Обобщенные функции

А. Основные понятия и теоремы

Обозначим через $D(\mathbf{R})$ множество всех бесконечно дифференцируемых финитных функций действительного переменного. Это линейное пространство относительно обычных операций сложения числовых функций и умножения их на число. Последовательность $(\varphi_n) \subset D(\mathbf{R})$ называется **сходящейся в** $D(\mathbf{R})$ к функции φ из $D(\mathbf{R})$, если 1) существует конечный интервал, вне которого все φ_n равны нулю; 2) для каждого $k = 0,1,2, ...$ последовательность производных $(\varphi_n^{(k)})$ порядка k равномерно сходится на $\mathbf{R}$ к $\varphi^{(k)}$.

<u>Определение 1</u>. Линейное пространство $D(\mathbf{R})$ с такой сходимостью называется **пространством основных функций**, а его элементы - **основными функциями.**

<u>Определение 2.</u>**Обобщенной функцией на R** называют линейный функционал f на $D(\mathbf{R})$, непрерывный в следующем смысле: если последовательность $(\varphi_n) \subset D(\mathbf{R})$ сходится в $D(\mathbf{R})$ к функции φ, то числовая последовательность $(f(\varphi_n))$ сходится к $f(\varphi)$

Обобщенные функции называют также **распределениями.**

Значение обобщеннойфункции f на основной функции φ часто обозначают (f, φ), а также $(f(x), \varphi(x))$.

<u>Определение 3.</u>**Регулярной обобщенной функцией** называют всякий функционал вида

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in D(\mathbf{R}),$$

где f - интегрируемая по Лебегу на каждом конечном интервале числовой прямой функция.

<u>Определение 4.</u>Обобщенная функция, не являющаяся регулярной, называется **сингулярной обобщенной функцией.**

<u>Определение 5.</u> δ**-функция Дирака** определяется формулой

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in D(\mathbf{R}).$$

Это простейший пример сингулярной обобщенной функции.

Определение 6. Последовательность обобщенных функций (f_n) называется **сходящейся** к обобщенной функции f, если $(f_n, \varphi \;\to\; f, \varphi \quad n \to$ для любой основной функции φ .

Сумма обобщенных функций и произведение обобщенной функции на число определяются как соответствующие операции над функционалами. Возникающее при этом линейное пространство обобщенных функций обозначается $D'(\mathbf{R})$.

Определение 7. **Произведением** бесконечно дифференцируемой на **R** функции α и обобщенной функции f называется обобщенная функция α , задаваемая формулой $(\alpha f, \varphi \;=\; f, \alpha\varphi$

Определение 8. **Производной** обобщенной функции f называется обобщенная функция f', определяемая соотношением $(f', \varphi) = -(f, \varphi'), \varphi \quad D(\mathbf{R})$.

ТЕОРЕМА 1. *Каждая обобщенная функция имеет производные любого порядка.*

ТЕОРЕМА 2. *Сходящуюся последовательность обобщенных функций (ряд) можно почленно дифференцировать.*

ЛЕММА (Дюбуа-Реймон). *Если f интегрируема по Лебегу на (a,b) и* $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = 0$ *для любой основной функции* φ *, то $f(x) = 0$ п.в. на (a,b) (a,b здесь могут принимать и бесконечные значения).*

Б. Задачи к лабораторной работе

Необходимые понятия и теоремы см. выше.

Литература: [1] стр. 282 – 300, [7] стр. 91-109, [9] стр. 203 – 218, [16] стр. 8 - 25.

1. Пусть $\varphi_0 \neq 0, \varphi_0 \in D(\mathbf{R})$. Сходится ли в $D(\mathbf{R})$ последовательность основных функций (φ_n)?

	$\varphi_n(x)$		$\varphi_n(x)$
1.1	$\varphi_0(x)/n$	1.8	$\varphi_0(n-x)/n$
1.2	$\varphi_0(-x)/n^2$	1.9	$(\varphi_0(x) + \varphi_0(-x))/n$
1.3	$\varphi_0(x/n)/n^2$	1.10	$x\varphi_0(nx)$
1.4	$\varphi_0(-nx)/n$	1.11	$x^2\varphi_0(nx)/n$
1.5	$\varphi_0(nx)/n^2$	1.12	$(\varphi_0(x) + \varphi_0(nx))/n$

1.6	$\varphi(-x/n^2)/n$	1.13	$(\varphi(x) + \varphi(x/n))/n$
1.7	$\varphi(x + n)/n$	1.14	$x^3\varphi(n^2x)/n$

2. Являются ли следующие функционалы в пространстве $D(\mathbf{R})$ обобщенными функциями?

2.1	$(f,\varphi) = \varphi($[illegible]$) - $[illegible]	2.8	$(f,\varphi) = v.p.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2}dx$
2.2	$(f,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2+1}dx$	2.9	$(f,\varphi) = \int_{0}^{\infty}\varphi^2(x)dx$
2.3	$(f,\varphi) = \varphi($[illegible]$0)$	2.10	$(f,\varphi) = \int_{0}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}}dx$
2.4	$(f,\varphi) = \varphi(0) - \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx$	2.11	$(f,\varphi) = \varphi($[illegible]$) + $[illegible]$\varphi($[illegible]$1)$
2.5	$(f,\varphi) = \max_{x\in}\varphi(x)$	2.12	$(f,\varphi) = \int_{0}^{1}\varphi(x)\ln x\,dx$
2.6	$(f,\varphi) = \varphi'(0)$	2.13	$(P\frac{1}{x},\varphi) = \int_{0}^{\infty}\frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}dx$
2.7	$(f,\varphi) = v.p.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx$	2.14	

3. Докажите, что следующие обобщенные функции сингулярны.

3.1	$\delta(x)$	3.8	$\delta''(x)$
3.2	$\delta'(x+3)$	3.9	$\delta(x-1) + \delta'(x)$
3.3	$\delta'(x + 2)$	3.10	$2\delta(x + 1)$
3.4	$\delta(x - 1)$	3.11	$-\delta''(x)$
3.5	$e^x\delta(x)$	3.12	$\sin x + \delta(x)$
3.6	$\delta(x) + \delta(x - 1)$	3.13	$e^x + \delta'(x)$
3.7	$\delta(x) + \delta'(x)$	3.14	$\delta(x) + \delta'(x - 1) + \delta''(x - 2)$

4. Докажите, что $f_n \to$ в пространстве $D'(\mathbf{R})$.

	$f_n(x)$	$f(x)$		$f_n(x)$	$f(x)$

4.1	$\delta(x - n)$	0	4.8	$x\delta'(x + n)$	0
4.2	$sinnx$	0	4.9	$cosnx$	0
4.3	$n\chi_{[-,1/n]}(x)$	$\delta(x)$	4.10	$n\chi_{[\ \ /n,0]}(x)$	$\delta(x)$
4.4	$n\chi_{[\ \ /n,1/n]}(x)$	$(1/2)\ \delta(x)$	4.11	$n\chi_{[-\ /n,1]}(x)$	$\delta(x - 1)$
4.5	e^{inx}	0	4.12	$x\delta\ x +\ \imath)$	0
4.6	$n\delta(x - n)$	0	4.13	$e^x\delta'(x - n)$	0
4.7	$n\chi_{[-,1+\ /n]}(x)$	$\delta(x - 1)$	4.14	$n/(n^2x^2+1) +$ $\delta''(x+n)$	$\pi\delta(x)$

5. Найдите производную обобщенной функции f (всюду ниже $\theta\ x) = \begin{cases} \quad x > \\ ,\ x < \end{cases}$).

	f		f
5.1	$sgnx$	5.8	$\chi_{[-1,1]}$
5.2	$x_+^{-1/2}:=x^{-1/2}\theta(x)$	5.9	$\theta(-x)$
5.3	$\theta(x)e^x$	5.10	$ln\|x\|$
5.4	$x_+^{-1/3}:=x^{-1/3}\theta(x)$	5.11	$\chi_{[-1,0]}$
5.5	$\chi_{[0,1]}$	5.12	$\theta(x - 1) + \theta(x + 1)$
5.6	$\|x\|$	5.13	$\theta(x)sinx$
5.7	$\|x\|^{-1/3}$	5.14	$\|x\|^{-1/2}$

6. Пусть f есть ограниченная бесконечно дифференцируемая функция на **R**. Будет ли умножение на f непрерывным оператором в D(**R**)?

7. Докажите сингулярность обобщенной функции $P\dfrac{\cos kx}{x}$ (см. задачу 2.14).

8. Найдите следующие пределы в D'(**R**):

а) $\lim\limits_{k\to} P\dfrac{\cos kx}{x}$;

б) $\ln(x + \ 0) := \lim\limits_{y\to} \ln(x + \ y)$.

9.Докажите, что $\lim\limits_{n\to} \sqrt{n}e^{-\;x^2} = \;/\pi \quad x)$.

10.Докажите, что $\dfrac{1}{x \pm \;ɔ} := \lim\limits_{y\to} \dfrac{1}{x \pm \; y} = ɔ\dfrac{1}{x} \mp \pi \quad x)$ (формулы Сохоцкого).

11.Вычислите производные следующих обобщенных функций

а) $[x]$ - целая часть x;

б) $|sinx|$;

в) $lnx_+ := \theta\;\; x)\ln\, x$;

г) $ln(x + i0)$ (см. задачу 27);

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin\, nx}{n}$.