ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

Обратные операторы.

Необходимые понятия и теоремы: *левый и правый обратные операторы, обратный оператор, ядро оператора, образ оператора, обратимый оператор, корректно разрешимое уравнение, свойства обратимых операторов, теорема Банаха об обратном операторе, условия существования правого, левого обратных операторов.*

Литература: [ ] стр.188-197; [] стр.97-98; [] стр.106-109; [ ]стр.224-230; [ ] стр.118-125, 113-116; [ ] стр.132-142; [ ] стр.58-62.

1. Пусть $A_\lambda \in B(X,Y)$, где λ - числовой параметр либо числовая последовательность; $X_\lambda \in$ *ап.* Выясним, при каких λ существует обратный оператор к оператору A_λ, построить его. При каких λ оператор A_λ непрерывно обратим ?

N	X_λ	Y	A_λ
1.1	$\{x \in C^{(1)}[0,1] / x(0) =$	$C[0,1]$	$\frac{d}{dt} +$
1.2	$\{x \in C^{(1)}[0,1] / x(0) =$	$C[0,1]$	$\frac{d}{dt} + \ (t)I, a \in \ [0,1]$
1.3	$\{x \in C^{(2)}[0,1] / x(0) = x(1) =$	$C[0,1]$	$\frac{d^2}{dt^2} +$
1.4	$\{x \in C^{(2)}[0,1] / x(0) = x'(1) =$	$C[0,1]$	$\frac{d^2}{dt^2} +$
1.5	$\{x \in C^{(2)}[0,1] / x'(0) = x(1) =$	$C[0,1]$	$\frac{d^2}{dt^2} +$
1.6	$\{x \in C^{(2)}[0,1] / x'(0) = x'(1) =$	$C[0,1]$	$\frac{d^2}{dt^2} +$
1.7	$\{x \in C^{(2)}[0,1] / x(0) = x(1) =$	$C[0,1]$	$\frac{d^2}{dt^2} + 2\frac{d}{dt} +$
1.8	$\{x \in C^{(2)}[0,1] / x(0) = x(1) =$	$C[0,1]$	$\frac{d^2}{dt^2} - 2\frac{d}{dt} +$
1.9	$\{x \in \ ^{(1)}[0,1] / x'(0) = \ (1)$	$C[0,1]$	$\frac{d}{dt} + \ I$
1.10	$\{x \in \ ^{(1)}[0,1] / \lambda \ (0) = x'(1)$	$C[0,1]$	$\frac{d}{dt} + \ I$
1.11	$\{x \in \ ^{(1)}[0,1] / x(0) = \ (1)$	$C[0,1]$	$\frac{d}{dt} + \ tI$
1.12	$\{x \in \ ^{(1)}[0,1] / \lambda \ (0) = x(1)$	$C[0,1]$	$\frac{d}{dt} - \ tI$

1.13	$\{x \in C^{(1)}[0,1] \,/\, x(0)+x(1)=0\}$	C[0,1]	$\frac{d}{dt}-\lambda I$
1.14	$\{x \in C^{(1)}[0,1] \,/\, x(0)-x(1)=0\}$	C[0,1]	$(t+1)\frac{d}{dt}-\lambda$
1.15	$\{x \in C^{(1)}[0,1] \,/\, 2x(0)+x(1)=0\}$	C[0,1]	$(t^2+1)\frac{d}{dt}-2t\lambda$
1.16	$\{x \in C^{(2)}[0,1] \,/\, x(0)=x(1)=0\}$	C[0,1]	$(t+2)\frac{d}{dt}-\lambda$
1.17	l_2	l_2	$A_\lambda x = (\lambda_1 x(1), \lambda_2 x(2), \lambda_3 x(3), \dots)$ $\lvert\lambda_n\rvert < M$
1.18	$\{x \in l_2 : x(1)=0\}$	$\{x \in l_2 : x(1)=0\}$	$A_\lambda x = (0, \lambda_1 x(1), \lambda_2 x(2), \lambda_3 x(3), \dots)$ $\lvert\lambda_n\rvert < M$
1.19	$\{x \in C^{(1)}[0,1]: x(0)=0\}$	C[0,1]	$(A_\lambda x)(t)=\lambda x(t)+x'(t)$
1.20	$\{x \in C^{(1)}[0,1]: x(0)=0\}$	C[0,1]	$(A_\lambda x)(t)=\lambda t^2 x(t)+x'(t)$
1.21	C[0,1]	C[0,1]	$(A_\lambda x)(t)=\lambda x(t)+\int_0^1 e^{t+s}x(s)d(s)$
1.22	C[0,1]	C[0,1]	$(A_\lambda x)(t)=x(t)+\lambda\int_0^1 t^2 s^2 x(s)d(s)$
1.23	$C^{(1)}[0,1]$	$C^{(1)}[0,1]$	$(A_\lambda x)(t)=$ $x(t)+\lambda\int_0^1 (t+s)x(s)d(s)$
1.24	$\{x \in C^{(2)}[0,1]:$ $x(0)=x'(0)=0\}$	C[0,1]	$(A_\lambda x)(t)=\lambda x(t)+2x'(t)+x''(t)$
1.25	l_2	l_2	$A_\lambda x =$ $=\left((\lambda+1)x_1, (\lambda+\frac{1}{2^1})x_2, (\lambda+\frac{1}{2^2})x_3, \dots\right)$
1.26	$\{x \in C^{(2)}[0,1]:$ $x(0)=x'(1)=0\}$	C[0,1]	$(A_\lambda x)(t)=\lambda x(t)+x''(t)$
1.27	C[0,1]	$\{x \in C^{(2)}[0,1]:$ $x(0)=x'(0)=0\}$	$(A_\lambda x)(t)=\lambda\int_0^1 (t-s)x(s)d(s)$
1.28	$\{x \in C^{(2)}[0,1]:$ $x(0)=x'(0)=0\}$	C[0,1]	$(A_\lambda x)(t)=\lambda x''(t)$

1.29	*c*	*c*	$A_\lambda x =$ $= \left((\lambda + 1)x(1), (\lambda + \frac{1}{2})x(2), (\lambda + \frac{1}{3})x(3), \ldots \right)$
1.30	$\{x \in {}^{(2)}[0,1]:$ $x(0) = x'(0) = 0\}$	*C[0,1]*	$(A_\lambda x)(t) = \lambda x(t) + x''(t)$

2.Пусть $A: X \to$ **Доказать, что существует непрерывный обратимый оператор A^{-1} и построить его.**

	X	*Y*	A
2.1	c_0	c_0	$Ax = \left(\frac{1}{2}x(1), \frac{1}{3}x(2), \frac{1}{2}x(3), \frac{1}{3}x(4), \ldots \right)$
2.2	l_2	l_2	$Ax = \left(1\left(sin\frac{1}{1} \right)x(1), 2\left(sin\frac{1}{2} \right)x(2), 3\left(sin\frac{1}{3} \right)x(3), \ldots \right)$
2.3	*C[0,1]*	*C[0,1]*	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 e^{t+} x(s)ds$
2.4	*C[0,1]*	*C[0,1]*	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 (1 - st)x(s)ds$
2.5	$C^{(1)}[0,1]$	$C^{(1)}[0,1]$	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 (t +)x(s)ds$
2.6	*C[0,1]*	*C[0,1]*	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 t^2 sx(s)ds$
2.7	$C^{(2)}[0,1]$	$C^{(2)}[0,1]$	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 e^{t-} x(s)ds$
2.8	l_1	l_1	$Ax = \left(\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 x(1), \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3 x(2), \left(1 - \frac{1}{4}\right)^4 x(3), \ldots \right)$
2.9	*C[0,1]*	*C[0,1]*	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 (t +)x(s)ds$
2.10	l_2	l_2	$Ax = \left(\left(1 + \frac{1}{2}\right)x(1), \left(1 + \frac{1}{3}\right)x(2), \left(1 + \frac{1}{4}\right)x(3), \ldots \right)$

2.11	*C[0,1]*	*C[0,1]*	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 tsx(s)ds$
2.12	*C[0,1]*	*C[0,1]*	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 (t+\ )^2 x(s)ds$
2.13	*C[0,1]*	*C[0,1]*	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 (1-\ s)x(s)ds$
2.14	*$C^{(1)}$[0,1]*	*$C^{(1)}$[0,1]*	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 ts^2 x(s)ds$
2.15	*$C^{(2)}$[0,1]*	*$C^{(2)}$[0,1]*	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 tsx(s)ds$
2.16	*C[0,1]*	*C[0,1]*	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 e^{t+s} x(s)ds$
2.17	*C[0,1]*	*C[0,1]*	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 (1-ts)x(s)ds$
2.18	*C[0,1]*	*C[0,1]*	$(Ax)(t) = x(t) - 2\int_0^1 s^2 (t+1)x(s)ds$
2.19	*C[0,1]*	*C[0,1]*	$(Ax)(t) = x(t) + 2\int_0^1 (t+ts-1)x(s)ds$
2.20	*C[0,1]*	*C[0,1]*	$(Ax)(t) = x(t) - \int_0^1 tsx(s)ds$
2.21	*C[0,1]*	*C[0,1]*	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 (s\cos\pi t - \frac{1}{2})x(s)ds$
2.22	*C[0,1]*	*C[0,1]*	$(Ax)(t) = x(t) - \int_0^1 s\sin^2\frac{\pi t}{2} x(s)ds$
2.23	*C[0,1]*	*C[0,1]*	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 e^{t-s} x(s)ds$
2.24	*C[0,1]*	*C[0,1]*	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 (t+s)x(s)ds$
2.25	*C[0,1]*	*C[0,1]*	$(Ax)(t) = x(t) - 2\int_0^{1/2} (x-t^2)x(s)ds$

3. **Пусть** $A:X\to Y$.
   1. **Что представляет собой** *R(A)* **область значений оператора** *A* **?**
   2. **Существует ли на** *R(A)* **левый обратный оператор** *B* **?**

3. **Является ли оператор $B : R(A) \to$ ограниченным, если он существует.**
4. **Существует ли обратный оператор A^{-} ?**

N	X	Y	A
3.1	$C^2[0,1]$	$C[0,1]$	$Ax(t) = x'(t)$
3.2	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$Ax(t) = \int_0^t x(s)ds$
3.3	$L_5[-1,-1]$	$L_2[-1,-1]$	$Ax(t) = \int_{-1}^1 e^t sx(s)ds$
3.4	$C[-3,3]$	$C[-3,3]$	$Ax(t) = x\left(\frac{1}{3}t^2\right)$
3.5	l_2	l_2	$Ax = 0, x(1), x(2), \ldots, x(k), \ldots)$
3.6	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$Ax(t) = t\int_0^t x(s)ds$
3.7	l_5	l_5	$Ax = \frac{1}{2}x(1), \frac{1}{2^2}x(2), \ldots, \frac{1}{2^k}x(k), \ldots)$
3.8	l_2	l_2	$Ax = x(2), x(3), \ldots, x(k), \ldots)$
3.9	$C[-1,1]$	$C[-1,1]$	$Ax(t) = x(t^2)$
3.10	$L_2[0,1]$	$L_2[0,1]$	$Ax(t) = \int_0^1 t^2 sx(s)ds$
3.11	l_2	l_3	$Ax = 0, 2x(1), 3x(2), \ldots, kx(k- \ ), \ldots)$
3.12	l_3	l_1	$Ax = x(2), 0, x(1), \frac{x(3)}{3^2}, \frac{x(4)}{4^2}, \ldots)$
3.14	l_2	l_2	$Ax = x(2), x(1), x(4), x(3), \ldots, x(2k), x(2k- \ ), \ldots)$
3.15	l_1	l_2	$Ax = (1), 0, x(2), x(3), \ldots, x(k), \ldots)$
3.16	$l_{3/2}$	l_1	$Ax = x(3), x(2), x(1) + (2), \frac{x(4)}{2^4}, \ldots, \frac{x(k)}{2^k}, \ldots)$
3.17	l_∞	l_∞	$Ax = x(1), \frac{1}{2}x(2), \ldots, \frac{1}{k}x(k), \ldots)$
3.18	$C^{(1)}[0,1]$	$L_2[0,1]$	$Ax(t) = x'(t)$
3.19	l_∞	l_2	$Ax = x(1), \frac{1}{2}x(2), \ldots, \frac{1}{2^{k-}}x(k), \ldots)$
3.20	$L_2[0,1]$	$L_2[0,1]$	$Ax(t) = x(t)$
3.21	$L_2[0,1]$	$L_1[0,1]$	$Ax(t) = \sqrt{t}x(t)$
3.22	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$Ax(t) = \int_{-1}^1 e^{t-s}x(s)ds$
3.33	$C^1[-2,1]$	$C[-2,1]$	$Ax(t) = x'(t)$
3.34	l_3	l_3	$Ax = 0, x(1), x(2), \ldots 0$
3.35	$l_{5/2}$	$l_{5/2}$	$Ax = x(2), x(3), x(4), \ldots)$

3.36	$l_{3/2}$	$l_{3/2}$	$Ax = \left(\frac{1}{5}x(1), \frac{1}{25}x(2), \ldots, \frac{1}{5^k}x(k), \ldots\right)$
3.37	l_2	l_2	$Ax = \; x(2) - \;(1), x(2) + \;(3), 2x(2) - \;(1), x(4), x(5),$
3.38	l_3	l_3	$Ax = \; 0, x(1), x(2), \ldots kx(k - \;), \ldots)$
3.39	l_4	l_4	$Ax = \; x(2), x(1), x(4), x(3), \ldots, x(2k), x(2k - \;), \ldots)$
3.40	l_∞	l_2	$Ax = \; x(1) - \;(2), 2x(2) - \; x(1), x(3), x(4), \ldots)$
3.41	l_2	l_∞	$A =$
3.42	$C[0,1]$	$C^{(1)}[0,1]$	$(Ax)(t) = \int_0^t x(s)ds$
3.43	l_1	l_1	$Ax = (x(2), x(3), x(4), \ldots)$
3.44	l_2	l_2	$Ax = (2x_1, 4x_2, 2x_3, 4x_4, \ldots)$
3.45	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t) = x(\sqrt{t})$
3.46	c_0	c_0	$Ax = \left(\frac{1}{1+1}x_1, \frac{2}{2+1}x_2, \frac{3}{3+1}x_3, \ldots\right)$
3.47	c	c	$Ax = \left(0, \left(1 - \frac{1}{2}\right)x(1), \left(1 - \frac{1}{3}\right)x(2), \left(1 - \frac{1}{4}\right)x(3), \ldots\right)$
3.48	l_∞	l_2	$Ax = \left(\frac{x(1)}{1}, \frac{x(2)}{2}, \frac{x(3)}{3}, \ldots\right)$
3.49	$L_2[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t) = \int_0^1 tx(s)ds$
3.50	$C[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t) = tx(1)$
3.51	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t) = \int_0^t (t - \;)x(s)ds$
3.52	l_1	l_1	$Ax = (x(3), x(1), x(4), x(3), x(6), x(5), \ldots)$
3.53	$C[0,1]$	$C^{(2)}[0,1]$	$(Ax)(t) = \int_0^t (t - \;)x(s)ds$