ГЛАВА 7. УРАВНЕНИЯ С КОМПАКТНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

А. 1.Компактные операторы и их свойства.

Определение 1. Пусть X и Y – банаховы пространства. Линейный оператор A называется **компактным** (вполне непрерывным), если он любое ограниченное подмножество X переводит в предкомпактное подмножество Y.

Множество всех компактных операторов из X в Y будем обозначать $K(X,Y)$. Очевидно, $K(X,Y)\subset LB(X,Y)$.

Множество $K(X,Y)$ является **замкнутым** векторным подпространством пространства $LB(X,Y)$, другими словами:

1) сумма компактных операторов является компактным оператором ($A,B\in K(X,Y) \Rightarrow A+B\in K(X,Y)$);
2) произведение компактного оператора на число – компактный оператор ($\lambda\in\mathbf{K}$, $A\in K(X,Y) \Rightarrow \lambda A\in K(X,Y)$);
3) предел сходящейся по норме последовательности компактных операторов – оператор компактный ($A_n\in K(X,Y)$, $\|A_n - A\| \to 0$, $n\to\infty \Rightarrow A\in K(X,Y)$).

Кроме того, имеют место также следующие свойства:

4) сопряжённый к компактному компактен;
5) произведение компактного оператора на линейный ограниченный является компактным оператором
(а) $A\in K(X,Y)$, $B\in LB(Y,Z) \Rightarrow BA\in K(X,Z)$,
б) $A\in LB(X,Y)$, $B\in K(Y,Z) \Rightarrow BA\in K(X,Z)$);
6) тождественный оператор $I : X \to X$ является компактным тогда и только тогда, когда $\dim X<+\infty$.

Определение 2. Линейный оператор $A : X \to Y$ называется оператором **конечного ранга**, если:

1) его образ является конечномерным подпространством X;
2) оператор A ограничен ($A\in LB(X,Y)$).

Очевидно, что каждый оператор конечного ранга компактен. Предел последовательности операторов конечного ранга является компактным операторам. Для гильбертовых и банаховых пространств со счетным базисом верно и обратное: любой компактный оператор является пределом сходящейся по норме последовательности операторов конечного ранга.

ТЕОРЕМА 1. *Если $K(t,s)\in C([a.b]\times[a,b])$, то интегральный оператор $Ax(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)ds$ компактен в пространстве $C[a,b]$ (т. е. $A\in K(C[a,b])$).*

ТЕОРЕМА 2. *Если* $K(t,s)\in L_2([a.b]\times[a,b])$, *то интегральный оператор* $Ax(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)ds$ *компактен в пространстве* $L_2[a,b]$, *(т.е.* $A\in K(L_2[a,b])$*).*

2.Теория Рисса-Шаудера уравнений с компактными операторами.

Пусть $X\in$ *Ban*, $K\in$ *K(X).* Рассмотрим следующие уравнения $(x,y\in X, f,g\in X')$:

$$x - Kx = y,\quad (1)$$

$$x - Kx = 0,\quad (2)$$

$$f - K' f = g,\quad (3)$$

$$f - K' f = 0.\quad (4)$$

ТЕОРЕМА 1. *Если K - компактный в банаховом пространстве X оператор, то пространства* $Ker(I - K)$ *и* $Ker(I - K')$ *конечномерны,* $dim(I - K)=dim(I - K')<+\infty$, *а образы* $Im(I - K)$, $Im(I - K')$ *замкнуты.*

ТЕОРЕМА 2 (Альтернатива Фредгольма). *Если K - компактный оператор в банаховом пространстве X, то для уравнений* (1) - (4) *возможны только два случая:*

I. *Уравнение* (2) *имеет только нулевое решение. Тогда:*
   1) *уравнение* (4) *имеет только нулевое решение;*
   2) *уравнение* (1) *имеет, и притом единственное, решение* $\forall y\in X$;
   3) *уравнение* (3) *имеет, и притом единственное, решение* $\forall g\in X'$.

II. *Уравнение* (2) *имеет* $m\in N$ *линейно независимых решений* $x_1, x_2,\dots,x_m$. *Тогда:*
   1) *уравнение* (4) *имеет m линейно независимых решений* $f_1, f_2,\dots,f_m$;
   2) *уравнение* (1) *имеет решение тогда и только тогда, когда* $f_k(y)=0$, $\forall k=\overline{1,m}$. *Если решение существует, оно не единственно, а зависит от m произвольных постоянных* $c_1, c_2,\dots,c_m$ *и имеет вид* $x=x_0+\sum_{k=1}^{m} c_k x_k$, *где* x_0 *– частное решение уравнения* (1);
   3) *уравнение* (3) *имеет решение тогда и только тогда, когда* $g(x_k)=0$ $\forall k=\overline{1,m}$ *Если решение существует, то оно зависит от m произвольных постоянных* $d_1, d_2,\dots,d_m$ *и имеет вид* $f=f_0+\sum_{k=1}^{m} d_k f_k$, *где* f_0 *– частное решение уравнения* (3).

3.Интегральные уравнения. Альтернатива Фредгольма для интегральных уравнений.

Определение 1. **Интегральным уравнением Фредгольма второго рода** называется уравнение

$$x(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds + y(t). \qquad (1)$$

Здесь x – неизвестная функция, K, y - известные функции, называемые **ядром** и **свободным членом** уравнения соответственно, $a,b \in \mathbf{R}$.

Будем рассматривать уравнение (1) в комплексных пространствах $L_2[a,b]$ или $C[a,b]$. При этом предполагается, что $y \in L_2[a,b]$, $K \in L_2([a,b]\times[a,b])$ (соответственно $y \in C[a,b]$, $K \in C([a,b]\times[a,b])$).

Определение 2. Ядро уравнения (1) называется **вырожденным**, если оно имеет вид

$$K(t,s) = \sum_{j=1}^{n} u_j(t) v_j(s), \qquad (2)$$

где функции u_j, v_j линейно независимы.

Если ядро уравнения (1) – вырожденное, то, подставив (2) в (1), получаем:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j u_j(t) + y(t), \quad (3)$$

где

$$a_j = \int\limits_a^b v_j(s)x(s)ds. \qquad (4)$$

Для нахождения неизвестных a_j подставляют выражение (3) для x в (1) или (4). При этом возникает система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными.

Важнейшие свойства уравнения (1) описываются альтернативой Фредгольма. Для ее формулировки запишем **однородное, сопряженное** и **сопряженное однородное** уравнения, соответствующие уравнению (1), в пространстве $L_2[a,b]$:

$$x(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds, \qquad (5)$$

$$u(t) = \int\limits_a^b \overline{K(s,t)}u(s)ds + v(t), \qquad (6)$$

$$u(t) = \int_a^b \overline{K(s,t)}u(s)ds \qquad (7)$$

Следующая альтернатива справедлива как в пространстве $L_2[a,b]$ так и в пространстве $C[a,b]$ (при указанных выше ограничениях на K). В дальнейшем X - это либо $L_2[a,b]$, либо $C[a,b]$, и интегральный оператор компактен в X.

ТЕОРЕМА 1 (Альтернатива Фредгольма для интегральных уравнений).

Для уравнений (1), (5), (6), (7) *возможны только два случая*:

I. *Уравнение* (5) *имеет только нулевое решение. Тогда*:

1) *уравнение* (7) *имеет только нулевое решение;*
2) *для любой функции* $y \in X$ *существует, и притом единственное решение* $x \in X$ *уравнения* (1);
3) *для любой функции* $v \in X$ *существует, и притом единственное решение* $u \in X$ *уравнения* (6).

II. *Уравнение* (5) *имеет конечное число* $m \in \mathbf{N}$ *линейно независимых решений* $x_1, x_2, x_3, \dots x_m$ $(x_k \in X)$. *Тогда:*

1) *уравнение* (7) *имеет* m *линейно независимых решений* $u_1, \dots, u_m$ $(u_k \in X)$;
2) *уравнение* (1) *разрешимо для данной функции* $y \in X$ *тогда и только тогда, когда*

$$\int_a^b y(t)\overline{u_k(t)}dt = 0, \quad k=\overline{1,m}. \qquad (8)$$

При выполнении условий (8) *решение* (1) *имеет вид* $x = x_0 + \sum_{k=1}^{m} c_k x_k$, *где* c_k *– произвольные постоянные,* x_0 *– частное решение* (1).

3) *Уравнение* (6) *разрешимо в* X *для данной функции* $v \in X$ *тогда и только тогда, когда*

$$\int_a^b x_k(t)v(t)dt = 0, \quad k=\overline{1,m}. \qquad (9)$$

При выполнении условий (9) *решение* $u \in X$ *уравнения* (6) *имеет вид* $u = u_0 + \sum_{k=1}^{m} d_k u_k$ *, где* $d_л$ *– произвольные постоянные, а* u_k *– частное решение уравнения* (6).

4.Самосопряжённые операторы в гильбертовом пространстве.

Определение 1. Линейный непрерывный оператор $A{:}H \to H$, где H – гильбертово пространство, называется **самосопряжённым,** если $A=A^*$ или, что то же самое, $(Ax, y) = (x, Ay)$ для всех $x, y \in H$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть A – самосопряжённый оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда:*

1) квадратичная форма (Ax, x) принимает только вещественные значения. Собственные значения оператора A вещественны;

2) собственные векторы оператора A, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны;

3) для любого подпространства $L \subset H$*, инвариантного относительно A (т.е.* $A(L) \subset L$*), его ортогональное дополнение* $L^{\perp}$ *инвариантно относительно A;*

4) $\sup_{||x||=1} |(Ax, x)| = \|A\|,$ *;*

5) *существует спектральное значение* $\lambda \in \sigma(A)$ *такое, что* $|\lambda| = \|A\|$.

ТЕОРЕМА 2 (Гильберт). *Пусть A - самосопряженный компактный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда в H существует полная ортонормированная система, состоящая из собственных векторов оператора A.*

Интегральный оператор

$$Ax(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds \quad (K(t,s) \in L_2([a,b] \times [a,b]))$$

является компактным самосопряженным оператором в пространстве $L_2[a,b]$, если $K(t,s) = \overline{K(s,t)}$.

Пусть $e_k(t)$ – полная ортонормированная система, состоящая из собственных функций оператора A, отвечающих собственному значению $\lambda_к$.

Решение уравнения

$$x(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)ds + y(t) \qquad (1)$$

будем искать в виде $x=\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$.

Если $y=\sum_{k=1}^{\infty} y_k e_k$ - разложение y в ряд Фурье по e_k, то возможны два случая:

1) $\lambda_k \neq 1$. Тогда $x(t)=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-\lambda_k} y_k e_k(t)$;

2) $\lambda_k = 1$, при $k=k_1,k_2,\dots,k_m$. Тогда решение существует тогда и только тогда, когда

$y_k=0$, при $k=k_1,\dots,k_m$ $\qquad (y_k=(y,\ e_k))$. (2)

При выполнении (2) решение имеет вид:

$$x(t)=\sum_{k\neq k_e} \frac{1}{1-\lambda_k} y_k e_k(t) + \sum_{e=1}^{m} c_{k_b} e_{k_b}(t),$$

где c_{k_e} - произвольные постоянные.