ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2

МЕРА. ЛЕБЕГОВО ПРОДОЛЖЕНИЕ МЕРЫ

1. Основные понятия и теоремы

Определение 1. Пусть $\boldsymbol{S}$ — полукольцо подмножеств множества X. Функция $\mu : \boldsymbol{S}\to[0,+\infty]$, тождественно не равная $+\infty$, называется **мерой** на полукольце $\boldsymbol{S}$, если она аддитивна, т.е. $\mu(A)=\sum\limits_{k=1}^{n}\mu(A_k)$ всякий раз, когда $A,A_1,\ldots,A_n\in\boldsymbol{S}$ и $A=\coprod\limits_{k=1}^{n}A_k$.

Если μ — мера, $A\in\boldsymbol{S}$, то значение $\mu(A)$ (конечное или равное $+\infty$) функции μ называется мерой множества A.

Определение 2. Мера μ, определенная на полукольце $\boldsymbol{S}$, удовлетворяющая условию: если $A=\coprod\limits_{k=1}^{\infty}A_k$, $A,A_1,\ldots,A_n,\ldots\in\boldsymbol{S}$, то $\mu(A)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu(A_k)$, называется **счетно-аддитивной мерой** (или **σ-аддитивной мерой**).

Мера μ, определенная на полукольце $\boldsymbol{S}$, обладает следующими свойствами:

1. Если $A,B\in\boldsymbol{S}$ и $A\subset B$, то $\mu(A)\le\mu(B)$ (монотонность меры);

2. Если $A, A_1,\ldots,A_n,\ldots\in\boldsymbol{S}$ и $A\supset\coprod\limits_{k=1}^{\infty}A_k$, то $\mu(A)\ge\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu(A_k)$;

3. Пусть мера μ σ-аддитивна. Если $A,A_1,\ldots,A_n,\ldots\in\boldsymbol{S}$ и $A\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$, то $\mu(A)\le\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu(A_k)$;

4. Пусть мера μ σ-аддитивна и пусть (E_n) — возрастающая последовательность элементов из $\boldsymbol{S}$ (т.е. $E_n\subset E_{n+1}$ для всякого $n\in\mathbf{N}$) и $E=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\in\boldsymbol{S}$. Тогда $\mu(E)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n)$;

5. Пусть мера μ σ-аддитивна и пусть (E_n) — убывающая последовательность элементов из $\boldsymbol{S}$ (т.е. $E_n \supset E_{n+1}$ для всякого $n\in\mathbf{N}$), из которых хотя бы одно имеет конечную меру, и $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \boldsymbol{S}$. Тогда $\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

Пусть $\boldsymbol{S} = \{[a,b[\subset \mathbf{R} \mid a \le b\}$ — полукольцо всех открытых справа ограниченных интервалов числовой прямой. Каждую меру m, определенную и конечную на $\boldsymbol{S}$, можно представить в виде

$$m_F([a,b[\,) = F(b) - F(a),$$

где F — неубывающая функция на $\mathbf{R}$.

С другой стороны, для любой неубывающей на $\mathbf{R}$ функции F эта формула задает меру. Если $F(x) = x$ $(x\in\mathbf{R})$, то меру m_F называют длиной.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть F — неубывающая на* $\mathbf{R}$ *функция. Мера m_F σ-аддитивна тогда и только тогда, когда F непрерывна слева на* $\mathbf{R}$.

СЛЕДСТВИЕ. *Длина является σ-аддитивной мерой.*

Определение 3. Пусть μ — мера, определенная на полукольце $\boldsymbol{S}$. Мера μ_1, определенная на полукольце $\boldsymbol{S}_1$, называется **продолжением** меры μ, если $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{S}_1$ и $\mu_1(A) = \mu(A)$ для любого $A\in\boldsymbol{S}$.

σ-Аддитивную меру можно разумным образом продолжить на σ-алгебру подмножеств множества X.

Пусть m — σ-аддитивная мера, определенная на полукольце $\boldsymbol{S}$ подмножеств множества X.

Для множества $A\subset X$ определим внешнюю меру $\mu^*(A)$ этого множества следующим образом:

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \mid A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_n \in S, \quad n = 1,2,\dots\},$$

если A можно покрыть хотя бы одним способом конечным или счетным набором множеств $A_1,\dots,A_n,\dots\in\boldsymbol{S}$, и положим $\mu^*(A) = +\infty$ в противном случае, т.е. в том случае, когда A нельзя покрыть никаким конечным или счетным набором множеств $A_1,\dots,A_n,\dots\in\boldsymbol{S}$.

Определение 4. Множество $E \subset X$ называется **измеримым по Лебегу** относительно меры m, если для любого $A \subset X$ выполняется равенство

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap (X \setminus E)).$$

На совокупности $\mathbf{\Omega}$ всех измеримых по Лебегу множеств определим функцию μ как сужение внешней меры, т.е.

$$\mu(A) = \mu^*(A) \quad (A \in \mathbf{\Omega}).$$

ТЕОРЕМА 2. $\mathbf{\Omega}$ — *σ-алгебра подмножеств множества X;* μ — *σ-аддитивная мера на* $\mathbf{\Omega}$; *каждое множество* $A \in \boldsymbol{S}$ *измеримо и* $\mu(A) = m(A)$.

Так определенная мера μ называется **лебеговым продолжением** меры m. Лебегово продолжение μ меры m обладает свойством полноты: если множеств A измеримо и $\mu(A) = 0$, то каждое его подмножество измеримо и имеет меру нуль.

Лебегово продолжение длины называют мерой Лебега на прямой. Если F — неубывающая на $\mathbf{R}$ функция, непрерывная слева в каждой точке из $\mathbf{R}$, то лебегово продолжение меры m_F называют мерой Лебега-Стильтьеса на прямой.

ЛИТЕРАТУРА: [1, с. 14-17]; [2, с. 288-323]; [3, с. 68-79].

II. З а д а ч и

1. Можно ли задать меру m на $\boldsymbol{P}(X)$, если $X = \{a,b,c\}$, так чтобы

1.1	$m(\{a,b\}) = 1{,}2;$	$m(\{a,c\}) = 1{,}2;$	$m(\{c,b\}) = 1{,}2.$
1.2	$m(\{a,b\}) = 2;$	$m(\{c\}) = 2;$	$m(\{a,b,c\}) = 4.$
1.3	$m(\{a\}) = 1;$	$m(\{a,b\}) = 0;$	$m(\{c,b\}) = 1{,}2.$
1.4	$m(\{a,b,c\}) = 7;$	$m(\{a,b\}) = 2{,}5;$	$m(\{a,c\}) = 3{,}5.$
1.5	$m(\{a,b\}) = 1;$	$m(\{c,b\}) = 0;$	$m(\{b\}) = 1.$
1.6	$m(\{a,b\}) = 0;$	$m(\{a,c\}) = 0;$	$m(\{c,b\}) = 1.$
1.7	$m(\{a\}) = 1;$	$m(\{b\}) = 1;$	$m(\{c\}) = 1.$
1.8	$m(\{a\}) = 1;$	$m(\{c,b\}) = 0{,}5;$	$m(\{a,b\}) = 2.$
1.9	$m(\{a\}) = 1;$	$m(\{c,b\}) = 0{,}5;$	$m(\{a,b\}) = 1.$

1.10	$m(\{a\}) = 1;$	$m(\{b\}) = 1;$	$m(\{a,b,c\}) = 25.$
1.11	$m(\{a\}) = 2;$	$m(\{c\}) = 4;$	$m(\{a,b,c\}) = 4.$
1.12	$m(\{a,b\}) = 0;$	$m(\{c,b\}) = 0{,}5;$	$m(\{a,b,c\}) = 1.$
1.13	$m(\{a,b\}) = 0;$	$m(\{c,b\}) = 0{,}5;$	$m(\{a,b,c\}) = 0{,}4.$
1.14	$m(\{a,b\}) = 0;$	$m(\{c,b\}) = 0{,}5;$	$m(\{a,b,c\}) = 0{,}5.$
1.15	$m(\{a\}) = 4;$	$m(\{a,b\}) = 1;$	$m(\{a,b,c\}) = 5.$

Решение задачи 1.15. Предположим, что существует мера m, заданная на множестве всех подмножеств множества $X = \{a,b,c\}$ такая, что $m(\{a\}) = 4$; $m(\{a,b\}) = 1$; $m(\{a,b,c\}) = 5$. Так как $\{a,b\}=\{a\}\cup\{b\}$, множества, стоящие в правой части равенства, не пересекаются и множества $\{a,b\}$, $\{a\}$, $\{b\}$ являются подмножествами множества $\{a,b,c\}$, то в силу свойства аддитивности меры m имеем $m(\{a,b\}) = m(\{a\}) + m(\{b\})$. Отсюда получаем, что $1 = 4 + m(\{b\})$ или $m(\{b\}) = –3$, что противоречит свойству неотрицательности меры m. Полученное противоречие показывает, что меру на $\boldsymbol{P}(X)$, удовлетворяющую требованиям $m(\{a\}) = 4$; $m(\{a,b\}) = 1$; $m(\{a,b,c\}) = 5$, задать нельзя.

2. Пусть m — мера, определенная на кольце $\mathfrak{R}$, $E,F,G\in\mathfrak{R}$, причем $m(E)<+\infty$ и $m(F)<+\infty$. Доказать следующие соотношения:

2.1	$m(E \cup F) = m(E) + m(F) – m(E\cap F)$
2.2	$m(\varnothing) = 0$
2.3	$m(E \setminus F) = m(E) – m(E \cap F)$
2.4	$E\supset F \;\Rightarrow\; m(E \setminus F) = m(E) – m(F)$
2.5	$m(E \cap F) = m(E) + m(F) – m(E \cup F)$
2.6	$m(E \,\Delta\, F) = m(E) + m(F) – 2m(E \cup F)$
2.7	$m(E \cup F \cup G) = m(E) + m(F) + m(G) – m(E \cap F) –$ $– m(E \cap G) – m(F \cap G) + m(E \cap F \cap G)$
2.8	$m(E \cup (F \cap G)) = m(E) + m(F \cap G) – m(E \cap F \cap G)$
2.9	$E\supset F \;\Rightarrow\; m(E \,\Delta\, F) = m(E) – m(F)$
2.10	$m(E \cap (E \,\Delta\, F)) = m(E) – m(E \cap F)$

2.11	$m(E \cup (E \Delta F)) = m(E) + m(F) - m(E \cap F)$
2.12	$m(E \Delta (E \Delta F)) = m(F)$
2.13	$m(E \Delta F) \leq m(E \Delta G) + m(G \Delta F)$
2.14	$m(E \Delta F) = m(E \cup F) - m(E \cap F)$

Решение задачи 2.14. Докажем сначала, что

$$E \cup F = (E \Delta F) \coprod (E \cap F).$$

Пусть $x \in E \cup F$. Тогда либо $x \in E$, либо $x \in F$. В первом случае, при $x \in F$ имеем $x \in E \cap F$, а при $x \notin F$ — $x \in E \Delta F$. Значит, если $x \in E$, то $x \in (E \Delta F) \cup (E \cap F)$. Аналогично устанавливается, что если $x \in F$, то $x \in (E \Delta F) \cup (E \cap F)$.

Непосредственно из определения разности и симметрической разности множеств следует, что множества $E \Delta F$ и $E \cap F$ не пересекаются и что $E \cup F \supset (E \Delta F) \cup (E \cap F)$. Таким образом, доказано равенство $E \cup F = (E \Delta F) \coprod (E \cap F)$.

Так как по условию $E, F \in \mathfrak{R}$, а $\mathfrak{R}$ — кольцо множеств, то множества $E \cup F$, $E \Delta F$, $E \cap F$ принадлежат $\mathfrak{R}$. Из свойства аддитивности меры имеем $m(E \Delta F) = m(E \cup F) - m(E \cap F)$.

Так как $E \cap F \subset E$, то $m(E \cap F) \leq m(E) < +\infty$. Вычитая из обеих частей полученного равенства конечное число $m(E \cap F)$, получим требуемое равенство — $m(E \Delta F) = m(E \cup F) - m(E \cap F)$.

3. Пусть $X = \mathbf{R}$, $\boldsymbol{S} = \{[a,b[\subset X\}$, $m_F([a,b[) = F(b) - F(a)$. При каких значениях параметра α эта формула задает: а) меру; б) σ-аддитивную меру? Если мера не является σ-аддитивной, то указать $A \in \boldsymbol{S}$ и его разбиение $A = \coprod \{A_k \mid A_k \in S\}$, такое, что $m_F(A) \neq \sum_{k=1}^{\infty} m_F(A_k)$.

3.1	$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \alpha, & t = 0 \\ e^t, & t > 0 \end{cases}$	3.2	$F(t) = \begin{cases} e^t, & t < 1 \\ \alpha, & t = 1 \\ t + 2, & t > 1 \end{cases}$

3.3	$F(t)=\begin{cases} n, & t\in]n,n+1[\\ \alpha+n, & t=n \end{cases}$	3.4	$F(t)=\begin{cases} n+t, & t\in]n,n+1[\\ \alpha+2n, & t=n \end{cases}$
3.5	$F(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ \alpha+2, & t=0 \\ 1, & t>0 \end{cases}$	3.6	$F(t)=\begin{cases} -5, & t<2 \\ \alpha+7, & t=2 \\ 5, & t>2 \end{cases}$
3.7	$F(t)=\begin{cases} t, & t<3 \\ \alpha, & t=3 \\ 5, & t>3 \end{cases}$	3.8	$F(t)=\begin{cases} 1, & t<0 \\ t^2+t+\alpha, & t\ge 0 \end{cases}$
3.9	$F(t)=\begin{cases} e^t, & t\ne 2 \\ \alpha, & t=2 \end{cases}$	3.10	$F(t)=\begin{cases} -1, & t<1 \\ t^2-2t+\alpha, & t\ge 1 \end{cases}$
3.11	$F(t)=\begin{cases} t, & t<-1 \\ 2t^2+8t+\alpha, & t\ge -1 \end{cases}$	3.12	$F(t)=\begin{cases} t^3, & t<1 \\ 3t^2-t-\alpha, & t\ge 1 \end{cases}$
3.13	$F(t)=\begin{cases} -t^2+2t+\alpha, & t<0 \\ t, & t\ge 0 \end{cases}$	3.14	$F(t)=\begin{cases} -t^2+2t+\alpha, & t<1 \\ t^3, & t\ge 1 \end{cases}$

Решение задачи 3.14. Функция m_F является мерой тогда и только тогда, когда F не убывает на **R**. Так как F дифференцируема на $]-\infty,1[$ и $F'(t)=-2t+2>0$ при $t<1$, то F возрастает на $]-\infty,1[$. Очевидно, F возрастает и на промежутке $[1,+\infty[$. Следовательно, F будет не убывать на **R** в том и только том случае, когда $\lim\limits_{t\to 1-0} F(t)\le F(1)$, т.е. при $1+\alpha\le 1$ или при $\alpha\le 0$. При $\alpha=0$ функция F будет непрерывна на **R** и, следовательно, m_F будет σ-аддитивной мерой. При $\alpha<0$ функция F не является непрерывной слева в точке $t=1$. Значит, в этом случае m_F не будет σ-аддитивной мерой.

Пусть $\alpha<0$ и пусть $A=[0,1[$ и $A_n=[1-1/n,\ 1-1/(n+1)[$. Тогда $A=\coprod\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $m_F(A)=F(1)-F(0)=1-\alpha$ и $m_F(A_n)=F(1-1/(n+1))-F(1-1/n)$. Имеем

$$\sum_{k=1}^{n} m_F(A_k)=\sum_{k=1}^{n}(F(1-1/(k+1))-F(1-1/k))=F(1/2)-F(0)+F(1/3)-F(1/2)+\ldots+$$

$$+F(1-1/(n+1))-F(1-1/n)=F(1-1/(n+1))-F(0)=-(1-1/(n+1))^2+2(1-1/(n+1))+\alpha-$$

$$-\alpha=2(1-1/(n+1))-(1-1/(n+1))^2\to 1 \text{ при } n\to+\infty.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_F(A_k) = 1 < 1 - \alpha = m_F(A).$$

4. Пусть $X = [0,1[\times[0,1]$, $\boldsymbol{S} = \{[a,b[\times[0,1] \subset X\}$, $m([a,b[\times[0,1]) = b - a$. Найти внешнюю меру множеств и их дополнений. Выяснить, будут ли они измеримы?

4.1	$[1/2,1[\times[1/2,1]$	4.2	$[1/2,1[\times[0,1/2]$
4.3	$\{(x,y)\in X \mid y > x\}$	4.4	$\{(x,y)\in X \mid y < x\}$
4.5	$\{(x,y)\in X \mid x^2 + y^2 \le 1\}$	4.6	$\{(x,y)\in X \mid x^2 + y^2 \ge 1\}$
4.7	$\{(x,1/2)\in X \mid x\in[0,1[\}$	4.8	$\{(1/2,y)\in X \mid y\in[0,1/2[\}$
4.9	$\{(x,y)\in X \mid x = y^2\}$	4.10	$\{(x,y)\in X \mid y^2 - y = -x\}$
4.11	$\{(x,y)\in X \mid y = \sin x\}$	4.12	$\{(x,y)\in X \mid y = \mathrm{tg} x\}$
4.13	$\{(x,y)\in X \mid y = x\}$	4.14	$\{(x,y)\in X \mid y = 1-x\}$

Решение задачи 4.14. Заметим, что $\boldsymbol{S}$ — полукольцо подмножеств множества X и что m σ-аддитивная мера на $\boldsymbol{S}$.

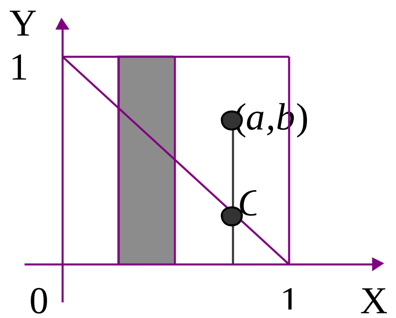

Рис. 9

Множество $A = \{(x,y)\in X \mid y = 1-x\}$ является диагональю квадрата и изображено на рис. 9. Пусть для каждого натурального k $[a_k,b_k[\times[0,1] \in \boldsymbol{S}$ и $B = \bigcup_k [a_k,b_k[\times[0,1] \supset A$. Покажем, что $B\supset X$. Действительно, если $(a,b)\in X$, то $0\le a<1$ и $0\le b<1$. Точка $C=(a,1-a)\in A$ и, следовательно, она принадлежит некоторому прямоугольнику $[a_k,b_k[\times[0,1]$. Поэтому и отрезок $\{a\}[\times[0,1]$ принадлежит этому же прямоугольнику. Значит, $(a,b)\in [a_k,b_k[\times[0,1]$. Отсюда следует, что $B\supset X$.

Так как мера m σ-аддитивна, имеем $\sum_{k=1}^{\infty} m([a_k,b_k[\times[0,1]) \ge m(X) = 1$. Поэтому $\mu^*(A) \ge 1$. Так как $A \subset X$ и $m(X) = 1$, то $\mu^*(A) = 1$.

Аналогично можно доказать, что $\mu^*(X \setminus A) = 1$. Так как

$$X = (X \cap A) \cup (X \cap (X \setminus A)) = A \cup (X \setminus A),$$

то $1 = \mu^*(X) \neq \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap (X \setminus A)) = \mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = 2.$ Значит, множество A не является измеримым.

5. Пусть m — длина на прямой. Доказать измеримость и вычислить меру Лебега следующих множеств:

5.1	$\{3\}$	5.6	$\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$	5.11	$]-\infty, +1[$
5.2	$\{0,1\}$	5.7	$[a, b]$	5.12	$]1, +\infty[$
5.3	$\mathbf{N}$	5.8	$[0, 1] \setminus \mathbf{Q}$	5.13	$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[n, n+\frac{1}{n}]$
5.4	$\mathbf{Q}$	5.9	$]a, b]$	5.14	$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n}, 2^{-n}+1]$
5.5	$\mathbf{Z}$	5.10	$[1, +\infty[$	5.15	$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}]\frac{1}{n}, \frac{1}{n}+0{,}35[$

Решение задачи 5.15. Заметим сначала, что $]a,b[= \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[a+\frac{1}{n}, b[$, где $[a+1/n, b[$ $\subset$ $[a+1/(n+1), b[$. Следовательно, интервал $[a,b[$ является измеримым относительно меры Лебега на прямой, ибо множества $[a+1/n, b[$ принадлежат полукольцу, на котором задана длина (и, значит, они измеримы), и на основании свойства 4 меры имеем

$$\mu(]a,b[) = \lim_{n\to\infty}\mu([a+\frac{1}{n}, b[) = \lim_{n\to\infty} m([a+\frac{1}{n}, b[) = \lim_{n\to\infty}(b-a-\frac{1}{n}) = b-a.$$

Так как счетное объединение измеримых множеств измеримо, то и множество $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}]\frac{1}{n}, \frac{1}{n}+0{,}35[$ — измеримо.

Для того, чтобы найти меру множества A, мы изобразим его на числовой прямой (рис. 10).

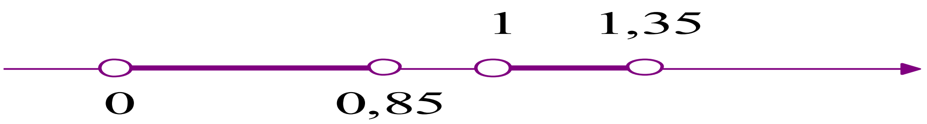

Рис. 10

Мы видим, что $A =]0{,}0{,}85[\coprod]1{,}1{,}35[$ (Докажите это). Следовательно μ(A) = μ(]0,0,85[) = μ(]1,1,35[) = 0,85+0,35 = 1,2.

6. Пусть μ_F — мера Лебега-Стильтьеса на прямой, определяемая следующей производящей функцией

$$F(t) = \begin{cases} t, & t \le 0 \\ 1, & 0 < t \le \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3{,}5t - 1}{t}, & t > \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Доказать измеримость и найти меру μ_F множеств из задачи 5.

Решение задачи 6.15. На рис.11 изображен график функции $F(t)$. Функция $F(t)$ является непрерывной слева и неубывающей на числовой прямой, поэтому формула

$$m_F\,([a,b[\,) = F(b) - F(a)$$

определяет на полукольце всех открытых справа ограниченных интервалов числовой прямой счетно-аддитивную меру m_F , лебегово продолжение которой и есть мера Лебега-Стильтьеса μ_F.

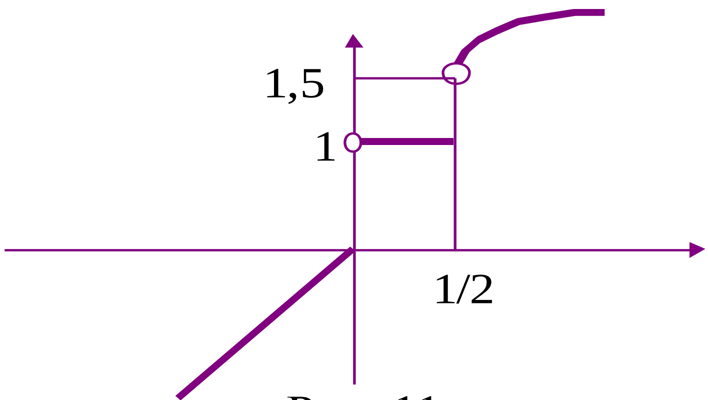

Рис. 11

Множество $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}]\frac{1}{n},\frac{1}{n}+0{,}35[$, как мы уже убедились при решении задачи 5.15, представимо в виде $A=]0,0{,}85[\coprod]1,1{,}35[$. Имеем $]0,0{,}85[=\bigcup_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n},0{,}85[$ и $]1,1{,}35[=\bigcup_{n=1}^{\infty}[1+\frac{1}{n},1{,}35[$. Поэтому каждый из двух рассматриваемых интервалов измерим. Так как каждый из этих двух интервалов представим в виде объединения возрастающей последовательности множеств, то на основании свойства 4 меры имеем

$$\mu_F(]0,0{,}85[)=\lim_{n\to\infty}\mu_F([\frac{1}{n},0{,}85[)=\lim_{n\to\infty}m_F([\frac{1}{n},0{,}85[)=$$

$$\lim_{n\to\infty}(F(0{,}85)-F(\frac{1}{n}))=3{,}5-0{,}85^{-1}-1=2{,}5-0{,}85^{-1};$$

$$\mu_F(]1,1{,}35[)=\lim_{n\to\infty}\mu_F([1+\frac{1}{n},1{,}35[)=\lim_{n\to\infty}m_F([1+\frac{1}{n},1{,}35[)=$$

$$\lim_{n\to\infty}(F(1{,}35)-F(1+\frac{1}{n}))=F(1{,}35)-F(1)=1-1{,}135^{-1}$$

и

$$\mu_F(A)=\mu_F(]0,0{,}85[)+\mu_F(]1,1{,}35[)=3{,}5-0{,}85^{-1}+1{,}35^{-1}.$$

Варианты заданий

Вариант 1:	1.1;	2.2;	3.7;	4.1;	5.1;	6.14.
Вариант 2:	1.2;	2.1;	3.13;	4.4;	5.2;	6.13.
Вариант 3:	1.3;	2.13;	3.5;	4.7;	5.3;	6.10.
Вариант 4:	1.4;	2.12;	3.2;	4.8;	5.4;	6.12.
Вариант 5:	1.5;	2.11;	3.5;	4.2;	5.5;	6.11.
Вариант 6:	1.6:;	2.10;	3.1;	4.8;	5.6;	6.13.
Вариант 7:	!.7;	2.9;	3.6;	4.3;	5.7;	6.14.
Вариант 8:	1.8;	2.8;	3.4;	4.3;	5.8;	6.11.
Вариант 9:	1.9;	2.7;	3.13;	4.6;	5.9;	6.13.
Вариант 10:	1.10;	2.6;	3.5;	4.9;	5.10;	6.1.
Вариант 11:	1.11;	2.5;	3.10;	4.5;	5.11;	6.2.
Вариант 12:	1.12;	2.4;	3.3;	4.7;	5.12;	6.3.
Вариант 13:	1.13;	2.3;	3.10;	4.9;	5.13;	6.4.
Вариант 14:	1.14;	2.1;	3.4;	4.2;	5.1;	6.13.

Вариант 15:	1.1;	2.5;	3.11;	4.6;	5.2;	6.14.
Вариант 16:	1.3;	2.3;	3.7;	4.10;	5.14;	6.1.
Вариант 17:	1.1;	214;	3.1;	4.1;	5.1;	6.13.
Вариант 18:	1.5;	2.4;	3.12;	4.1;	5.3;	6.11.
Вариант 19:	1.8;	2.6;	3.8;	4.13;	5.4;	6.10.
Вариант 20:	1.7;	2.2;	3.1;	4.12;	5.5;	6.8.
Вариант 21:	1.10;	2.7;	3.9;	4.11;	5.6;	6.12.
Вариант 22:	1.9;	2.8;	3.9;	4.4;	5.7;	6.14.
Вариант 23:	1.11;	2.9;	3.3;	4.5;	5.8;	6.13.
Вариант 24:	1.12;	2.11;	3.6;	4.12;	5.9;	6.1.
Вариант 25:	1.14;	2.12;	3.2;	4.13;	5.10;	6.3.

III. Д о п о л н и т е л ь н ы е з а д а ч и и у п р а ж н е н и я

В задачах 12-16 на числовой прямой рассматривается мера Лебега μ.

12. Доказать, что измеримые по Лебегу подмножества прямой образуют множество мощности равной мощности множества всех подмножеств прямой. Отсюда, используя задачу 11, установить, что существуют измеримые по Лебегу подмножества прямой, которые не являются борелевскими.

13. Для любого $\alpha>0$ построить нигде не плотное измеримое подмножество отрезка $[0,1]$ с мерой большей $1-\alpha$.

14. Показать, что для каждое измеримого подмножество прямой положительной меры содержит неизмеримое подмножество.

15. Показать, что система $\{A_n\}$, где $A_n=[n,+\infty[$ удовлетворяет условию $A_n \subset A_{n-1}$ $(n=2,3,...)$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$ и $\mu(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n)$. Сравнить со свойством 5 меры.

16. Привести пример ненулевой меры на $\mathbf{R}$, для которой каждое подмножество $\mathbf{R}$ измеримо.

Пусть m — конечная мера, заданная на некотором кольце $\mathfrak{R}$ подмножеств множества X. Множество $A\subset X$ называется измеримым по Жордану, если для любого $\varepsilon>0$ в кольце $\mathfrak{R}$ имеются множества A^1и A^2, удовлетворяющие условиям:

$$A^1\subset A\subset A^2, \quad m(A^2 \setminus A^1) < \varepsilon..$$

17. Пусть $\mathfrak{I}$ система всех подмножеств A множества X, для которых существует множество $B \supset A$ из $\mathfrak{R}$. Доказать, что система $\mathfrak{I}$ является кольцом подмножеств множества X, что $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{I}$ и что каждое измеримое по Жордану множество принадлежит $\mathfrak{I}$.

18. Для любого A из $\mathfrak{I}$ положим

$$\overline{\mu}(A) = \inf\{(B) | B \supset A, B \in \mathfrak{R}\}$$

$$\underline{\mu}(A) = \sup\{m(B) | B \subset A, B \in \mathfrak{R}\}$$

Доказать, что множество *A* измеримо по Жордану тогда и только тогда, когда $\underline{\mu}(A) = \overline{\mu}(A)$.

19. Показать, что система $\mathfrak{R}^*$ всех измеримых по Жордану множеств образует кольцо подмножеств множества X, а функции $\mu(A) = \overline{\mu}(A) = \underline{\mu}(A)$ $(A \in \mathfrak{R})$ является мерой и продолжением меры *m*.

20. Доказать, что жорданово продолжение μ меры *m* является полной мерой (т.е., что каждое подмножество измеримого по Жордану множества меры нуль измеримо по Жордану и имеет меру нуль).

Пусть теперь *m* — σ-аддитивная мера.

21. Доказать, что каждое измеримое по Жордану множество измеримо и по Лебегу, и что его жорданова и лебегова меры одинаковы.

22. Привести пример множества измеримого по Лебегу, но не измеримого по Жордану. (Указание. Рассмотрите множество иррациональных чисел отрезка [0,1] и меру Лебега на прямой).