ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 3

ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ

I. Основные понятия и теоремы

Пусть μ — σ-аддитивная мера, определенная на σ-алгебре Σ подмножеств множества X. Мы будем предполагать, что мера μ является полной. В дальнейшем элементы σ-алгебры Σ будем называть измеримыми множествами.

<u>Определение</u> 1. Пусть E — измеримое подмножество X. Функция $F : E \to \mathbf{R}$ называется **измеримой** относительно меры μ (μ – **измеримой**) на множестве E, если для любого $c \in \boldsymbol{R}$ множество $\{x \in E | f(x) < c\}$ измеримо .

Можно показать, что для любой непустой системы A подмножеств некоторого множества существует наименьшее σ-кольцо, содержащее эту систему. Это σ-кольцо называется **σ-кольцом, порожденным системой** A .

<u>Определение</u> 2. Элементы наименьшего σ–кольца, содержащего все открытые множества числовой прямой, называются **борелевскими** множествами. Совокупность всех борелевских множеств будем обозначать через $\boldsymbol{\mathcal{B}}$**.** В частности, каждое открытое, каждое замкнутое множество, каждый (ограниченный или нет) промежуток числовой прямой является борелевским множеством.

<u>Определение</u> 3. Функция $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ называется **борелевской**, если прообраз $g^{-1}(B)$ каждого борелевского множества B является борелевским множеством.

ТЕОРЕМА I. *Если функция f измерима на E, а функция g — борелевская, то композиция $g \circ f$ является измеримой на E функцией.*

ТЕОРЕМА 2. *Сумма, разность, произведение двух измеримых функций измеримы. Частное двух измеримых функций при условии, что знаменатель не обращается в нуль, тоже измеримо.*

Пусть $p(x)$ — свойство, которым могут обладать, а могут и не обладать точки множества X. Говорят, что $p(x)$ выполняется почти всюду на измеримом множестве E, если мера множества тех x из E, где это свойство не выполнено, равно нулю.

Например, **равенство почти всюду** на E функций f и h (записывается — $f=h$ п.в. на E) означает, что $\mu(\{x \in E \mid f(x) \neq h(x)\}) = 0$. **Сходимость почти всюду** на E последовательности f_n к функции f (записывается — $f_n \to f$ п.в. на E) означает, что $\mu(\{x \in E \mid f_n(x)$ не сходится к $f(x)\}) = 0$.

ТЕОРЕМА 3. *Если последовательность измеримых на E функций $f_n(x)$ сходится почти всюду на E к функции $f(x)$, то и предельная функция f является измеримой на E.*

ТЕОРЕМА 4. *(Егоров) Пусть E — измеримое множество конечной меры и пусть последовательность измеримых на E функций $f_n(x)$ сходится почти всюду на E к функции $f(x)$. Тогда для любого $\delta>0$ существует такое измеримое множество $E_\delta \subset E$, что*

1) $\mu(E_\delta) > \mu(E) - \delta$;

2) на E_δ последовательность f_n сходится к f равномерно.

Определение 4. Говорят, что последовательность измеримых на множестве E функций f_n **сходится по мере на** E к измеримой на E функции f, если для любого $\alpha>0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \notin E \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\} = 0.$$

ТЕОРЕМА 5. *Если последовательность измеримых на множестве E конечной меры функций f_n сходится почти всюду на E к функции f, то она сходится к f по мере на множестве E.*

Числовую функцию, принимающую также и бесконечные значения — $+\infty$, $-\infty$, определенную на измеримом множестве E, называю **измеримой на** E, если для любого $c \in \mathbf{R}$ множество $\{x \in E \mid f(x) < c\}$ измеримо, а также измеримы множества $\{x \in E \mid f(x) = +\infty\}$ и $\{x \in E \mid f(x) = -\infty\}$.

ЛИТЕРАТУРА: [1, с. 40-44]; [2, с. 282-291].

II. З а д а ч и

1. Пусть E — измеримое подмножество множества X и пусть $f : E \to \mathbf{R}$. Доказать, что f измерима на E тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

1.1. Для любого $c \in \mathbf{R}$ множество $\{x \in E \mid f(x) > c\}$ измеримо;

1.2. Для любого $c \in \mathbf{R}$ множество $\{x \in E \mid f(x) \geq c\}$ измеримо;

1.3. Для любого $c \in \mathbf{R}$ множество $\{x \in E \mid f(x) \leq c\}$ измеримо;

1.4. Для любых $a, b \in \mathbf{R}$, $a \leq b$ множество $\{x \in E \mid a < f(x) < b\}$ измеримо;

1.5. Для любых $a, b \in \mathbf{R}$, $a \leq b$ множество $\{x \in E \mid a < f(x) \leq b\}$ измеримо;

1.6. Для любых $a,b\in\mathbf{R},$ $a\le b$ множество $\{x\in E|\ a \le f(x) \le b\ \}$ измеримо;
1.7. Для любых $a,b\in\mathbf{R},$ $a\le b$ множество $\{x\in E|\ a \le f(x) < b\ \}$ измеримо;
1.8. Для любого $c\in\mathbf{Q}$ множество $\{x\in E|\ f(x) < c\ \}$ измеримо;
1.9. Для любого $c\in\mathbf{Q}$ множество $\{x\in E|\ f(x) \le c\ \}$ измеримо;
1.10. Для любого $c\in\mathbf{Q}$ множество $\{x\in E|\ f(x) > c\ \}$ измеримо;
1.11. Для любого $c\in\mathbf{Q}$ множество $\{x\in E|\ f(x) \ge c\ \}$ измеримо;
1.12. Для любых $a,b\in\mathbf{Q},$ $a\le b$ множество $\{x\in E|\ a < f(x) < b\ \}$ измеримо;
1.13. Для любых $a,b\in\mathbf{Q},$ $a\le b$ множество $\{x\in E|\ a < f(x) \le b\ \}$ измеримо;
1.14. Для любых $a,b\in\mathbf{Q},$ $a\le b$ множество $\{x\in E|\ a \le f(x) < b\ \}$ измеримо;
1.15. Для любых $a,b\in\mathbf{Q},$ $a\le b$ множество $\{x\in E|\ a \le f(x) \le b\ \}$ измеримо.

Решение задачи 1.15. Пусть функция f измерима на множестве E. Так как $[a,b]=\bigcap_{i=1}^{\infty}(]-\infty,b+\frac{1}{i}[\setminus]-\infty,a[)$, то

$$\{x\in E\,|\,a\le f(x)\le b\}=E\cap f^{-1}([a,b])=$$
$$=E\cap\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}f^{-1}(]-\infty,b+\frac{1}{i}[\setminus]-\infty,a[)\right)=$$
$$=E\cap\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}(f^{-1}(]-\infty,b+\frac{1}{i}[)\setminus f^{-1}(]-\infty,a[))\right)=$$
$$=\bigcap_{i=1}^{\infty}((E\cap f^{-1}(]-\infty,b+\frac{1}{i}[))\setminus(E\cap f^{-1}(]-\infty,a[)))=$$
$$=\bigcap_{i=1}^{\infty}(\{x\in E\,|\,f(x)<b+\frac{1}{i}\}\setminus\{x\in E\,|\,f(x)<a]).$$

(Если не понятна цепочка написанных выше равенств, то следует вернуться к лабораторной работе № 1, к задачам под номером 3.)

Из определения измеримой функции сразу же следует, что множества $\{x\in E|\ f(x) < b+1/i\ \}$ и $\{x\in E|\ f(x) < a\ \}$ измеримы, а поэтому измерима и их разность. Наконец, вспоминая, что пересечение счетного числа измеримых множеств измеримо, заключаем, что множество $\{x\in E|\ a \le f(x) \le b\ \}$ измеримо для любых $a,b\in\mathbf{Q},$ $a\le b$. (На самом деле, мы доказали измеримость этого множества при $a,b\in\mathbf{R},$ $a\le b$.)

Пусть теперь множество $\{x\in E|\ a \le f(x) \le b\}$ измеримо для каждых $a,b\in\mathbf{Q}$, $a\le b$. Если $c\in\mathbf{R}$, то $]-\infty,c[=\bigcup_{n\in N,a\in Q,a<c}[a-n,a]$ (Докажите это равенство !)

Следовательно,

$$\{x \in E \mid f(x) < c\} = E \bigcap f^{-1}(]-\infty, c[) =$$

$$= E \bigcap \Big(\bigcup_{n \in N, a \in Q, a < c} f^{-1}([a-n, a]) \Big) = \bigcup_{n \in N, a \in Q, a < c} \big(E \bigcap f^{-1}([a-n, a]) \big) =$$

$$= \bigcup_{n \in N, a \in Q, a < c} \{x \in E | a - n \le f(x) \le a\}.$$

По предложению каждое из множеств $\{ x \in E | \ a - n \le f(x) \le a\}$, $a \in \mathbf{Q}$ измеримо. Следовательно, измеримо и счетное объединение таких множеств. А так как всех чисел a, удовлетворяющих условиям: $a \in \mathbf{Q}$, $a < c$, счетное число, то множество $\{x \in E | \ f(x) < c\}$ — измеримо. Тем самым мы доказали измеримость функции f на множестве E.

2. Пусть f и g — измеримые на множестве E функции. Докажите, что на множестве E измеримы функции, определяемые следующими равенствами:

2.1	$f^{+}(x) = \max(f(x), 0)$	2.7	$h(x) = \begin{cases} 1, f(x) > 0 \\ -1, f(x) \le 0 \end{cases}$
2.2	$f^{-}(x) = -\min(f(x), 0)$	2.8	$h(x) = \begin{cases} 1, f(x) > g(x) \\ -1, f(x) \le g(x) \end{cases}$
2.3	$\lvert f \rvert(x) = \lvert f(x) \rvert$	2.9	$h(x) = \begin{cases} f(x), f(x) > g(x) \\ 1, f(x) \le g(x) \end{cases}$
2.4	$\sup(f, g)(x) = \max(f(x), g(x))$	2.10	$h(x) = \begin{cases} g(x), f(x) > g(x) \\ -1, f(x) \le g(x) \end{cases}$
2.5	$\inf(f, g)(x) = \min(f(x), g(x))$	2.11	$h(x) = \begin{cases} \lvert f(x) \rvert, f(x) > g(x) \\ 0, f(x) \le g(x) \end{cases}$
2.6	$\operatorname{sign} f(x) = \begin{Bmatrix} 1, f(x) > 0 \\ 0, f(x) = 0 \\ -1, f(x) < 0 \end{Bmatrix}$	2.12	$h(x) = \begin{cases} \lvert f(x) \rvert, f(x) > g(x) \\ \lvert g(x) \rvert, f(x) \le g(x) \end{cases}$

Решение задачи 2.12. Заметим, что при $c \le 0$ $\{x \in E \mid h(x) < c\} = \varnothing$ и поэтому это множество измеримо. Если $c>0$, то $\{x \in E \mid h(x) < c\} = (\{x \in E \mid -c < f(x) < c\} \cap \{x \in E \mid f(x) - g(x) > 0\}) \cup (\{x \in E \mid -c < g(x) < c\} \cap \{x \in E \mid f(x) - g(x) \le 0\})$. (Мы не доказываем это равенство, оставляя эту работу читателю.) Из измеримости f и g следует, что все множества, стоящие в правой части равенства, измеримы, и, следовательно, измеримо множество в левой части этого же равенства, т.е. функция h измерима.

3. Вытекает ли измеримость на множестве E функции f из измеримости на E следующих функций:

3.1	f^2	3.5	f^+	3.9	$f^+, -f^-$
3.2	f^3	3.6	f^-	3.10	f^+, f^2
3.3	f^n	3.7	$\lvert f \rvert$	3.11	f^-, f^2
3.4	$\operatorname{sign} f, \lvert f \rvert$	3.8	f^+, f^-	3.12	$f^+, \lvert f \rvert$

Решение задачи 3.12. Так как $f = f^+ - f^-$ и $|f| = f^+ + f^-$, то $f = 2f^+ - |f|$. Поэтому, если на множестве E измеримы функции f^+ и $|f|$, то на этом же множестве измерима и их линейная комбинация $2f^+ - |f|$ равная функции f; т.е. функция f измерима на E.

4. Пусть m — мера Лебега на $\mathbf{R}$ и пусть E — измеримое подмножество $\mathbf{R}$. Доказать, что

4.1. Неубывающая на отрезке $[a,b]$ функция измерима на этом отрезке;

4.2. Неубывающая на E функция измерима на E;

4.3. Невозрастающая на отрезке $[a,b]$ функция измерима на нем;

4.4. Неубывающая на E функция измерима на E;

4.5. Если f определена на $[a,b]$ и измерима на каждом отрезке $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$, то она измерима на $[a,b]$;

4.6. Непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция измерима на нем;

4.7. Если f имеет производную на отрезке $[a,b]$, то производная f' измерима на этом отрезке;

4.8. Если f имеет лишь конечное число точек разрыва, то f измерима на $[a,b]$.

Решение задачи 4.8. Пусть f – определена на $[a,b]$ и $a_1,\dots,a_n \in [a,b]$ —точки ее разрыва. Тогда для любого $n \in \mathbf{N}$ функция f непрерывна на множестве

$[a,b]\setminus\bigcup_{k=1}^{n}]a_k-1/n,a_k+1/n[$, которое представляет собой объединение конечной совокупности непересекающихся отрезков. На интервалах, дополняющих эти отрезки до отрезка $[a,b]$, изменим f линейным образом так, чтобы она стала непрерывной на $[a,b]$. Это всегда можно сделать.

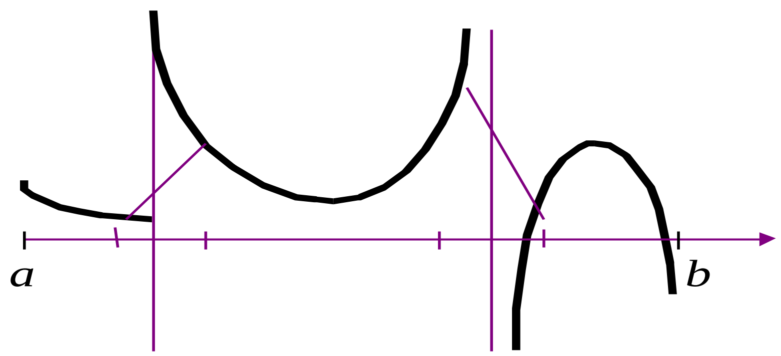

Рис. 10

На рис.10 показано пунктиром, как изменяется график функции f, имеющей две точки разрыва.

Получим непрерывную функцию, которую обозначим через f_n. Можно показать (задача 4.6), что каждая функция f_n измерима на$[a,b]$. Заметим далее, что для всякого $x_0 \in [a,b]$, не равного ни одной точке a_k, для всех достаточно больших n имеем $f_n(x_0) = f(x_0)$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ и, значит, последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ почти всюду на $[a,b]$. (Всюду за исключением множества $\{a_1,..., a_n\}$, которое имеет меру нуль.) Значит, и функция f измерима на $[a,b]$ (по теореме 3).

5. Пусть m — мера Лебега на $\mathbf{R}$, $E = [0,1]$. Привести примеры:

5.1. Последовательности функций, сходящейся почти всюду на E, но не сходящейся в каждой точке множества E;

5.2. Последовательности функций, сходящейся по мере на E, но не сходящейся почти всюду на E;

5.3. Функции равной 2 почти всюду на E, тождественно не равной 2;

5.4. Измеримой на E функции, разрывной в каждой точке E и равной почти всюду на E непрерывной на E функции;

5.5. Двух равных почти всюду на E функций, тождественно не равных между собой;

5.6. Измеримой на E функции, не равной почти всюду на E ни одной непрерывной на E функции;

5.7. Измеримой на E функции, взаимно однозначно отображающей E на E и разрывной в каждой точке множества E;

5.8. Измеримой на E функции, неограниченной на каждом отрезке $[a,b]\subset E$ $(a<b)$.

Решение задачи 5.8. Построим функцию f следующим образом: если $\frac{k}{m}$ — несократимая дробь из отрезка [0,1], где $k,m\in\mathbf{N}$, то положим $f\left(\frac{k}{m}\right) = m$ и $f(x) = 0$ для остальных x из [0,1]. Функция f равна нулю почти всюду на [0,1], ибо $m([0,1]\cap\mathbf{Q}) = 0$. Следовательно, f измерима на E. Для любого отрезка $[a,b]\subset E$ ($a<b$) и любого $M\in\mathbf{N}$ найдется такое простое число m, что, во-первых, $m>M$;а во-вторых — $m^{-1} < b - a$. Отсюда следует, что для некоторого $k\in\mathbf{N}$ $km^{-1}\in[a,b]$ и, значит, $f(km^{-1}) = m>M$; т.е. f — неограниченна на $[a,b]$.

6. Пусть m — мера Лебега на $\mathbf{R}$, $E = [0,1]$. Проверить, является ли последовательность f_n сходящейся поточечно, равномерно, сходящейся почти всюду на множестве E? Построить множество $M\subset E$ такое, что $m(E \setminus M) < 10^{-1}$ и на множестве M последовательность f_n сходится равномерно.

6.1	$f_n(t) = \cos^n t$	6.6	$f_n(t) = \begin{cases} ctg(t^{1/n}), t \neq 0 \\ 0, t = 0 \end{cases}$
6.2	$f_n(t) = \sin^n t$	6.7	$f_n(t) = \begin{cases} tg(\frac{\pi}{2} t^n), t \neq 1 \\ 0, t = 1 \end{cases}$
6.3	$f_n(t) = \cos^n 5t$	6.8	$f_n(t) = \begin{cases} tg^n(\frac{\pi}{2} t^n), t \neq 1 \\ 0, t = 1 \end{cases}$
6.4	$f_n(t) = \sin^n 5t$	6.9	$f_n(t) = \begin{cases} ctg^n(\frac{\pi}{2} t^n), t \neq 0 \\ 0, t = 0 \end{cases}$
6.5	$f_n(t) = \cos^n (t / n)$	6.10	$f_n(t) = \begin{cases} ctg^n(\frac{\pi}{3} t^n), t \neq 0 \\ 0, t = 0 \end{cases}$

Решение задачи 6.10. Пусть $0 < t_0 \leq 1$. Так как $\frac{\pi}{3} t_0^{1/n} \to \frac{\pi}{3}$ при $n \to \infty$, то при некотором $n_0\in\mathbf{N}$ для всех $n \geq n_0$ имеем ${}^{7}\!/_{24}\pi \leq \frac{\pi}{3} t_0^{1/n} \leq \frac{\pi}{3}$. Поэтому $0 < ctg(\frac{\pi}{3} t_0^{1/n}) \leq ctg(\frac{7}{24}\pi) < 1$ и, значит, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $n_1\in\mathbf{N}$, $n_1 > n_0$, что при $n> n_1$ имеет место соотношение $0 < f_n(t_0) = ctg^n(\frac{\pi}{3} t_0^{1/n}) < \varepsilon$. Значит, $f_n(t_0)\to 0$ при $n\to\infty$. Ясно, что $f_n(0)\to 0$ при $n\to\infty$. Следовательно, $f_n(t)$ сходится поточечно на [0,1] к нулевой функции и, следовательно, сходится на [0,1] почти всюду к нулевой функции. Так как $f_n(t)$ при каждом $n\in\mathbf{N}$ неограниченна на [0,1], то последовательность $f_n(t)$ не сходится на [0,1] равномерно. Покажем, что на отрезке [1/20,1] последовательность $f_n(t)$ сходится равномерно к нулю. Действительно, $|f_n(t)|\le ctg^n(\frac{\pi}{3}(\frac{1}{20})^{1/n})$ для каждого $t\in[1/20,1]$, но $\lim\limits_{n\to\infty} ctg^n(\frac{\pi}{3}(\frac{1}{20})^{1/n})=0$, поэтому $f_n(t)$ сходится равномерно на множестве [1/20,1] к нулевой функции. Ясно, что $m([0,1]\setminus[1/20,1]) = 1/20 < 1/10$.

Варианты заданий

Вариант 1:	1.1;	2.11;	3.1;	4.7;	5.3;	6.4.
Вариант 2:	1.2;	2.10;	3.2;	4.6;	5.4;	6.4.
Вариант 3:	1.3;	2.9;	3.3;	4.5;	5.2;	6.9.
Вариант 4:	1.4;	2.8;	3.4;	4.4;	5.5;	6.8.
Вариант 5:	1.5;	2.7;	3.5;	4.3;	5.3;	6.7.
Вариант 6:	1.6:;	2.6;	3.6;	4.2;	5.6;	6.1.
Вариант 7:	!.7;	2.5;	3.11;	4.1;	5.1;	6.6.
Вариант 8:	1.8;	2.4;	3.10;	4.1;	5.6;	6.2.
Вариант 9:	1.9;	2.3;	3.9;	4.2;	5.2;	6.3.
Вариант 10:	1.10;	2.2;	3.8;	4.3;	5.7;	6.3.
Вариант 11:	1.11;	2.1;	3.7;	4.4;	5.5;	6.2.
Вариант 12:	1.12;	2.1;	3.6;	4.5;	5.1;	6.1.
Вариант 13:	1.13;	2.2;	3.5;	4.6;	5.6;	6.4.
Вариант 14:	1.14;	2.3;	3.4;	4.7;	5.3;	6.5.
Вариант 15:	1.13;	2.4;	3.3;	4.3;	5.2;	6.5.
Вариант 16:	1.12;	2.5;	3.2;	4.6;	5.7;	6.2.
Вариант 17:	1.1;	2.6;	3.1;	4.4;	5.4;	6.9.
Вариант 18:	1.2;	2.7;	3.2;	4.7;	5.1;	6.3.
Вариант 19:	1.3;	2.8;	3.3;	4.5;	5.5;	6.7.
Вариант 20:	1.4;	2.9;	3.4;	4.6;	5.5;	6.1.
Вариант 21:	1.5;	2.10;	3.5;	4.2;	5.7;	6.8.
Вариант 22:	1.6;	2.11;	3.6;	4.6;	5.1;	6.3.
Вариант 23:	1.7;	2.6;	3.7;	4.2;	5.6;	6.6.
Вариант 24:	1.8;	2.7;	3.8;	4.1;	5.4;	6.2.
Вариант 25:	1.9;	2.8;	3.9;	4.7;	5.2;	6.4.

III. Дополнительные задачи и упражнения

23. Пусть функция f определена на измеримом множестве E и пусть для любого $c \in \boldsymbol{R}$ множество $\{x \in E | \ f(x) = c\}$ измеримо. Следует ли отсюда, что функция f измерима на E?

24. Пусть $\wp$ — некоторый класс борелевских подмножеств числовой прямой такой, что наименьшее σ-кольцо, содержащее $\wp$, совпадает с классом всех борелевских подмножеств $\mathbf{R}$. Доказать, что числовая функция f, определенная на измеримом множестве E, измерима на E тогда и только тогда, когда $E \cap f^{-1}(A)$ измерима для каждого $A \in \wp$.

25. Пусть $g_1,...,g_n$ — измеримые на множестве E функции, а $f(x_1,...,x_n)$ — непрерывная на $\mathbf{R}^n$ числовая функция. Доказать, что сложная функция $f(g_1(t),...,g_n(t))$ измерима на E.

26. Пусть f определена на $[0,1]$ и непрерывна почти всюду на нем, относительно меры Лебега на $\mathbf{R}$. Доказать, что f измерима на отрезке $[0,1]$.

27. Доказать, что две непрерывные на отрезке $[0,1]$ функции равны почти всюду на этом отрезке относительно меры Лебега тогда и только тогда, когда они тождественно равны.

28. Показать, что в теореме Егорова условие конечности меры множества E нельзя отбросить.

29. Привести пример последовательности измеримых на множестве E функций, сходящейся почти всюду на E, к функции f, но не сходящейся по мере на E к функции f.

30. Пусть $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ — последовательности измеримых на E функций, сходящиеся по мере на E к функциям f и g соответственно. Доказать, что последовательность $\{\alpha f_n + \beta g_n\}$ сходится по мере к функции $\alpha f + \beta g$ для любых α и β из $\mathbf{R}$.

31. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность измеримых на множестве E функций. Доказать, что множество тех точек $x \in X$, где существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ измеримо.

32. Доказать, что если $f_n \to f$ и $f_n \to g$ при $n \to \infty$ почти всюду на E, то $f = g$ почти всюду на E.