ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 12

# КОМПАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

## 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ

Определение 1. Пусть $E_1, E_2 \in Ban$. Линейный оператор $A: E_1 \to E_2$ называется **компактным** (или **вполне ограниченным**), если он переводит каждое ограниченное множество из $E_1$ в предкомпактное множество из $E_2$.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы линейный оператор* $A$ *был компактным, необходимо и достаточно, чтобы образ замкнутого единичного шара с центром в нуле* $A(B[0,1])$ *был предкомпактным множеством в* $E_2$.

ТЕОРЕМА 2. *Множество всех компактных операторов* $A: E_1 \to E_2$ *является замкнутым линейным подпространством банахова пространства* $L(E_1, E_2)$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $E \in Ban$. *Тогда единичный оператор* $I: E \to E$ *компактен тогда и только тогда, когда размерность* $E$ *конечна.*

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $A: E_1 \to E_2$ *— ограниченный линейный оператор. Тогда если* $\dim A(E_2) < \infty$, *то оператор* $A$ *является компактным.*

ТЕОРЕМА 5. *Оператор, сопряженный к компактному, компактен.*

ТЕОРЕМА 6. *Пусть* $E_1, E_2, E_3 \in Ban$ *и* $B \in L(E_1, E_2)$, $A \in L(E_2, E_3)$. *Тогда оператор* $A \circ B$ *является компактным, если хотя бы один из операторов* $A$ *или* $B$ *компактен.*

ТЕОРЕМА 7. *Спектр компактного оператора конечен или счетен. Его непрерывный спектр или пуст или состоит из нуля. Ненулевые собственные значения имеют конечную кратность, причем, если их бесконечно много, то они образуют последовательность, сходящуюся к нулю.*

Литература : [1] с.245-249 ; [2] с. 237-250 ; [4] с. 205-207.

## 2. ЗАДАЧИ.

1. Доказать компактность интегрального оператора $(\mathrm{A}x)(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)ds$, $\mathrm{A}:\mathrm{E}\to\mathrm{E}$, где: 1) $\mathrm{E}=C[a,b]$; 2) $\mathrm{E}=L_2[a,b]$.

| | $a$ | $b$ | $K(t,s)$ | | $a$ | $b$ | $K(t,s)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.1 | 0 | 2 | $t^2e^s$ | 1.2 | –1 | 1 | $ts+1$ |
| 1.3 | 0 | $\pi$ | $\cos(t-s)$ | 1.4 | 0 | $\pi$ | $\cos(t+s)$ |
| 1.5 | –1 | 1 | $t^2-s^2$ | 1.6 | 0 | 1 | $t^2+s^2$ |
| 1.7 | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $t\sin(t+s)$ | 1.8 | 1 | 2 | $te^{t+s}$ |
| 1.9 | 0 | 1 | $t^2e^{t-s}$ | 1.10 | –1 | 1 | $ts^2-st^2$ |
| 1.11 | 0 | 1 | $t^4s-s^2t$ | 1.12 | 0 | 1 | $t^3s+s^2t$ |
| 1.13 | 0 | $\pi$ | $\sin(t+s)$ | 1.14 | 0 | $\pi$ | $\cos s+t\sin s$ |
| 1.15 | 0 | 1 | $t^2s^2+ts$ | 1.16 | 0 | 1 | $st^2+ts^2$ |

Решение задачи 1.16. Для решения задачи воспользуемся теоремой 4. Так как

$$(\mathrm{A}x)(t)=\int_0^1(st^2+ts^2)x(s)ds=t\int_0^1 s^2x(s)ds+t^2\int_0^1 sx(s)ds,$$

то $\mathrm{A}(C_{[0,1]})\subset\mathrm{E}_2,\mathrm{A}(L_{2[0,1]})\subset\mathrm{E}_2$, где $\mathrm{E}_2=\{\alpha t+\beta t^2:\alpha,\beta\in\boldsymbol{R}\}$. При этом $\dim\mathrm{E}_2=2$. Поэтому для компактности A в пространствах $C[0,1]$ и $L_2[0,1]$ достаточно показать, что A — линейный и ограниченный оператор в этих пространствах.

Поскольку линейность A следует из линейности интеграла, остановимся на доказательстве ограниченности оператора A, например, в $L_2[0,1]$.

Возьмем любую функцию $x\in L_2[0,1]$, тогда

$$\|\mathrm{A}x\|_{L_{2[0,1]}}=\left(\int_0^1\left|\int_0^1(st^2+ts^2)x(s)ds\right|^2dt\right)^{1/2}\le\left(\int_0^1\left[\int_0^1(s+s^2)|x(s)|ds\right]^2dt\right)^{1/2}=$$

$$=\int_0^1(s+s^2)|x(s)|ds\le\left(\int_0^1(s+s^2)^2ds\right)^{1/2}\left(\int_0^1|x(s)|^2ds\right)^{1/2}=\sqrt{\frac{47}{60}}\|x\|_{L_{2[0,1]}},$$

т.е. A — ограниченный оператор в $L_2[0,1]$. Аналогично доказывается ограниченность A в $C[0,1]$. По теореме 4 оператор A компактен. В заключении заметим, что оператор, удовлетворяющий условиям теоремы 4, называется оператором конечного ранга. ●

2. Какие из следующих операторов $\mathrm{A}: C[0,1]\to C[0,1]$ являются компактными ?

| | A | N | A |
|---|---|---|---|
| 2.1 | $(\mathrm{A}x)(t) = x(t^2)$ | 2.2 | $(\mathrm{A}x)(t) = t^{3/2}x(\sqrt{t})$ |
| 2.3 | $(\mathrm{A}x)(t) = t^2x(t)$ | 2.4 | $(\mathrm{A}x)(t) = e^t x(t)$ |
| 2.5 | $(\mathrm{A}x)(t) = t^2x(0)$ | 2.6 | $(\mathrm{A}x)(t) = 2x(t)$ |
| 2.7 | $(\mathrm{A}x)(t) = \int_0^t (t-s)x(s)ds$ | 2.8 | $(\mathrm{A}x)(t) = \int_0^t x(s)ds$ |
| 2.9 | $(\mathrm{A}x)(t) = x(\sqrt{t})$ | 2.10 | $(\mathrm{A}x)(t) = t^2x(0) + tx(1)$ |
| 2.11 | $(\mathrm{A}x)(t) = \int_0^1 \lvert t+s\rvert x(s)ds$ | 2.12 | $(\mathrm{A}x)(t) = \int_0^1 e^{\lvert t-s\rvert} x(s)ds$ |
| 2.13 | $(\mathrm{A}x)(t) = x(0) - tx(1)$ | 2.14 | $(\mathrm{A}x)(t) = x(t) + \int_0^1 tsx(s)ds$ |
| 2.15 | $(\mathrm{A}x)(t) = x(t) - \int_0^1 t^2sx(s)ds$ | 2.16 | $(\mathrm{A}x)(t) = \int_0^1 \lvert t-s\rvert x(s)ds$ |

Решение задачи 2.16. Представим оператор A в виде суммы двух операторов.

$$(\mathrm{A}x)(t) = \int_0^1 |t-s|x(s)ds = \int_0^t (t-s)x(s)ds + \int_t^1 (s-t)x(s)ds = (\mathrm{A}_1x)(t) + (\mathrm{A}_2x)(t).$$

Если теперь докажем, что каждый из операторов $\mathrm{A}_i$ компактен, то из теоремы 2 будет следовать компактность оператора A. Остановимся на проверке компактности оператора $\mathrm{A}_2$ (для $\mathrm{A}_1$ все рассуждения проводятся аналогично). Поскольку $\mathrm{A}_2$ — линейный и ограниченный оператор (доказать!), то по теореме 1 достаточно проверить является ли множество

$$\mathrm{A}_2(B[0,1]) = \left\{ \int_t^1 (s-t)x(s)ds \colon \|x\| = \max_{0\le t\le 1} |x(t)| \le 1 \right\}$$

предкомпактным в $C[0,1]$. Докажем предкомпактность этого множества с помощью теоремы Арцела-Асколи :

1) так как $\left\|\int\limits_t^1 (s-t)x(s)ds\right\| \le \max\limits_{0\le t\le 1} \int\limits_0^1 |s-t|\|x(s)|ds \le \|x\| \le 1$, то множество $A_2(B[0,1])$ ограниченно;

2) для любого $\varepsilon > 0$ и $\delta = \varepsilon$ , если $|t_1 - t_2| < \delta$, то для любой $x \in B[0,1]$ при $t_1 < t_2$ имеем

$$\left| \int\limits_{t_1}^1 (s-t_1)x(s)ds - \int\limits_{t_2}^1 (s-t_2)x(s)ds \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{t_1}^{t_2} (s-t_1)x(s)ds + \int\limits_{t_2}^1 (t_2-t_1)x(s)ds \right| \le |t_2 - t_1| \cdot \|x\| < \varepsilon,$$

т.е. множество $A_2(B[0,1])$ равностепенно непрерывно в $C[0,1]$. Итак, оператор $A_2$ - компактен в $C[0,1]$. ●

3. Какие из следующих операторов $A: l_2 \to l_1$ являются компактными ?

| | A | | A |
|---|---|---|---|
| 3.1 | $Ax = (0, x_3, x_4, \ldots)$ | 3.2 | $Ax = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$ |
| 3.3 | $Ax = \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots\right)$ | 3.4 | $Ax = (x_1, 0, x_2, 0, x_3, \ldots)$ |
| 3.5 | $Ax = (x_2, x_4, x_5, \ldots)$ | 3.6 | $Ax = \left(0, 0, \frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots\right)$ |
| 3.7 | $Ax = \left(\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \ldots\right)$ | 3.8 | $Ax = \left(0, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \ldots\right)$ |
| 3.9 | $Ax = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ | 3.10 | $Ax = (x_1, x_4, x_5, \ldots)$ |
| 3.11 | $Ax = \left(\frac{x_1}{1}, 0, \frac{x_3}{3}, 0, \frac{x_5}{5}, 0, \ldots\right)$ | 3.12 | $Ax = \left(0, \frac{x_2}{2}, 0, \frac{x_4}{4}, 0, \ldots\right)$ |
| 3.13 | $Ax = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, x_3, \frac{x_4}{4}, \ldots\right)$ | 3.14 | $Ax = \left(\frac{x_1}{1}, x_2, \frac{x_3}{3}, x_4, \ldots\right)$ |
| 3.15 | $Ax = \left(\frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \frac{x_5}{5}, \ldots\right)$ | 3.16 | $Ax = \left(0, \frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots\right)$ |

Решение задачи 3.16. Оператор $A = B \circ C$, где $Cx = \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots\right)$ действует из $l_2$ в $l_1$, а $Bx = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ — $l_1$ в $l_1$ (докажите это).

Покажем, что оператор $C$ компактен, а оператор $B$ ограничен. Тогда в силу теоремы 6 оператор А компактен, как произведение компактного оператора на ограниченный.

Пусть $x \in l_1$, тогда $\|Bx\| = \|(0, x_1, x_2, ...)\| = 1 \cdot \|x\|$ , т.е. $B$ — ограниченный оператор.

Докажем компактность оператора $C$ с помощью теоремы 2. Для этого рассмотрим последовательность компактных операторов $C_n$: $C_n x = \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{n}, 0, 0, \ldots\right)$, $n = 1,2,...$(они компактны по теореме 4 как операторы конечного ранга!) и покажем, что $\|C - C_n\| \to 0$, при $n \to \infty$. Пусть $x \in l_2$, тогда, применяя неравенство Коши-Буняковского, имеем

$$\|(C - C_n)x\| = \left\|\left(0, \ldots, 0, \frac{x_{n+1}}{n+1}, \frac{x_{n+2}}{n+2}, \ldots\right)\right\|_{l_1} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\frac{x^k}{k}\right| \le$$

$$\le \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2} \le \frac{1}{n+1} \|x\|_{l_2} .$$

Отсюда $\|C - C_n\| \to 0$, при $n \to \infty$ и оператор $C$ компактен, как предел сходящихся по норме компактных операторов $C_n$ (теорема 2). ●

4. Будет ли компактным оператор $\text{A}: \text{E}_1 \to \text{E}_2$ ?

| | $\text{E}_1$ | $\text{E}_2$ | A |
|---|---|---|---|
| 4.1 | $C^{(1)}[0,1]$ | $C[0,1]$ | $(\text{A}x)(t) = x'(t)$ |
| 4.2 | $C^{(2)}[0,1]$ | $C[0,1]$ | $(\text{A}x)(t) = x'(t)$ |
| 4.3 | $C^{(2)}[0,1]$ | $C[0,1]$ | $(\text{A}x)(t) = x''(t)$ |
| 4.4 | $C^{(1)}[0,1]$ | $L_2[0,1]$ | $(\text{A}x)(t) = x'(t)$ |
| 4.5 | $C[0,1]$ | $l_2$ | $\text{A}x = \left(\frac{1}{2}\int_0^1 tx(t)dt, ..., \frac{1}{2^k}\int_0^1 t^k x(t)dt, ...\right)$ |
| 4.6 | $C[0,1]$ | $l_2$ | $\text{A}x = \left(\frac{1}{2}\int_0^1 tx(t)dt, ..., \frac{1}{n}\int_0^1 t^{n-1} x(t)dt, ...\right)$ |
| 4.7 | $L_1[0,1]$ | $l_1$ | $\text{A}x = \left(\frac{1}{2}\int_0^1 tx(t)dt, ..., \frac{1}{2^k}\int_0^1 t^k x(t)dt, ...\right)$ |
| 4.8 | $C^{(1)}[0,1]$ | $C[0,1]$ | $(\text{A}x)(t) = x(t)$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4.9 | $C[0,1]$ | $L_2[0,1]$ | $(\mathrm{A}x)(t) = x(t)$ |
| 4.10 | $C^{(2)}[0,1]$ | $C[0,1]$ | $(\mathrm{A}x)(t) = x(t) + \int_0^t (t-s)x(s)ds$ |
| 4.11 | $L_4[0,1]$ | $L_2[0,1]$ | $(\mathrm{A}x)(t) = x(t)$ |
| 4.12 | $C[0,1]$ | $C[0,1]$ | $(\mathrm{A}x)(t) = \int_0^t x(s)ds + x(t)$ |
| 4.13 | $C^{(2)}[0,1]$ | $C^{(1)}[0,1]$ | $(\mathrm{A}x)(t) = x(t)$ |
| 4.14 | $L_1[0,1]$ | $L_2[0,1]$ | $(\mathrm{A}x)(t) = x(t)$ |
| 4.15 | $C^{(2)}[0,1]$ | $C^{(1)}[0,1]$ | $(\mathrm{A}x)(t) = x(t)$ |
| 4.16 | $L_1[0,1]$ | $l_1$ | $\mathrm{A}x = \left(\frac{1}{3}\int_0^1 tx(t)dt, \ldots, \frac{1}{3^k}\int_0^1 t^k x(t)dt, \ldots\right)$ |

Решение задачи 4.16. Линейность оператора $\mathrm{A}$ следует из линейности интеграла. Проверим, является ли оператор $\mathrm{A}$ ограниченным. Если $x \in L_1[0,1]$, то

$$\|\mathrm{A}x\|_{l_1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \left| \int_0^1 t^k x(t)dt \right| \le \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \right) \|x\|_{L_1[0,1]}$$

и оператор $\mathrm{A}$ является ограниченным

В силу теоремы 1 оператор $\mathrm{A}$ будет компактным, если множество $\mathrm{A}(B[0,1])$ будет предкомпактно в $l_1$ ($B[0,1]$ — единичный шар в $L_1[0,1]$). Для доказательства предкомпактности этого множества воспользуемся критерием предкомпактности в $l_1$:

1) оператор $\mathrm{A}$ ограничен, поэтому $\mathrm{A}(B[0,1])$ — ограниченное множество в $l_1$;

2) для $\varepsilon > 0$, пусть $n_0 = \left[ \log_3 \frac{2}{3}\varepsilon \right] + 1$ и тогда для $\forall x \in B[0,1]$ имеем

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{3^k} \left| \int_0^1 t^k x(t)dt \right| \le \|x\|_{L_1[0,1]} \cdot \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{3^k} \le \frac{1}{3^{n_0}} \frac{3}{2} \le \varepsilon .$$

Из 1), 2) по критерию предкомпактности в $l_1$ множество $\mathrm{A}(B[0,1])$ является предкомпактным. ●

5. Решить следующие задачи

5.1. Может ли компактный оператор $A$, действующий в бесконечномерном банаховом пространстве $E$, удовлетворять алгебраическому уравнению $I+1\cdot A+2\cdot A^2+...+nA^n=0$?

5.2. Может ли компактный оператор $A:E\to E$ иметь ограниченный обратный, если: а) $\dim E=\infty$; б) $\dim E<\infty$?

5.3. Пусть $E_1,E_2\in Ban$. Что можно сказать о компактности линейного оператора $A:E_1\to E_2$, если множество $A(E_1)$ не является сепарабельным метрическим подпространством $E_2$?

5.4. Пусть $A$ — компактный оператор в бесконечномерном банаховом пространстве $E$. Доказать, что существует $y\in E$ такое, что уравнение $Ax=y$ не имеет решения.

5.5. Пусть $E_1$ — замкнутое подпространство банахова пространства $E$. Доказать, что оператор вложения $Ax=x, x\in E_1$ компактен тогда и только тогда, когда $\dim E_1<\infty$.

5.6. Привести пример не компактного оператора $A$ такого, что оператор $A^2$ является компактным.

5.7. Доказать, что если линейный оператор $A:l_2\to l_1$ ограничен, то $A$ компактен.

5.8. Пусть $A$ — компактный оператор, действующий в банаховом пространстве $E$. Можно ли утверждать, что у него нет левого ограниченного оператора, если: а) $\dim E=\infty$; б) $\dim E<\infty$?

5.9. Может ли существовать правый обратный оператор для компактного оператора $A$, действующего в бесконечномерном банаховом пространстве $E$?

5.10. Может ли компактный оператор $A:E\to E$, $E\in Ban, \dim E=\infty$ являться инъективным отображением $E$?

5.11. Линейный оператор $A$, действующий в банаховом пространстве $E$, $\dim E=\infty$, является открытым отображением на $E$. Может ли он быть компактным оператором?

5.12. Оператор $A\in L(E,E), E\in Ban$ не является компактным. При каких $n\in \boldsymbol{N}$ оператор $A^n$ может быть компактным?

5.13. Линейный оператор $A$, действующий в бесконечномерном банаховом пространстве $E$, является сюрьективным отображением из $E$ в $E$. Может ли $A$ быть компактным оператором?

5.14. Линейный оператор $A$, действующий в бесконечномерном банаховом пространстве $E$, каждое замкнутое множество переводит в замкнутое. Может ли $A$ быть компактным оператором?

5.15. Линейный оператор $A$, действующий в бесконечномерном банаховом пространстве $E$, каждое открытое множество переводит в замкнутое. В каком случае $A$ является компактным оператором?

5.16. Пусть $A$ — линейный оператор, действующий в бесконечномерном банаховом пространстве $E$. Предположим, что $A$ некоторый открытый шар

$B(x^*,r)$ переводит в открытое множество. Что можно сказать о компактности оператора $\mathrm{A}$?

Решение задачи 5.16. Поскольку множество $\mathrm{A}\left(B(x^*,r)\right)$ открыто, то существует шар $B(x_0,k) \subset \mathrm{A}\left(B(x^*,r)\right)$. Шар $B(0,1)$ предкомпактен в $\mathrm{E}$ тогда и только тогда , когда $\dim \mathrm{E} < +\infty$. Следовательно, из условий задачи вытекает, что $B(0,1)$ не предкомпактен в $\mathrm{E}$. Но $B(x_0,k) = x_0 + kB(0,1)$, поэтому если из некоторой последовательности $(x_m)$ элементов $B(0,1)$ нельзя извлечь сходящуюся подпоследовательность, то тоже можно сказать и о последовательности $y_m = x_0 + kx_m$ из $B(x_0,k)$. Итак, $B(x_0,k)$ — не предкомпактен в $\mathrm{E}$, являясь подмножеством $\mathrm{A}\left(B(x^*,r)\right)$. Тогда и само множество $\mathrm{A}\left(B(x^*,r)\right)$ не предкомпактно. Так как множество $B(x^*,r)$ ограничено, то А не является компактным оператором. ●

### Варианты задания

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Вариант1 | 1.15 | 2.10 | 3.7 | 4.5 | 5.1 |
| Вариант2 | 1.14 | 2.9 | 3.6 | 4.6 | 5.2 |
| Вариант3 | 1.13 | 2.8 | 3.5 | 4.7 | 5.3 |
| Вариант4 | 1.12 | 2.7 | 3.4 | 4.8 | 5.4 |
| Вариант5 | 1.11 | 2.6 | 3.3 | 4.9 | 5.5 |
| Вариант6 | 1.10 | 2.5 | 3.2 | 4.10 | 5.6 |
| Вариант7 | 1.9 | 2.4 | 3.1 | 4.11 | 5.7 |
| Вариант8 | 1.8 | 2.3 | 3.8 | 4.12 | 5.8 |
| Вариант9 | 1.+7 | 2.2 | 3.9 | 4.13 | 5.9 |
| Вариант10 | 1.6 | 2.1 | 3.10 | 4.14 | 5.15 |
| Вариант11 | 1.5 | 2.11 | 3.11 | 4.15 | 5.14 |
| Вариант12 | 1.4 | 2.12 | 3.12 | 4.4 | 5.13 |
| Вариант13 | 1.3 | 2.13 | 3.13 | 4.3 | 5.12 |
| Вариант14 | 1.2 | 2.14 | 3.14 | 4.2 | 5.11 |
| Вариант15 | 1.1 | 2.15 | 3.15 | 4.1 | 5.10 |
| Вариант16 | 1.1 | 2.3 | 3.5 | 4.15 | 5.2 |
| Вариант17 | 1.2 | 2.4 | 3.6 | 4.14 | 5.3 |
| Вариант18 | 1.3 | 2.5 | 3.7 | 4.13 | 5.4 |
| Вариант19 | 1.4 | 2.6 | 3.8 | 4.12 | 5.15 |
| Вариант20 | 1.5 | 2.7 | 3.9 | 4.11 | 5.12 |
| Вариант21 | 1.6 | 2.8 | 3.10 | 4.4 | 5.11 |
| Вариант22 | 1.7 | 2.9 | 3.11 | 4.3 | 5.10 |
| Вариант23 | 1.8 | 2.15 | 3.12 | 4.2 | 5.9 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Вариант24 | 1.9 | 2.14 | 3.13 | 4.1 | 5.8 |
| Вариант25 | 1.10 | 2.13 | 3.14 | 4.10 | 5.7 |
| Вариант26 | 1.11 | 2.12 | 3.15 | 4.9 | 5.5 |
| Вариант27 | 1.12 | 2.11 | 3.4 | 4.8 | 5.6 |
| Вариант28 | 1.13 | 2.2 | 3.2 | 4.5 | 5.13 |
| Вариант29 | 1.14 | 2.10 | 3.2 | 4.6 | 5.1 |
| Вариант30 | 1.15 | 2.1 | 3.1 | 4.7 | 5.14 |

## 3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

47. Пусть $\mathrm{A}$ — компактный оператор в банаховом пространстве $\mathrm{E}$ и $T = \mathrm{A} - 1_{\mathrm{E}}$. Доказать, что $\mathrm{E}$ разлагается в прямую сумму $\mathrm{E} = KerT + L$, причем оператор $T$ биективно отображает $L$ на $T(\mathrm{E})$.

48. Пусть $\mathrm{A}$ — компактный оператор в банаховом пространстве $\mathrm{E}$ и $T = \mathrm{A} - 1_{\mathrm{E}}$. Доказать, что в цепочке вложенных подпространств $G_1 \subset G_2 \subset ... G_k \subset ...$, где $C_k = KerT^k$, $k \in \boldsymbol{N}$, начиная с некоторого $n$ выполнено равенство $G_n = G_{n+1} = ...$

49. Пусть $\mathrm{E}_1$ и $\mathrm{E}_2$ — банаховы пространства, $\mathrm{A} \in L(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$. Доказать, что из компактности $\mathrm{A}^*$ следует компактность $\mathrm{A}$ .

**Некоторые из основных банаховых и гильбертовых пространств функционального анализа**

| | E | Вид элементов в E | Размерность | Норма в E $\|x\| =$ | Скалярное произведение |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\mathbf{R}$ | действительное число | 1 | $\|x\|$ | $(x,y)=xy$ |
| 2 | $\mathbf{C}$ | комплексное число | 1 | $\|x\|$ | $(x,y)=x\overline{y}$ |
| 3 | $\mathbf{R}^n$ | $(x_1,...,x_n)$, $x_i\in\mathbf{R}$ | $n$ | $\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2\right)^{1/2}$ | $(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i$ |
| 4 | $\mathbf{C}^n$ | $(x_1,...,x_n)$, $x_i\in\mathbf{C}$ | $n$ | $\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2\right)^{1/2}$ | $(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_i \overline{y_i}$ |
| 5 | $C[a,b]$ | $x(t)$ — непрерывная на $[a,b]$ функция | $\infty$ | $\max_{a\le t\le b}\|x(t)\|$ | — |
| 6 | $C^{(1)}[a,b]$ | $x(t)$ — непрерывно дифференцируемая на $[a,b]$ функция | $\infty$ | $\max_{a\le t\le b}\|x(t)\|+\max_{a\le t\le b}\|x'(t)\|$ | — |
| 7 | $l_2$ | $(x_1,x_2,...)$, $\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^2<\infty$ | $\infty$ | $\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^2\right)^{1/2}$ | $(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i \overline{y_i}$ |
| 8 | $l_p$ | $(x_1,x_2,...)$, $\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^p<\infty$ | $\infty$ | $\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^p\right)^{1/p}$ | $p\neq 2$ — |
| 9 | $l_\infty$ | $(x_1,x_2,...)$, $x_n$ — ограниченная последовательность | $\infty$ | $\sup\|x_i\|$ | — |
| 10 | $c$ | $(x_1,x_2,...)$, $\exists \lim_{n\to\infty} x_n<\infty$ | $\infty$ | $\sup\|x_i\|$ | — |
| 11 | $c_0$ | $(x_1,x_2,...)$, $\exists \lim_{n\to\infty} x_n=0$ | $\infty$ | $\sup\|x_i\|$ | — |
| 12 | $L_p[a,b]$ | $x(t)$ — измеримая на $[a,b]$ функция и $\int_a^b\|x(t)\|^p<\infty$ | $\infty$ | $\left(\int_{[a,b]}\|x(t)\|^p\right)^{1/p}$ | $(x,y)=\int_{[a,b]}x(t)\overline{y(t)}dt$ |

ЛИТЕРАТУРА

1. Антоневич А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. — Минск: Изд-во “Университетское”, 1984. — 351 с.

2. Колмогоров А.Н., Фомин СВ. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1983.

3. Мухин В.В., Миротин А.Р., Старовойтов А.П. Лабораторные работы по функциональному анализу для студентов специальности 2013. Части I, II, — Гомель, ГГУ, 1987,1988.

4. Садовничий В.А. Теория операторов. — Москва, 1986.

5. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Часть I. — Москва, 1985.

6. Кириллов А..А. Теоремы и задачи функционального анализа. — М.: Наука, 1979. — 384 с.

5. Антоневич А.Б., Князев П.Н., Радыно Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. — Минск: “Вышейшая школа”, 1978. — 205 с.

С О Д Е Р Ж А Н И Е