ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 13

ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ.

Определение 1. Будем говорить, что на векторном пространстве H (над полем K = **R** или **C**) задано **скалярное произведение**, если задано отображение $\omega: H \times H \to K$ (далее вместо $\omega(x, y)$ пишем просто (x,y)), удовлетворяющее следующим аксиомам:

1) $(x, x) \geq 0, (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

2) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y);\ (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y);$

3) $(x, y) = \overline{(y, x)}.$

Определение 2. Векторное пространство со скалярным произведением называется **предгильбертовым** пространством. **Нормой** элемента x предгильбертова пространства называется число $\| x \| = \sqrt{(x, x)}.$

Определение 3. Предгильбертово пространство, полное относительно указанной нормы, называется **гильбертовым.**

В дальнейшем E — предгильбертово пространство.

Определение 4. Вектор $x \in E$ называется **ортогональным** множеству $M \subset E$, если $(x,y) = 0$ при всех $y \in M$. Множество векторов, ортогональных M, называется его **ортогональным дополнением** и обозначается $M^{\perp}$.

Определение 5. Система векторов $(x_\alpha) \subset E$ называется **ортогональной**, если $(x_\alpha, x_\beta) = 0$ при $\alpha \neq \beta$. Если, кроме того, $\|x_\alpha\| = 1$ при всех α, то эта система называется **ортонормированной.**

Определение 6. Система векторов $(x_\alpha) \subset E$ называется **полной**, если ее линейная оболочка плотна в E.

Следующее понятие является одним из важнейших в теории предгильбертовых пространств.

Определение 7. Полная ортогональная система векторов пространства E называется **ортогональным базисом** этого пространства. Если ортогональный базис нормирован, то он называется **ортонормированным базисом.**

Определение 8. Пусть (φ_n) — счетная ортонормированная система векторов в E. Для любого $f \in E$ числа $\hat{f}_n = (f, \varphi_n)$ называются **коэффициентами Фурье** элемента f по системе (φ_n), а ряд

$\sum\limits_n \hat{f}_n \varphi_n$ - **рядом Фурье** элемента f по этой системе.

ТЕОРЕМА. *Пусть (φ_n) — счетная ортонормированная система в гильбертовом пространстве H. Следующие утверждения равносильны:*

1) (φ_n) *- ортогональный базис в H;*
2) *любой элемент $f \in H$ является суммой своего ряда Фурье по системе (φ_n);*
3) *если $(f, \varphi_n) = 0$ для любого n, то $f = 0$;*
4) *для любого $f \in H$ выполняется* ***равенство Парсеваля***

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\hat{f}_n\right|^2 .$$

Другие важные свойства гильбертовых пространств см., например, в [1], [2].

ЛИТЕРАТУРА: [1], § 29 – 32, [2], гл. III, § 4.

II. З А Д А Ч И

1. Проверить аксиомы скалярного произведения для функции $\omega : L \times L \to \mathbf{C}$, где L — линейное пространство над полем **C.**

	L	$\omega(x, y)$
1.1	l_2	$\sum\limits_n (1/n) x_n \overline{y_n}$
1.2	$C^{(1)}[a, b]$	$\int\limits_a^b (x(t)y(t) + x'(t)y'(t))dt$
1.3	$C[a,b]$	$\int\limits_a^b e^{-t} x(t)y(t)dt$
1.4	Пространство $BC(\mathbf{R})$ ограниченных непрерывных функций на $\mathbf{R}$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} x(t)y(t)dt$
1.5	l_∞	$\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2) x_n y_n$
1.6	c	$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} x_n y_n$
1.7	$C([a,b] \times [a,b])$	$\int\limits_a^b \int\limits_a^b t x(s,t) \overline{y(s,t)} ds dt$

1.8	c_0	$\sum_n n^{-\frac{3}{2}} x_n \overline{y_n}$
1.9	$C[0,1]$	$\int_a^b t^{-\frac{1}{2}} x(t)\overline{y(t)}dt$
1.10	$L_2([0,1]\times[0,1])$	$\int_0^1\int_0^1 x(s,t)\overline{y(s,t)}dsdt$
1.11	$\{x\in C[0,+\infty): \int_0^\infty \lvert x(t)\rvert^2\ tdt<\infty\}$	$\int_0^\infty x(t)\overline{y(t)}tdt$
1.12	$\{x\in C(R): \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t)\rvert^2\ t^2dt<\infty\}$	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\overline{y(t)}t^2dt$
1.13	$l_2(Z):=\{(x_n)_{n\in Z}, \sum_{n\in Z}\lvert x_n\rvert^2<\infty\}$	$\sum_{n\in Z} x_n\overline{y}_n$
1.14	$\{x\in C(R^2): \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(s,t)\rvert e^{-\lvert st\rvert}dsdt<\infty\}$	$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(s,t)\overline{y(s,t)}e^{-\lvert st\rvert}dsdt$

Решение задачи 1.14. Сходимость интеграла, определяющего $\omega(x,y)$, вытекает из неравенства

$$\left|\iint_{R^2} x(s,t)\overline{y(s,t)}e^{-|st|}dsdst\right|^2 \le \iint_{R^2}|x(s,t)|^2\ e^{-|st|}dsdt \iint_{R^2}|y(s,t)|^2\ e^{-|st|}dsdt,$$

являющегося частным случаем общего неравенства Коши-Буняковского в пространствах $L_2(X,\mu)$. Остальные свойства скалярного произведения проверяются непосредственно (упражнение).

2. Докажите, что в гильбертовом пространстве H над полем K справедливы следующие утверждения.

2.1 . $\|x-y\|^2+\|z-x\|^2+\|z-y\|^2=\frac{1}{2}\|2\|z-\frac{x+y}{2}\|^2$ <u>(тождество Аполлония).</u>

2.2. $\|x-y\|^2+\|x+y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$ (тождество параллелограмма).

2.3. $(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2-i\|x+iy\|^2+i\|x-iy\|^2), K=\mathbf{C}$ (поляризационное тождество).

2.4. $\left\|\sum_{k=1}^n x_k\right\|^2=\sum_{k=1}^n\|x_k\|^2$, если $x_k\perp x_l, k\ne l, k,l=1,\dots n.$

2.5. $(x,y)=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{3}\left\|x+e^{\frac{2\pi ik}{3}}y\right\|^{2}e^{\frac{2\pi in}{3}}$, $K=\mathbf{C}$.

2.6. $(x,y) = 1/2(||x+y||^2 - ||x-y||^2)$, $K = \mathbf{R}$.

2.7. Равенство $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$ выполняется тогда и только тогда, когда x ортогонально y.

2.8. Если в банаховом пространстве X над $\mathbf{C}$ выполняется тождество параллелограмма (см. задачу 2.2), то равенство задачи 2.3 задает в X скалярное произведение.

2.9. Если в банаховом пространстве X над $\mathbf{R}$ выполняется тождество параллелограмма
(см. задачу 2.2), то равенство задачи 2.6 задает в X скалярное произведение.

2.10. Если $x\perp y$, то $\| y \|\le\| \lambda x + y \|$ $\forall\lambda\in\mathbf{C}$, K=$\mathbf{C}$.

2.11. Равенство $\|\lambda x\|^2+\|\mu y\|^2=\|\lambda x+\mu y\|^2$ справедливо для всех $\lambda,\mu\in$ C тогда и только тогда, когда $x\perp y$, K = $\mathbf{C}$.

2.12. Если (x_n) — ортогональная система в H, и $\sum\limits_n\|x_n\|^2<\infty$, то ряд $\sum\limits_n x_n$ сходится (используйте утверждение задачи 2.4).

2.13. Если (e_n)-ортонормированная система в H, и ряд $\sum\limits_n\lambda_n e_n$ сходится $(\lambda\in K)$, то $\sum\limits_n|\lambda_n|^2<\infty$ (используйте утверждение задачи 2.4).

2.14. $(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\|x+e^{i\varphi}y\|^2\,e^{i\varphi}d\varphi$, $K=\mathbf{C}$.

Решение задачи 2.14. Так как $||x||^2 = (x,x)$, то, используя свойства скалярного произведения, имеем

$$\|x+e^{i\varphi}y\|^2=(x+e^{i\varphi}y,x+e^{i\varphi}y)=\|x\|^2+e^{-i\varphi}(x,y)+e^{i\varphi}(y,x)+\|y\|^2 .$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\|x+e^{i\varphi}y\|^2\,e^{i\varphi}d\varphi=(\|x\|^2+\|y\|^2)\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{i\varphi}d\varphi+(x,y)+(y,x)\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{2i\varphi}d\varphi=(x,y).$$

3. Докажите, что в нормированном пространстве X нельзя ввести скалярное произведение, согласованное с нормой этого пространства.

	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7
X	$C[0,1]$	l_1	$C^{(1)}[0,1]$	l_∞	$L_1[0,1]$	c_0	l_3
	3.8	3.9	3.10	3.11	3.12	3.13	3.14
X	$C([0,1]^2)$	$C^{(2)}[0,1]$	$BC(\mathbf{R})$	$L_3[0,1]$	$L_1([0,1]^2)$	l_5	c

Решение задачи 3.14. Если норма согласована со скалярным произведением (т.е.$||x||=(x,x)$), то имеет место **тождество параллелограмма** $||x+y||^2 + ||x-y||^2=2(||x||^2+||y||^2)$. Поэтому достаточно указать два вектора $x, y \in c$, для которых это равенство не имеет места. Легко видеть, что этому требованию удовлетворяют векторы $x=(1,0,0,...)$, $y=(0,1,0,...)$.

4. Вычислите угол между векторами x,y: а) в пространстве H_1, б) в пространстве H_2.

	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7
x	$\sin 3t$	t	e^{-t}	$\sin \pi t$	t	t^2	$\sin \pi t$
y	$\cos 5t$	t^2	e^{-2t}	$\sin t$	$\cos t$	$\sin t$	$\cos \pi t$
H_1	$L_2[-\pi, \pi]$	$L_2[0,1]$	$L_2[-1,1]$	$L_2[0,1]$	$L_2[0,1]$	$L_2[0,\pi]$	$L_2[-1,1]$
H_2							
	4.8	4.9	4.10	4.11	4.12	4.13	4.14
x	e^t	1	$(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...)$	$(e,e^{-1},e^{-2},...)$	t	1	t
y	t	st	$(0,1,0,...)$	$(1,0,0...)$	t^2	t^3	1
H_1	*см.зад.*1.2	*см.зад.*1.7	l_2	l_2	$L_2[0,1]$	$L_2[0,1]$	$L_2[-1,1]$
H_2	*см.зад.*1.3	*см.зад.*1.10	*см.зад.*1.5	*см.зад.*1.6	*см.зад.*1.2	*см.зад.*1.9	$L_2[0,1]$

Решение задачи 4.14. Величина угла φ между векторами в гильбертовом пространстве вычисляются по формуле

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|.}$$

В случае пространства H_1 имеем $\cos\varphi = 0,$ так как $(x,y) = \int_{-1}^{1} 1\cdot t dt = 0.$ Следовательно, $\varphi = \pi/2.$ В случае пространства H_2 имеем $(x,y) = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}, \|x\| = \sqrt{\int_0^1 t^2 dt} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \|y\| = \sqrt{\int_0^1 1 dt} = 1.$ Следовательно, $\cos\varphi = 1/2\sqrt{3}; \varphi = \arccos(1/2\sqrt{3}).$

5. Проверьте, что система векторов (φ_n) является ортогональным базисом пространства H.

	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7
H	*см.зад.*1.1	l_2	*см.зад.*1.5	*см.зад.*1.6	*см.зад.*1.8	*см.зад.*1.1	$L_2[0,1]$

						3	
φ_n	$e_n, n\in \mathbf{N}$	$e_n, n\in \mathbf{N}$	$e_n, n\in \mathbf{N}$	$e_n, n\in \mathbf{N}$	$e_n, n\in \mathbf{N}$	$f_n, n\in \mathbf{Z}$	$e^{2\pi int}$, $n\in \mathbf{Z}$
	5.8	5.9	5.10	5.11	5.12	5.13	5.14
H	$L_2[0,1]$	$L_2[0,1]$	$L_2[0,\pi]$	$L_2[0,\pi]$	$L_2[-\pi,\pi]$	$L_2[0,2\pi]$	$L_2[-1,1]$
φ_n	$\sin \pi nt$, $n\in \mathbf{N}$	$\cos \pi nt$, $n\in \mathbf{N}$	$\sin nt$, $n\in \mathbf{N}$	e^{2int}, $n\in \mathbf{Z}$	e^{int}, $n\in \mathbf{Z}$	e^{int}, $n\in \mathbf{Z}$	$1, \cos n\pi t$ $, \sin n\pi t$

(мы полагаем $e_n = (0,...,0,1_n,0,...)$, $f_n = (...,0,1_n,0,...)$.)

Решение задачи 5.14. Ортогональность этой системы проверяется прямым вычислением .Например,

$$\int_{-1}^{1}\cos m\pi t\overline{\cos n\pi t}dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(\cos(m+n)\pi t + \cos(m-n)\pi t)dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Для доказательства полноты воспользуемся теоремой Вейерштрасса, согласно которой любая непрерывная 2-периодическая функция есть предел равномерно сходящейся последовательности 2-периодических тригонометрических полиномов, т.е. линейных комбинаций элементов рассматриваемой системы. Таким образом, линейная оболочка этой системы плотна в пространстве $C^0[-1,1]$ непрерывных на отрезке [-1,1] функций, принимающих на концах этого отрезка одинаковые значения. В свою очередь, последнее пространство плотно в $L_2[-1,1]$, что и завершает доказательство.

6. Для данного подмножества M гильбертова пространства H найдите ортогональное дополнение $M^{\perp}$.

	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7
H	$L_2[-1,1]$	$L_2[0,\infty]$	$L_2[-1,1]$	$L_2(\mathbf{R})$	$L_2[-\pi,\pi]$	$L_2[0,1]$	l_2
M	$\{x: x(t)=0$ *при* $t<0\}$	$\{x: x(t)=0$ *при* $t>1\}$	$\{x: \int_{-1}^{1}x(t)dt=0\}$	$\{x: \int_{0}^{\infty}x(t)e^{-t}dt=0$	$\{x: \int_{-\pi}^{0}x(t)\sin t dt =$ $=0\}$	$\{x: x(t)=0$ *при* $t>$ $1/2\}$	$\{x_1=x_3=$ $=0\}$
	6.8	6.9	6.10	6.11	6.12	6.13	6.14
H	l_2	l_2	l_2	l_2	l_2	l_2	$L_2[0,1]$
M	$\{x_1+x_2=$ $0\}$	$\{x_1=x_2\}$	$\{x_{2n}=0,$ $n\in\mathbf{N}\}$	$\{x_{2n-1}=$ $=0, n\in\mathbf{N}\}$	$\{x_1=$ $=x_3=...\}$	$\{x_2=$ $=x_4=...\}$	$\{x: \int_{0}^{1}x(t)tdt=0\}$

Решение задачи 6.14. Рассмотрим функцию $a(t)=t$ в пространстве $L_2[0,1]$. Тогда $M=\{x : x \perp a\}=\{Ka\}^{\perp}$, где $Ka=\{\lambda a : \lambda\in K\}$ — одномерное подпространство , порожденное вектором a. Следовательно, $M^{\perp}=\{Ka\}^{\perp\perp}=Ka\cong K$.

Варианты заданий

Вариант 1:	1.1;	2.1;	3.1;	4.1;	5.1;	6.1.
Вариант 2:	1.2;	2.2;	3.2;	4.2;	5.2;	6.2.
Вариант 3:	1.3;	2.3;	3.3;	4.3;	5.3;	6.3.
Вариант 4:	1.4;	2.4;	3.4;	4.4;	5.4;	6.4.
Вариант 5:	1.5;	2.5;	3.5;	4.5;	5.5;	6.5.
Вариант 6	1.6;	2.6;	3.6;	4.6;	5.6;	6.6.
Вариант 7:	1.7;	2.7;	3.7;	4.7;	5.7;	6.7.
Вариант 8:	1.8;	2.8;	3.8;	4.8;	5.8;	6.8.
Вариант 9:	1.9;	2.9;	3.9;	4.9;	5.9;	6.9.
Вариант 10	1.10;	2.10;	3.10;	4.10;	5.10;	6.10.
Вариант 11	1.11;	2.11;	3.11;	4.11;	5.11;	6.11.
Вариант 12	1.12;	2.12;	3.12;	4.12;	5.12;	6.12.
Вариант 13	1.13;	2.13;	3.13;	4.13;	5.13;	6.13.
Вариант 14	1.12;	2.1;	3.3;	4.5;	5.4;	6.7.
Вариант 15	1.1;	2.9;	3.12;	4.2;	5.7;	6.3.
Вариант 16:	1.2;	2.8;	3.1;	4.11;	5.10;	6.4.
Вариант 17	1.3;	2.13;	3.2;	4.6;	5.9;	6.5.
Вариант 18	1.4;	2.12;	3.11;	4.13;	5.8;	6.3.
Вариант 19	1.5;	2.11;	3.10;	4.9;	5.6;	6.2.
Вариант 20	1.6;	2.10;	3.9;	4.8;	5.5;	6.10.
Вариант 21	1.7;	2.6;	3.8;	4.4;	5.3;	6.13.
Вариант 22	1.8;	2.5;	3.7;	4.1;	5.2;	6.9.
Вариант 23	1.9;	2.7;	3.6;	4.3;	5.1;	6.8.
Вариант 24	1.10;	2.4;	3.5;	4.2;	5.11;	6.1.
Вариант 25	1.11;	2.3;	3.4;	4.10;	5.12;	6.6.

III. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. а). Докажите, что в пространстве тригонометрических полиномов формула

$$\omega(x,y)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(s)\overline{y(s)}ds$$

определяет скалярное произведение.

б). Проверьте, что континуум функций $e^{i\lambda x}$ ($\lambda\in\mathbf{R}$) образуют ортогональный базис этого пространства.

2. Докажите утверждение, обратное утверждению задачи 2.10.

3. Вычислите углы треугольника с вершинами $x_0(t)=1;\ x_1(t)=t;\ x_2(t)=0$ в пространстве $L_2[-1,1]$.

4. Проверьте, что последовательность векторов $\varphi_{k,n} = e^{2\pi i(nt+ks)}, n, k \in \mathbf{Z}$, образует ортогональный базис пространства $L_2([0,1]\times[0,1])$.

5. Найдите ортогональное дополнение в $L_2[-1,1]$ подпространства четных функций.

6. Докажите, что при любых $x, y, z \in H$ справедливо **неравенство Птолемея**

$$||x - z||\,||y-t|| \le ||x - y||\,||z - t|| + ||y - z||\,||x - t||.$$

7. Являются ли пространства задач 1.2; 1.7; 1.13 гильбертовыми?