости* по сравнению с $\beta(x)$.

Соотношения вида

$$\alpha(x)=O(\beta(x)),\ \alpha(x)=o(\beta(x)),\ \alpha(x)\sim\beta(x)\ \text{при}\ x\to x_0$$

называются *асимптотическими оценками*.

Ниже приведены некоторые важные пределы, которые используются при вычислении:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e.$$

Тема 5 Непрерывность функции

5.1 Определение непрерывности функции
5.2 Точки разрыва и их классификация
5.3 Свойства непрерывных функций
5.4 Равномерная непрерывность функции

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если выполняются следующие три условия:

1) функция $y=f(x)$ определена в точке x_0, т. е. $x_0 \in D(f)$;

2) существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Если в точке x_0 нарушено хотя бы одно из условий 1–3, то функция называется *разрывной в точке* x_0, а точка x_0 – *точкой разрыва*.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0 (*по Коши*), если для любого заданного числа $\varepsilon>0$ можно найти такое число $\delta>0$ (зависящее от ε и x_0), что для всех x, для которых $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$:

$f(x)$ *непрерывна в точке* x_0 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \exists\delta>0 : \forall x \in U(\delta; x_0) \quad |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Пусть $x-x_0=\Delta x$ есть приращение аргумента, а $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta y$ приращение функции в точке x_0. При фиксированном x_0 переменной x приращение Δy является функцией аргумента Δx. Геометрический смысл приращений виден на рисунке 2. 1.

Можно дать еще одно определение непрерывности функции в терминах приращений.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, т. е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y=0$.

Функция $f(x)$, определенная в некоторой левой (правой) окрестности точки x_0 называется *непрерывной слева (справа)* в точке x_0, если существует предел слева (справа) функции $y=f(x)$ и он равен $f(x_0)$:

$f(x)$ *непрерывна справа в точке* $x_0 \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$,

$f(x)$ *непрерывна слева в точке* $x_0 \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$.

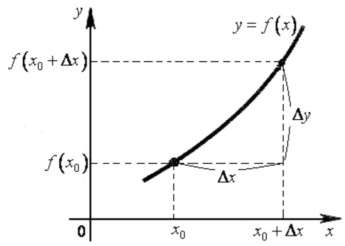

Рисунок 2. 1 – Определение непрерывности функции

Из определения односторонней непрерывности в точке x_0 следует, что функция $f(x)$, определенная в некоторой δ-окрестности точки x_0, непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна в этой точке слева и справа.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0 (*по Гейне*), если для любой последовательности точек $x_n \in U(\delta; x_0)$, сходящейся к x_0, последовательность соответствующих значений функции $(f(x_n))$ сходится к $f(x_0)$:

$A=\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall(x_n),\ x_n \in U(\delta; x_0) : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$.

Функция $f(x)$ непрерывная во всех точках некоторого множества X, называется *непрерывной на множестве* X.

Если $X=[a;b]$, то для непрерывности функции на $[a;b]$ требуется, чтобы $f(x)$ была непрерывна во всех внутренних точках отрезка, непрерывна справа на левом его конце, т.е. в точке a, и непрерывна слева на правом его конце, т.е. в точке b. Класс непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций обозначается $\mathrm{C}[a;b]$.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда функции $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$,

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $g(x)\neq 0$, также непрерывны в этой точке.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на промежутке X, и множество ее значений Y.

Число M (m) называется *точной верхней (нижней) гранью* функции $y=f(x)$ на множестве X, если выполняются следующие условия

1) $\forall x\in X \quad f(x)\leq M$ ($f(x)\geq m$);

2) для любого числа $M^{'}<M$ ($m^{'}>m$) найдется такая точка $x^{'}\in X$, что $f\left(x^{'}\right)>M^{'}$ ($f\left(x^{'}\right)<m^{'}$).

Условие 1) означает, что число M является одной из верхних граней функции $y=f(x)$ на множестве X, условие 2) показывает, что M наименьшая из верхних граней функции. Аналогично для точной нижней грани.

Если множество Y неограниченно сверху, то пишут $\sup\limits_{X} f(x)=+\infty$, если снизу, то $\inf\limits_{X} f(x)=-\infty$.

Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ не является непрерывной.

Разрывы функции классифицируются следующим образом.

Точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва* функции $f(x)$, если $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x)=A$ и $f(x_0)\neq A$.

Вводя новую функцию

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), \text{ если } x\neq x_0,\\ A, \text{ если } x=x_0,\end{cases}$$

получим

$$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f_1(x)=A=f_1(x_0),$$

т. е. новая функция является непрерывной.

Точка x_0 называется *точкой разрыва 1-го рода* функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные односторонние пределы:

$$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x).$$

Если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$, то функция $f(x)$ будет *непрерывной слева*, если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$ – *непрерывной справа*.

Пусть существуют два конечных односторонних предела $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$, не равные друг другу. Разность $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется *скачком* функции $f(x)$ в точке x_0.

Точка x_0 называется *точкой разрыва* 2*-го рода* функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ имеет хотя бы один бесконечный односторонний предел: равен бесконечности:

$$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\infty \text{ или } \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty.$$

При исследовании функции на непрерывность необходимо проверить выполнение условий определения 1. Если x_0 – точка разрыва, то для установления характера разрыва необходимо вычислить односторонние пределы и значение функции в исследуемой точке.

Функция $f(x)$ называется *кусочно-непрерывной на отрезке* $[a;b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках $[a;b]$, за исключением, может быть, конечного числа точек, в которых она имеет разрыв 1-го рода. При этом существуют односторонние пределы в точках a и b. Функция $f(x)$ называется *кусочно-непрерывной на числовой прямой* $\mathbb{R}$, если она кусочно-непрерывна на любом отрезке.

Многочлен $P_n(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$, $a_k\in\mathbb{R}$, $k=\overline{0,n}$, является функцией, непрерывной для любого $x\in\mathbb{R}$.

Всякая рациональная функция $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ непрерывна в любой точке $x\in\mathbb{R}$, для которой $Q(x)\neq 0$. Здесь $P(x)$, $Q(x)$ – многочлены.

Если функция $u=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y=f(u)$ непрерывна в точке $u_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

Тогда справедливы следующие равенства для непрерывных функций:

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = f\left(\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\right),\quad \lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right).$$

Пусть функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и монотонна на некотором множестве X и пусть Y – множество ее значений. Тогда на множестве Y обратная функция $x = f^{-1}(y)$ монотонна и непрерывна.

Все элементарные функции непрерывны во всех точках, принадлежащих их области определения.

Непрерывные функции обладают следующими свойствами.

1 (устойчивость знака непрерывной функции) Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0)\neq 0$, то существует такая окрестность точки x_0, в которой знак функции совпадает со знаком $f(x_0)$.

2 (прохождение непрерывной функции через любое промежуточное значение) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри этого отрезка существует точка ξ, в которой значение функции равно нулю:

$$f(x):\ f(a)f(b)<0\ \Rightarrow\ \exists x_0\in(a;b):\ f(x_0)=0.$$

3 Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $f(a)=A$, $f(b)=B$. Тогда для любого числа C, заключенного между A и B, найдется такая точка $c\in[a;b]$, что $f(c)=C$.

Свойство 3 можно переформулировать так: непрерывная функция, переходя от одного значения к другому, обязательно принимает все промежуточные значения между ними.

4 (ограниченность непрерывных функций) Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке.

5 (достижение непрерывной функцией своих точных граней) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то на этом отрезке она достигает своих нижней и верхней граней, т.е. на нем существуют по крайней мере две точки x_1 и x_2 такие, что

$$M = f(x_1) = \sup_{[a;b]} f(x),\ m = f(x_2) = \inf_{[a;b]} f(x).$$

Из множества функций, непрерывных на числовом промежутке, выделяют равномерно-непрерывные функции.

Функция $f(x)$ называется *равномерно-непрерывной* на множестве $X\subseteq \mathbb{R}$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta(\varepsilon)>0$, такое, что для любых двух точек x_1, $x_2\in X$, удовлетворяющих условию $|x_1-x_2|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$:

$f(x)$ *равномерно-непрерывна в точке* x_0 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x_1,x_2\in X\ \ |x_2-x_1|<\delta\ \ \ |f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$.

Число δ зависит только от ε и является общим для всех значений x_1, $x_2\in X$ переменной x.

Геометрическая интерпретация равномерной непрерывности функции: если $f(x)$ равномерно-непрерывна на X, то $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta(\varepsilon)>0$ такое, что прямоугольник со сторонами $\delta(\varepsilon)$ и ε, параллельными осям Ox и Oy, можно переместить вдоль графика (сохраняя параллельность сторон осям координат), что график не пересечет горизонтальных сторон прямоугольника, а будет пересекать только вертикальные стороны (рисунок 2. 2).

Рисунок 2. 2 – Равномерная непрерывность функции

Очевидно, что равномерно-непрерывная функция $f(x)$ на промежутке X является непрерывной на X.

Теорема (Кантора) Функция $f(x)$, *непрерывная на отрезке* $[a;b]$, *равномерно-непрерывна на этом отрезке.*

Теорема не верна, если отрезок заменить интервалом.

Вопросы для самоконтроля

Определения

1 Сформулируйте определение числовой последовательности.
2 Дайте определение ограниченной и неограниченной последовательности.
3 Какие последовательности называются монотонными, строго монотонными?
4 Сформулируйте определение бесконечно малой и бесконечно большой последовательности.
5 Перечислите свойства бесконечно малых последовательностей.

Дайте определение предела последовательности.