ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

Метрические пространства. Сходящиеся последовательности в метрических пространствах.

Необходимые понятия и теоремы: *метрика, метрическое пространство, сходящаяся числовая последовательность, сходящаяся последовательность функций, сходящаяся последовательность в метрическом пространстве, предел последовательности, метрические пространства $C[a,b]$? l_p, l_0, c_0, s, $L_p[a,b]$, $C^{(1)}[a,b]$ и конкретный смысл сходимости в них.*

Литература: [1]стр. 79-86,104-114; [2]стр.28, 33; [8]стр.48-52; [9]стр.48-49; [11]стр. 23-33

1. Проверить, сходится ли заданная последовательность x_n- точек метрического пространства X к точке a, где

N	*X*	x_n	*a*
1.1	*C[0,2]*	$(tn^2+1)/(n^2+t)$	t
1.2	*C[0,5]*	$(nt^2+n^2t)/(n^2t+1)$	1
1.3	*C[-3,3]*	$\sqrt{t^2} + \ / n^3$	$\lvert t \rvert$
1.4	*C[0,8]*	$(t/8)^n-(t/8)^{2n}+t$	t
1.5	*C[0,1]*	$t^{2n}-t^{n+1}+t$	t
1.6	*C[-4,4]*	$\frac{1}{n^2}\sqrt{n^4t^2 +}$	t
1.7	*C[1,2]*	$n^2(\sqrt{t+1/n^3} - \sqrt{t}$	$\frac{1}{2\sqrt{t}}$
1.8	*C[1/2,3/2]*	$(t^n-t)/(1+t^n)$	1
1.9	*C[0,2]*	$\frac{tn}{n+}$	t
1.10	*C[-3,3]*	$\sqrt{t^2+\frac{1}{n^2}}$	$\lvert t \rvert$
1.11	*C[0,1]*	$t^n - {}^{n+1} +$	t
1.12	*C[1,2]*	$n\left(\sqrt{\frac{1}{n}+}\right) - \sqrt{t}$	$\frac{1}{2\sqrt{t}}$
1.13	*C[0,2]*	$\sqrt[n]{1+ {}^n}$	$\begin{cases} 1, t \in [0,1] \\ t, t \in [1,2] \end{cases}$
1.14	*C[0,5]*	$\frac{nt^2 + \imath^2 t}{1+ \imath^2 t}$	1
1.15	*C[0,1]*	$\sqrt[n]{1+ {}^n}$	t

1.16	$C[0,1/3]$	$3^n t^n - 3^{n+1} t^{n+1} - 3t^n$	0
1.17	l_∞	$(\underbrace{(\frac{4n+}{4n+})^n,\dots,(\frac{4n+}{4n+})^n}_{n},0,\dots)$	$(e^{-1/2},e^{-1/2},\dots)$
1.18	$l_{8/5}$	$(\underbrace{\frac{cos(1/n)}{n},\dots,sin\frac{cos(1/n)}{n}}_{n},0,0\dots)$	$(0,0,0,\dots)$
1.19	l_1	$\underbrace{(sin\frac{1}{2^n},\dots,sin\frac{1}{2^n}}_{n^2},0,0\dots)$	$(0,0,0,\dots)$
1.20	$l_{3/2}$	$((1+\ /n)^n,(sin\,n^2)/n,(sin\,n^3)/n^2,$ $\cdots,(sin\,n^k)/n^{k-}\ ,\cdots)$	$(e,0,0,\dots)$
1.21	l_3	$\underbrace{\frac{n^2}{2^2},\dots,\frac{n^2}{2^2}}_{n^2},0,0,\dots)$	$(1,0,0,\dots)$
1.22	l_∞	$(0,7/8,\dots,(n^3-1)/n^3,0,0,\dots)$	$(0,7/8,\dots,\frac{k^3-}{k^3},$ $\frac{(k+\ )^3-1}{(k+\ )^3},\dots)$
1.23	l_3	$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}},\dots,\frac{1}{\sqrt{n}}}_{n^2},0,0,\dots)$	$(0,0,0,\dots)$
1.24	l_2	$(\underbrace{\frac{1}{n^2},\dots,\frac{1}{n^2}}_{n^2},n,0,0,\dots)$	$(0,0,0,\dots0)$
1.25	l_4	$(1,\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\dots,\frac{1}{\sqrt[3]{n}},0,\dots)$	$(1,\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\dots,\frac{1}{\sqrt[3]{k}},\dots)$
1.26	l_2	$(\underbrace{\frac{sin\,n}{n},\dots,\frac{sin\,n}{n}}_{n},0,0,\dots)$	$(0,0,\dots)$
1.27	$l_{7/4}$	$(\underbrace{\frac{cos\,n}{n^2},\dots,\frac{cos\,n}{n^2}}_{n},0,\dots)$	$(1,0,\dots)$
1.28	l_∞	$\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n,\left(\frac{n+1}{n}\right)^n,\dots,\left(\frac{n+1}{n}\right)^n,\dots\right)$	$(e,e,\dots,e,\dots)$
1.29	l_1	$\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}},\frac{1}{\sqrt{n}},\dots,\frac{1}{\sqrt{n}}}_{n},0,0,\dots\right)$	$(0,0,\dots,0,\dots)$

1.30	c_0	$(1/n,1/n^2,\dots,1/n^2,\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}},\dots,\frac{1}{\sqrt{n}}}_{n},0,0,\dots)$	$(0,0,\dots)$
1.31	$l_{5/3}$	$(\underbrace{1,0,\dots,0}_{n},\underbrace{1+\frac{1}{n},\dots,1+\frac{1}{n}}_{n^2},0,0\dots)$	$(1,1,0,0,0,\dots)$
1.32	$L_1[0,1]$	$n(\sqrt{t+1/n}-\sqrt{t})$	$\frac{1}{2\sqrt{t}}$
1.33	$L_1[2,4]$	$(1+t/n)^n$	e^t
1.34	$L_2[0,2]$	$1/(1+nt)$	0
1.35	$L_4[0,3]$	$(t/3)^n+2t$	$2t$
1.36	$L_{4/3}[-1,2]$	$(t/2)^n+\sin t$	$\sin t$
1.37	$L_1[0,1]$	$e^{n(t-1)}$	0
1.38	$L_{3/2}[-2,0]$	$\sin t/n+2t^2$	$2t^2$
1.39	$L_2[0,3]$	$(\sin nt)/n^2+t^3$	t^3
1.40	$L_1[0,1]$	$n\sin(t/n)$	t
1.41	$L_1[-1,1]$	$\sqrt[3]{t+1/n^3}$	$\sqrt[3]{t}$
1.42	$L_1[-1,1]$	$n(\sqrt[3]{t+\frac{1}{n}}-\sqrt[3]{t})$	$\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$
1.43	$L_3[1,3]$	$\frac{n^2e^t}{1+n^2e^{2t}}$	e^{-t}

2. Является ли заданное условие : а) необходимым, б) достаточным, с) необходимым и достаточным для сходимости последовательности x_n в метрическом пространстве X?

N	x	условие
2.1	$C[a,b]$	$\forall t\in[a,b]$ *существует предел числовой последовательности* $X_n(t)$
2.2	l_1	$\forall k\in N$ *существует предел числовой последовательности* $X_n(k)$
2.3	l_4	$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\in N}\lvert x_n(k)-a(k)\rvert=0$, *где* $a=(a(1),a(2),\dots,a(k),\dots)\in$
2.4	l_∞	$\forall k\in N$ *существует предел числовой последовательности* $X_n(k)$
2.5	c_0	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lvert x_n(k)-a(k)\rvert\right)=0$, *где* $a=(a(1),a(2),\dots,a(k),\dots)$
2.6	s	$\forall k\in N$ *существует предел числовой последовательности* $X_n(л)$
2.7	$C_L[a,b]$	*Последовательность* $x_n(t)$ *точечно сходится к непрерывной функции* $a(t)$

2.8	l_2	$\lim\limits_{n\to}\left(\sum\limits_{k=}^{\infty}\lvert x_n(k)-a(k)\rvert\right) =)$, *где a=(a(1),a(2),…,a(k),…)*
2.9	l_1	$\lim\limits_{n\to}\left(\sum\limits_{k=}^{\infty}\lvert x_n(k)-a(k)\rvert^{2}\right) =)$, *где a=(a(1),a(2),…,a(k),…)*
2.10	$C^{(1)}[a,b]$	*Последовательность* $x_n'(t)$ *точечно сходится к непрерывной функции y(t)*

3. Найти предел последовательности x_n в метрическом пространстве X, если он существует.

N	*X*	x_n
3.1	*C[-1,0]*	$\frac{1}{n}\sqrt[3]{n^3t+}$
3.2	*C[1,2]*	$(2t^n-1)/(1+t^n)$
3.3	*C[-1,1/2]*	$\frac{(t+\ )^{2n}-\ ^{2n}}{(t+\ )^{2n}}$
3.4	*C[1,2]*	$n\sin(t^2/n)+t^3/n$
3.5	*C[-1,1]*	$(1+t/n)^n-\cos t/n+1$
3.6	*C[0,9]*	$9^nt^n-t^{2n})/9^{2n}$
3.7	*C[-1,5]*	$arctg(n(t^2+1))$
3.8	*C[1,7]*	$(t^2+1atctg(n^2t)$
3.9	*C[-1,0]*	$N^3t^3/(5+n^3t^3)$
3.10	$C[-\frac{}{2},0]$	$(\sin t)^{2n}+\sqrt{t/n}$
3.11	*C[1,2]*	$\frac{t^2}{n^2}\ln\frac{t}{n}$
3.12	$C[-\ \ \pi]$	$\frac{4\cos^n t+}{5+\cos^{2n}t+}$
3.13	*C[0,3]*	$\frac{3^nt^n-\ ^{2n}}{3^{2n}}$
3.14	*C[-1,1]*	$n(\sqrt[3]{t+\frac{1}{n}}-\sqrt{t})$
3.15	*C[0,2]*	$\frac{8^nt^n-\ ^{2n}}{8^{2n}}$
3.16	*C[0,1]*	$\frac{n}{1+\ ^2t}$
3.17	*C[-1,0]*	$\frac{nt}{1+\ ^2t^2}$

3.18	*C[1,3]*	$\frac{ne^t}{1+\ \imath^2 e^{\sqrt{t}}}$
3.19	*C[0,2]*	$\frac{t^2 n}{n+\ \ ^2}$
3.20	*C[-1,1]*	$\sqrt{t^2+\frac{1}{n^2}}$
3.21	*C0,1]*	$t^n\text{-}t^{n+1}$
3.22	*C[0,1]*	$n(\sqrt{t+\frac{1}{n}}-\ \sqrt{t}$
3.23	*C[-2,3]*	$n\sin\frac{1}{n}$
3.24	l_∞	$(\underbrace{tg(1+\frac{1}{n})^n,\cdots,tg(1+\frac{1}{n})^n}_{n},0,0\ldots)$
3.25	l_3	$(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}},\cdots,\frac{1}{\sqrt{n}}}_{n},1,0,0\ldots)$
3.26	l_2	$(\underbrace{\sin\frac{1}{n},\cdots\sin\frac{1}{n}}_{n^2},0,0\ldots)$
3.27	C_0	$(\underbrace{(\frac{n+}{n})^2,\cdots(\frac{n+}{n})^2}_{n},0,0,\ldots)$
3.28	l_∞	$(tg(1/n),tg(1/n^2),\ldots,tg(1/n^k),\ldots)$
3.29	$l_{5/2}$	$((\frac{n-}{n})^n,(\frac{n-}{n})^n,\ldots,(\frac{n-\ \ n-\ \ )}{n})^n,0,0,\ldots)$
3.30	l_1	$(1/2,4/5,\ldots,n^2/(n^2+1),0,0,\ldots)$
3.31	l_1	$(\underbrace{\frac{\sin 3_n}{n^2},\cdots\frac{\sin 3_n}{n^2}}_{n},0,0,\ldots)$
3.32	l_∞	$(1,\sqrt{2},\sqrt[4]{3},\ldots,\sqrt[n]{n},0,0,\ldots)$
3.33	l_5	$(\underbrace{\cos\frac{1}{n^2},\cdots\cos\frac{1}{n^2}}_{n},0,0,\ldots)$
3.34	$l_{3/2}$	$(1,\underbrace{\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}}_{n},0,0,\ldots)$
3.35	$l_{3/2}$	$\left(\frac{n^2}{1+n^2},\frac{n^2}{1+2n^2},\ldots,\frac{n^2}{1+kn^2},\ldots\right)$
3.36	l_2	$\left(\frac{n}{1+n},\frac{n}{1+2n},\ldots,\frac{n}{1+kn},\ldots\right)$

3.37	$l_{4/3}$	$(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n^2},\underbrace{\sqrt{n},\ldots,\sqrt{n}}_{n},0,0,\ldots)$
3.38	$l_{6/5}$	$(1,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}},...,\frac{1}{\sqrt{n}},0,0...)$
3.39	l_3	$\left(\underbrace{\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}},\cdots,\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}}_{n},0,0,\cdots\right)$
3.40	l_2	$(1,\frac{1}{3},\frac{1}{3^2},\ldots,\frac{1}{3^n},0,0,\ldots)$
3.41	l_∞	$\left(\underbrace{n\sin\frac{1}{n},n\sin\frac{1}{n},\cdots,n\sin\frac{1}{n}}_{n},0,0,\ldots\right)$
3.42	c_0	$\left(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}},\frac{1}{\sqrt{n}},\cdots\frac{1}{\sqrt{n}}}_{n},0,0,\ldots\right)$
3.43	$l_{4/3}$	$\left(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n},\underbrace{\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots\frac{1}{n}}_{n},0,0,\ldots\right)$
3.44	l_4	$\left(\underbrace{\frac{n}{n+1},\frac{n}{n+1},\cdots,\frac{n}{n+1}}_{n},0,0,\ldots\right)$
3.45	$l_{10/3}$	$(1,\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}},\cdots,\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}},1,1,0,0,\ldots)$
3.46	$l_{3/2}$	$(tg\frac{1}{n},tg^2\frac{1}{n},\cdots,tg^k\frac{1}{n},\ldots)$