ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 14

СОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТ-ВЕ

I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ

Пусть H - гильбертово пространство со скалярным произведением (x,y), и $A: H \to H$ — линейный ограниченный оператор в H. Тогда существует единственный оператор $A^*: H \to H$, удовлетворяющий при всех x,y из H соотношению

$$(Ax,y) = (x,A^*y).$$

<u>Определение 1.</u> Оператор A^* называется **сопряженным оператором** к оператору A в гильбертовом пространстве H.

<u>Определение 2.</u> Ограниченный оператор A в гильбертовом пространстве H называется **самосопряженным**, если $A = A^*$, т.е. для произвольных x,y из H выполняется равенство $(Ax,y) = (x,Ay)$.

Отметим следующие свойства операции сопряжения:

1) $A^{**} = A;$
2) $(A + B)^* = A^* + B^*;$
3) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*;$
4) $(AB)^* = B^*A^*;$
5) $||A|| = ||A^*||.$

<u>Определение 3.</u> Ограниченный оператор N в H называется **нормальным**, если $NN^* = N^*N$. Если же для ограниченного оператора U в H выполняется равенство $U^*=U^{-1}$, то оператор U называется **унитарным.**

Литература: [1], с. 264 - 269; [2] , с. 218 - 219; [4] , с. 117 - 123.

II. ЗАДАЧИ

1. В пространстве $\mathbf{C}^3$ со скалярным произведением $(x, y) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + x_3\overline{y_3}$ найдите сопряженный оператор A^* для оператора A, заданного матрицей M. Является ли A самосопряженным?

	M		M

1.1	$\begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & i \end{pmatrix}$	1.8	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.2	$\begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix}$	1.9	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2i \\ 0 & i & i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	1.10	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
1.4	$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix}$	1.11	$\begin{pmatrix} -i & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
1.5	$\begin{pmatrix} i & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1.12	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 0 & 1 & 0 \\ -2i & 0 & 1 \end{pmatrix}$
1.6	$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	1.13	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -i \\ 0 & i & 2 \end{pmatrix}$
1.7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1.14	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Решение задачи 1.14. Если сопряженному оператору соответствует матрица M^* $=(b_{k,j})_{k,j=1}^{3}$, то при всех x,y из $\mathbf{C}^3$ выполняется равенство $(Mx,y) = (x,M^*y)$. Вычисляя обе части этого равенства и приравнивая коэффициенты при $x_k \overline{y_j}$, получаем $b_{11} = b_{12} = 0$; $b_{13} = -i$; $b_{21} = b_{22} = 0$; $b_{13} = 1$; $b_{31} = i$; $b_{32} = 1$; $b_{33} = 0$. Таким образом, $M^* = M$, т.е. оператор A само-сопряженный.

2. Вычислите сопряженный к оператору A в пространстве $L_2[0,1]$. При каких $\alpha \in \mathbf{C}$ оператор A является 1)самосопряженным; 2) унитарным; 3) нормальным?

	$(Ax)(t)$		$(Ax)(t)$
2.1	$(\alpha \sin t)x(t)$	2.8	$\alpha t^3 x(t)$
2.2	$\alpha i t x(t)$	2.9	$\cos(\alpha t)x(t)$
2.3	$e^{\alpha i t} x(t)$	2.10	$e^{\alpha} t x(t)$

2.4	$e^{\alpha\pi i}tx(t)$	2.11	$(\sin\alpha)\sqrt{t}x(t)$
2.5	$\alpha t^2 x(t)$	2.12	$(\cos\alpha)tx(t)$
2.6	$\alpha\sqrt[3]{t}x(t)$	2.13	$\alpha^2\sqrt{t}x(t)$
2.7	$\sin(\alpha t)x(t)$	2.14	$e^{\alpha t}x(\sqrt{t})$

Решение задачи 2.14. Если мы положим для краткости $(A^*y)(t) = z(t)$ ($y\in L_2[0,1]$), то равенство $(Ax,y) = (x,A^*y)$, справедливое для всех $x, y \in L_2[0,1]$, приобретает вид

$$\int_0^1 e^{\alpha t}x(\sqrt{t})\overline{y(t)}dt = \int_0^1 x(t)\overline{z(t)}dt.$$

произведя в левой части замену переменной по формуле $s=\sqrt{t}$,получаем

$$\int_0^1 x(s)2se^{\alpha s^2}\,\overline{y(s^2)}ds = \int_0^1 x(s)\overline{z(s)}ds,$$

что выполняется тождественно по $x, y \in L_2[0,1]$, если $\overline{z(s)} = 2se^{\alpha s^2}\,\overline{y(s^2)}.$ Таким образом,

$$(A^*y)(t) = 2te^{\bar{\alpha}t^2}y(t^2).$$

Далее, при всех $y\in L_2[0,1]$) имеем

$$(AA^*y)(t) = e^{\alpha t}(2\sqrt{t}e^{\bar{\alpha}t}\;y(t)) = 2\sqrt{t}e^{t\operatorname{Re}\alpha}y(t).$$

С другой стороны,

$$(A^*Ay)(t) = 2te^{\bar{\alpha}t^2}(e^{\alpha t^2}y(t)) = 2te^{t^2\operatorname{Re}\alpha}y(t),$$

откуда следует, что оператор A не будет нормальным ни при каком $\alpha\in\mathbf{C}$.

3. Найдите сопряженный для оператора $A{:}l_2\to l_2$ и выясните, является ли A самосопряженным

	Ax		Ax		Ax
3.1	$(x_2,x_3, ...)$	3.6	$(x_1,x_2,x_3,0, ...)$	3.11	$(0,0,x_1, x_2/2, ...)$
3.2	$(0,x_1,x_2, ...)$	3.7	$(x_2/2,x_3/3, ...)$	3.12	$(0,0,x_2,0, ...)$
3.3	$(0,0,0,x_1,0, ...)$	3.8	$(x_2,x_3,0, ...)$	3.13	$(x_5,x_6,x_7, ...)$
3.4	$(x_1,x_2/2,x_3/3, ...)$	3.9	$(x_1,0,x_2,0,x_3, ...)$	3.14	$(x_1,0,0,x_2,0, ...)$

3.5	$(0,x_1,x_2/2, ...)$	3.10	$(x_3/3,x_4/4, ...)$		

Решение задачи 3.14. Пусть $x = (x_1,x_2, ...)$; $y = (y_1,y_2, ...)$ принадлежат l_2. По определению скалярного произведения в l_2 имеем

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}.$$

Поэтому соотношение $(Ax,y) = (x,A^*y)$ перепишется в виде

$$x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_4} = x_1\overline{z_1} + x_2\overline{z_2} + \ldots,$$

где положено $A^*y = z = (z_1,z_2, ...)$. Приравнивая коэффициенты при x_i, получим $\overline{z_1} = \overline{y_1}$, $\overline{z_2} = \overline{y_4}, \overline{z_3} = 0, \ldots$. Поэтому

$$A^*y = (y_1,y_4,0, ...).$$

Очевидно, что $A \neq A^*$, т.е. оператор A не является самосопряженным.

4. Если это возможно, укажите пример самосопряженного оператора A в гильбертовом пространстве, дискретный спектр которого совпадает с данным множеством $S \subset \mathbf{C}$.

	S		S		S
4.1	$\{1/n{:}n=1,2,...\}$	4.6	$\{0,1,2,3\}$	4.11	$\{\sin(in){:}n=1,2,...\}$
4.2	$\{0,i\}$	4.7	$\{\lambda \in C : \lvert\lambda\rvert = 1\}$	4.12	$[0;+\infty)$
4.3	$\{2^{-k}{:}k=1,2,...\}$	4.8	$\{e^{i\varphi} : 0 \le \varphi \le \pi\}$	4.13	$\{-1,0,1\}$
4.4	$\{i/n{:}n=1,2,...\}$	4.9	$\{2^n{:}n=1,2,...\}$	4.14	$\{0,1,5\}$
4.5	$\{in{:}n=1,...10\}$	4.10	$\{\cos(in){:}n=1,2,...\}$		

Решение задачи 4.14. Возьмем ограниченную последовательность $(\alpha_n) \subset \mathbf{C}$ и рассмотрим соответствующий ей диагональный оператор A в пространстве l_2:

$$Ax = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \cdots).$$

Он будет самосопряженным тогда и только тогда, когда все α_i вещественны (проверьте). Как известно (см. лабораторную работу «Спектр оператора»), его дискретный спектр есть $\sigma_p(A) = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots\}$. Поэтому в качестве искомого можно взять оператор

$$Ax = (0,x_2,5x_3, ...).$$

5. Найдите сопряженный для интегрального оператора

$$(Ax)(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)ds,$$

действующего в пространстве $L_2[0,1]$, и выясните, является ли он самосопряженным.

	$K(t,s)$		$K(t,s)$		$K(t,s)$
5.1	$e^{i}\sin(t+s)$	5.6	$i(t+s)$	5.11	$\cos(t+s)$
5.2	$e^{2(t+s)}$	5.7	ts	5.12	ts^2
5.3	$\sqrt{t^2+s^2}$	5.8	$2it^2s$	5.13	$\sqrt{ts}$
5.4	$2(t^2+s^2)$	5.9	t^2s^2	5.14	$\begin{cases}1, 0 \le s \le t\\ 0, s > t\end{cases}$
5.5	$e^{i(t+s)}$	5.10	te^{s}		

Решение задачи 5.14. Используя теорему Фубини, получаем

$$(Ax,y) = \int_0^1 \Big(\int_0^t x(s)ds\Big)\overline{y(t)}dt = \int_0^1 ds \int_s^1 x(s)\overline{y(t)}dt = \int_0^1 x(s)\Big(\overline{\int_s^1 y(t)dt}\Big)ds = (x, A^* y).$$

Поэтому

$$(A^* y)(s) = \int_s^1 y(t)dt.$$

Очевидно, $A^* \ne A$.

6. Докажите следующие утверждения для операторов в комплексном гильбертовом пространстве H.

6.1. Свойство 1 операции сопряжения.

6.2. Свойство 2 операции сопряжения.

6.3. Свойство 3 операции сопряжения.

6.4. Свойство 4 операции сопряжения.

6.5. Дискретный спектр самосопряженного оператора вещественен.

6.6. Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

6.7. Ортогональное дополнение A-инвариантного подпространства пространства H также A-инвариантно, если оператор A самосопряжен.

6.8. Оператор $A - iI$ обратим, если A самосопряжен.

6.9. Если оператор A самосопряжен, то $(A^2x,x)\geq 0$ при всех x из H.

6.10. Если оператор A обратим, то $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

6.11. Если операторы A_1 и A_2 перестановочны, то перестановочны и сопряженные к ним операторы.

6.12. Если оператор U унитарен, то $||Ux|| = ||x||$ при всех x.

6.13. Если оператор самосопряжен и обратим, то обратный ему оператор также самосопряжен.

6.14. Каждый оператор A единственным образом можно представить в виде $A = B + iC$, где операторы B и C самосопряжены.

Решение задачи 6.14. Из свойств операции сопряжения сразу следует, что операторы $B=\dfrac{1}{2}(A+A^*)$ и $C=\dfrac{1}{2i}(A-A^*)$ самосопряжены, и непосредственно проверяется, что $A = B + iC$. Если, к тому же, $A = E + iF$, где операторы E,F также самосопряжены, то $A^* = E^* - iF^* = E - iF$. Поэтому $A + A^* = 2E$, откуда $E=\dfrac{1}{2}(A+A^*)=B$. Аналогично, $F = C$, что и доказывает единственность представления.

Варианты заданий см.отри в лабораторной работе 13.

III. Д О П О Л Н И Т Е Л Ь Н Ы Е   З А Д А Ч И.

Докажите следующие утверждения для ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H.

8. Свойство 5 операции сопряжения.

9. Если оператор A самосопряжен, то

$$||A|| = \sup\{(Ax,x): ||x|| = 1\}.$$

10. Следующие операторы унитарны в пространстве $L_2(\boldsymbol{R})$:

а) оператор сдвига $(T_hx)(t) = x(t - h)$.

б) Преобразование Фурье

$$(Fx)(\lambda) = \int_R x(t)e^{-2\pi i\lambda t}\,dt.$$

11. Оператор P в H, обладающий свойством $P^2 = P^* = P$, является ортопроектором.

12. $\|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2$.

13. В обозначениях задачи 6.14 оператор A

а) нормален тогда и только тогда, когда B и C перестановочны;

б) унитарен тогда и только тогда, когда B и C перестановочны и $B^2 + C^2 = I$.

14. Может ли дискретный спектр самосопряженного оператора быть пустым множеством?